第 23 卷 第 2 期　　控 制 与 决 策　　2008 年 2 月
Vol. 23 No. 2　　Control and Decision　　Feb. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)02-0208-05

一类不确定系统的最优极小极大鲁棒控制

井元伟, 姜　囡, 郝彬彬
(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘　要: 讨论一类不确定系统的极小极大鲁棒动态输出反馈控制问题. 给出不确定系统的极小极大鲁棒控制的定义. 利用线性矩阵不等式(LMI)处理方法和 Lyapunov 稳定性理论,得到了在干扰和不确定性最大的情形下极小极大输出反馈控制器存在的充分条件. 引入凸优化技术, 求得最优极小极大控制器. 它不仅保证闭环系统渐近稳定, 且使得闭环系统性能指标的上界最小. 仿真算例说明了所设计的控制器具有较强的干扰抑制功能.

关键词: 不确定系统; 极小极大控制; 输出反馈; 线性矩阵不等式; 凸优化
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Optimal minimax robust control for uncertain linear systems

JING Yuan-wei, JIANG Nan, HAO Bin-bin
(College of Information Science and Engineering, Northeasten University, Shenyang 110004, China. Correspondent: JING Yuan-wei, E-mail: jingyuanwei@ise.neu.edu.cn)

Abstract: Thc output fccdback minimax robust control problem for unccrtain linear systems is discussed. The dcfinitions of minimax robust control of uncertain linear systems are defined. By means of the linear matrix inequality (LMI) and Lyapunov methods, the sufficient condition of the existence of minimax output feedback controller is presented under the worst disturbance and uncertaity. The convex optimization method is used to the parameter of the optimal minimax controllor. The closed-loop system is asymptotic stablc and the upper bound of the index performence gets to minima. Finally, the numerical example shows that the disturbance attcnuation of the controller is fortified greatly.

Key words: Uncertain systems; Minimax control; Output feedback; Linear matrix inequality (LMI); Convex optimization

1 引　　言

控制系统设计中最关心的问题是系统的稳定性和性能. 外界干扰和系统自身的不确定性会严重破坏系统的稳定性和性能[1],若系统考虑二次型性能指标,则随着干扰增大,系统的状态会逐渐偏离平衡点且控制能量的消耗也随之增大,进而使得系统的性能指标被破坏. 利用保性能控制不仅可以保证闭环系统渐近稳定,而且闭环性能指标存在一个上界[2,3]. 近年来,线性不确定系统的保性能控制问题[2-6]已得到充分研究,而且文献[7]给出了可靠保性能控制器的设计方法. 这些保性能控制问题考虑了干扰的存在,但未讨论干扰的影响程度. 当系统所容许的不确定性和干扰达到很大时,系统性能指标的上界会变得很大. 所谓的极小极大控制是一类特殊的保性能控制问题,它是针对干扰和不确定性最坏情形,设计控制器以便更好地控制系统的稳定性和性能. 这种控制方法具有很强的抗干扰能力,且在整个时间过程中状态偏差、控制能量的消耗、干扰以及不确定性几方面综合指标最小. 俄罗斯学者 Kogan 在文献[8,9]中针对标称线性连续系统研究极小极大控制器的存在条件,通过构造局部检验函数,利用极值原理给出了极小极大控制器的存在条件,但并未考虑极小极大控制器的最优参数问题.

以上的研究结果均建立在系统状态可以直接测量的假定基础上,采用的控制器为无记忆的线性状态反馈控制律. 但在实际系统中,系统的状态往往不能直接测量得到[10],所以基于输出反馈的极小极大最优鲁棒控制问题的研究是十分必要的.

本文设计的动态输出反馈极小极大控制器不需要付出很大的代价就能保证闭环系统渐近稳定,并

收稿日期: 2006-10-16; **修回日期**: 2007-03-12.
基金项目: 国家 863 计划项目(2004AA412030); 教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室开放课题项目.
作者简介: 井元伟(1956 —),男,辽宁西丰人,教授,博士生导师,从事复杂系统、远程通讯网络及通信控制等研究;
姜囡(1979 —),女,内蒙古呼伦贝尔人,博士生,从事广义系统、极小极大控制等研究.

且使得性能指标的上界达到很小. 利用李雅普诺夫方法和线性矩阵不等式的方法给出形式比较简单的存在条件,引入凸优化算法以求解最优极小极大控制器参数和性能指标的最小上界. 当系统的控制输入为零时,系统性能指标的上界非常大,然而对系统施加本文所设计的极小极大控制器后,指标泛函的上界值趋于很小. 通过仿真算例可以看出,本文所设计的极小极大控制器具有很好的干扰抑制作用.

2　系统描述与问题提出

考虑不确定系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + B_1\omega(t), \tag{1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + B_2u(t). \tag{1b}$$

其中:$x \in R^n$ 为系统的状态向量;$u \in R^k$ 为系统的控制向量;$y \in R^l$,$\omega \in R^l$ 分别为系统的输出和干扰向量,并且 $\omega \in L_2$. 不确定项满足范数有界条件

$$[\Delta A \quad \Delta B] = DF(t)[E_1 \quad E_2]. \tag{2}$$

其中:D, E_1, E_2 为具有适当维数的实常数阵;$F(t)$ 为可测的矩阵函数,且

$$F(t) \in \Omega, \Omega = \{F \mid F^{\mathrm{T}}F \le I\}.$$

考虑如下形式的性能指标:

$$J(u,\omega) = \int_0^\infty (x(t)^{\mathrm{T}}Qx(t) + u(t)^{\mathrm{T}}u(t) - \gamma^2\omega(t)^{\mathrm{T}}\omega(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

将系统(1)记为如下的等价形式:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dv_1 + Dv_2 + B_1\omega(t). \tag{4}$$

其中:$v_1 = FE_1x(t)$, $v_2 = FE_2u(t)$.

定义 1[6]　针对系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t),$$
$$x(0) = x_0,$$

和性能指标

$$J = \int_0^\infty [x(t)^{\mathrm{T}}Qx(t) + u(t)^{\mathrm{T}}Ru(t)]\mathrm{d}t,$$

如果存在一个控制律 $u^*(t)$ 和一个正数 J^*,使得对所有允许的不确定性,闭环系统是渐近稳定的,且闭环性能指标值满足 $J \le J^*$,则 J^* 称为该不确定系统的一个性能上界,$u^*(t)$ 称为一个保性能控制律.

定义 2　针对系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + B_1\omega(t),$$

$x(0) = x_0$ 和性能指标(3),如果存在一个控制律 $u^*(t)$ 和一个正数 J^*,在系统所能承受的最坏干扰和最大不确定性下,闭环系统是渐近稳定的,闭环性能指标达到极小且 $J \le J^*$,则 J^* 称为一个性能上界,$u^*(t)$ 称为极小极大鲁棒控制律.

动态输出控制律为

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_c\tilde{x}(t) + B_cy(t),$$
$$u = C_c\tilde{x}(t). \tag{5}$$

定义 3[11]　若所设计的动态输出反馈使得闭环系统满足

$$\int_0^T (x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Qu)\,\mathrm{d}t < \varepsilon\int_0^T \omega^{\mathrm{T}}\omega\,\mathrm{d}t,$$

则称控制系统满足干扰抑制功能.

由系统(4)和控制律(5)组成的闭环系统为

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{\omega}(t) + \bar{D}v(t), \tag{6}$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_cC & A_c + B_cB_2C_c \end{bmatrix},$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, v_1 = F(t)E_1, v_2 = F(t)E_2.$$

3　极小极大动态输出反馈控制器的设计

关于极小极大控制器的存在条件,本文得到了如下结果.

定理 1　对给定的系统(1)和性能指标(3),如果存在对称正定矩阵 P_1,矩阵 P_2, X_1, X_2, X_3 和 X_4,以及 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \gamma > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & P_1B_1 & P_1D & P_1D & E_1^{\mathrm{T}} \\ \Gamma_2^{\mathrm{T}} & \Gamma_3 & P_2B_1 & P_2D & P_2D & 0 \\ * & * & -\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1^{1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon_1E_1^{\mathrm{T}}E_1 & P_1D & P_1D & P_1B_1 \\ D^{\mathrm{T}}P_1 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ D^{\mathrm{T}}P_1 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ B_1^{\mathrm{T}}P_1 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} \le 0, \tag{8}$$

则

$$u^* = -(I + \varepsilon_2E_2^{\mathrm{T}}E_2)^{-1}[B^{\mathrm{T}}P_1 + B_2^{\mathrm{T}}X_1^{\mathrm{T}},\ B_2^{\mathrm{T}}P_2 + B_2^{\mathrm{T}}X_3^{\mathrm{T}}]\bar{x}$$

是系统(1)的一个输出反馈极小极大控制律,相应的系统性能指标上界是

$$J \le \mathrm{Trace}(P) = J^*. \tag{9}$$

其中

$$\Gamma_1 = A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A + C^{\mathrm{T}}X_1^{\mathrm{T}} + X_1C,$$
$$\Gamma_2 = A^{\mathrm{T}}P_2 + X_2 + C^{\mathrm{T}}X_3^{\mathrm{T}},$$
$$\Gamma_3 = X_4^{\mathrm{T}} + X_4, X_1 = P_2B_c,$$
$$X_2 = P_2A_c, X_3 = P_3B_c, X_4 = P_3A_c.$$

证明 首先构造局部检验函数

$$\Phi(t) = \dot V + u^{\mathrm T} u - \gamma^2 \bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega - \varepsilon v^{\mathrm T} v, \tag{10}$$

其中 $\varepsilon = \mathrm{diag}[\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2]$.

选择 Lyapunov 函数为

$$V = \bar x^{\mathrm T} P \bar x,$$

并将其代入式(10),有

$$\begin{aligned}\Phi(t) =\ & (\bar x^{\mathrm T}\bar A^{\mathrm T} P\bar x + \bar\omega^{\mathrm T}\bar B^{\mathrm T} P\bar x + v^{\mathrm T}\bar D^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \bar x^{\mathrm T} P\bar A\bar x + \bar x^{\mathrm T} P\bar B\bar\omega + \bar x^{\mathrm T} P\bar D v) + \\ & \bar u^{\mathrm T}\bar u - \gamma^2\bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega - \varepsilon v^{\mathrm T} v,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $P > 0$. 对式(11) 关于 v 求导,并令导数等于零,得

$$v^* = \varepsilon^{-1}\bar D^{\mathrm T} P\bar x. \tag{12}$$

又因为 $\partial^2\Phi(t)/\partial v^2 = -\varepsilon < 0$,所以式(11) 关于 v^* 存在极大值,即

$$\begin{aligned}&\max_v \Phi(t) = \\ & \bar x^{\mathrm T}\bar A^{\mathrm T} P\bar x + \bar x^{\mathrm T} P\bar A\bar x + 2\bar\omega^{\mathrm T}\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \\ & u^{\mathrm T} u - \gamma^2\bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega + \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x.\end{aligned} \tag{13}$$

对式(13) 关于 $\bar\omega$ 求导,并取导数等于零,得

$$\bar\omega^* = \gamma^{-2}\bar B^{\mathrm T} P\bar x. \tag{14}$$

又因为 $\partial^2\left(\max\limits_v \Phi(t)\right)/\partial\omega^2 = -\gamma^2 < 0$,所以式(13) 关于 ω^* 存在极大值,即

$$\begin{aligned}&\max_{v,\omega}\Phi(t) = \\ & \bar x^{\mathrm T}\bar A^{\mathrm T} P\bar x + \bar x^{\mathrm T} P\bar A\bar x + u^{\mathrm T} u + \\ & \gamma^{-2}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x.\end{aligned} \tag{15}$$

又由式(2) 有

$$\begin{aligned}&\max_{v,\omega}(\dot V + u^{\mathrm T} u - \gamma^2\bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega) \le \\ & \bar x^{\mathrm T}\bar A^{\mathrm T} P\bar x + \bar x^{\mathrm T} P\bar A\bar x + u^{\mathrm T} u + \\ & \gamma^{-2}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \bar x^{\mathrm T}\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1\bar x + \varepsilon_2 u^{\mathrm T} E_2^{\mathrm T} E_2 u = \\ & [x^{\mathrm T} A^{\mathrm T} + \tilde x^{\mathrm T} C_c^{\mathrm T} B^{\mathrm T}, x^{\mathrm T} C^{\mathrm T} B_c^{\mathrm T} + \\ & \tilde x^{\mathrm T} A_c^{\mathrm T} + \tilde x^{\mathrm T} C_c^{\mathrm T} B_2^{\mathrm T} B_c^{\mathrm T}] P\bar x + \\ & \bar x^{\mathrm T} P\begin{bmatrix} Ax + BC_c\tilde x \\ B_c C x + A_c\tilde x + B_c B_2 C_c\tilde x\end{bmatrix} + \\ & \gamma^{-2}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \varepsilon\bar x^{\mathrm T}\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1\bar x + u^{\mathrm T}(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2)u = \\ & \bar x^{\mathrm T} A_0^{\mathrm T} P\bar x + \bar x^{\mathrm T} PA_0\bar x + \bar x^{\mathrm T} H^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \bar x^{\mathrm T} PH\bar x + 2[0, u^{\mathrm T}]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B^{\mathrm T} & B_2^{\mathrm T} B_c^{\mathrm T}\end{bmatrix} P\bar x + \\ & \gamma^{-2}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \varepsilon\bar x^{\mathrm T}\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1\bar x + [0, u^{\mathrm T}] L\begin{bmatrix} 0 \\ u\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_c C & A_c\end{bmatrix},$$

$$\bar E_1 = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2\end{bmatrix}.$$

对式(16) 等号部分关于 u 求导,并令导数等于零,得

$$u^* = -(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2)^{-1}[B^{\mathrm T}, B_2^{\mathrm T} B_c^{\mathrm T}] P\bar x. \tag{17}$$

又因为

$$\frac{\partial^2\left(\max\limits_{v,\omega}(\dot V + u^{\mathrm T} u - \gamma^2\bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega)\right)}{\partial u^2} = (I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2) > 0,$$

所以式(16) 关于 u 存在极小值. 将式(17) 代入(16),有

$$\begin{aligned}&\min_u\max_{v,\omega}(\dot V + u^{\mathrm T} u - \gamma^2\bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega) \le \\ & \bar x^{\mathrm T} A_0^{\mathrm T} P\bar x + \bar x^{\mathrm T} PA_0\bar x + \bar x^{\mathrm T} H^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \bar x^{\mathrm T} PH\bar x + 2[0, u^{\mathrm T}]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B^{\mathrm T} & B_2^{\mathrm T} B_c^{\mathrm T}\end{bmatrix} P\bar x + \\ & \gamma^{-2}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \varepsilon\bar x^{\mathrm T}\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1\bar x + \\ & \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x + u^{\mathrm T}(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2)u = \\ & \bar x^{\mathrm T}[A_0^{\mathrm T} P + PA_0 + H^{\mathrm T} P + PH + \\ & \varepsilon\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1 - PY(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2)^{-1} Y^{\mathrm T} P + \\ & \gamma^{-2} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P + \varepsilon^{-1} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P]\bar x,\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $Y = \begin{bmatrix} B \\ B_c B_2\end{bmatrix}$. 记式(18) 为

$$\min_u\max_{v,\omega}(\dot V + u^{\mathrm T} u - \gamma^2\bar\omega^{\mathrm T}\bar\omega) \le -\bar x^{\mathrm T} Q\bar x. \tag{19}$$

显然,如果下式:

$$\begin{aligned}& A_0^{\mathrm T} P + PA_0 + H^{\mathrm T} P + PH + \gamma^{-2} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P + \\ & \varepsilon^{-1} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P + \varepsilon\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1 < 0\end{aligned} \tag{20}$$

成立,则可保证 $Q > 0$. 根据 Schur 补定理得到式(20) 的等价形式为

$$\begin{bmatrix} A_0^{\mathrm T} P + PA_0 + Z^{\mathrm T} + Z + \varepsilon\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1 & P^{\mathrm T}\bar B & P^{\mathrm T}\bar D \\ \bar B^{\mathrm T} P & -\gamma^2 & 0 \\ \bar D^{\mathrm T} P & 0 & -\varepsilon\end{bmatrix} \le 0, \tag{21}$$

其中 $Z = PH$. 又因为

$$\begin{aligned}\dot V =\ & \bar x^{\mathrm T} Q\bar x + \gamma^{-2}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P\bar x + \\ & \varepsilon^{-1}\bar x^{\mathrm T} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P\bar x - \varepsilon\bar x^{\mathrm T}\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1\bar x - \\ & \bar x^{\mathrm T} PY(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2)^{-1} Y^{\mathrm T} P\bar x,\end{aligned}$$

若式(21) 和下式:

$$\begin{aligned}& \gamma^{-2} P^{\mathrm T}\bar B\bar B^{\mathrm T} P + \varepsilon^{-1} P^{\mathrm T}\bar D\bar D^{\mathrm T} P - \\ & \varepsilon\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1 - M \le 0\end{aligned} \tag{22}$$

成立,则有 $\dot V < 0$,即闭环系统(6) 是渐近稳定的. 其中,$M = PY(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T} E_2)^{-1} Y^{\mathrm T} P$. 由 Schur 补定理,式(22) 等价为

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon\bar E_1^{\mathrm T}\bar E_1 - M & P^{\mathrm T}\bar D & P^{\mathrm T}\bar B \\ \bar D^{\mathrm T} P & -\varepsilon & 0 \\ \bar B^{\mathrm T} P & 0 & -\gamma^2\end{bmatrix} \le 0, \tag{23}$$

进而有 $x(\infty) = 0$. 对式(19) 移项和积分,得

$$\min_{u}\max_{v,\omega} J(u,W) =$$
$$\min_{u}\max_{v,\omega}\int_0^{\infty}(\bar{x}^{\mathrm T}Q\bar{x} + u^{\mathrm T}u - \gamma^2\bar{\omega}^{\mathrm T}\bar{\omega})\,\mathrm{d}t \le$$
$$-\int_0^{\infty}\dot{V}\mathrm{d}t = \bar{x}(0)^{\mathrm T}P\bar{x}(0).$$

令 $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^{\mathrm T} \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ (P_1, P_3 对称正定),显然可得到式(17)中控制律的表达式的等价形式

$$u^* = -(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T}E_2)^{-1}[B^{\mathrm T}P_1 + B_2^{\mathrm T}X_1^{\mathrm T},\ B_2^{\mathrm T}P_2^{\mathrm T} + B_2^{\mathrm T}X_3^{\mathrm T}]\bar{x}.$$

利用 Schur 补定理,式(21)和(23)显然分别等价于式(7)和(8),并且控制器的参数可通过求解线性矩阵不等式(7)和(8)得到. 在实际应用中很难精确确定系统的初始状态,所以假定初始状态 x_0 满足 $E\{x_0x_0^{\mathrm T}\} = I$,考虑性能指标的期望值,得到

$$\bar{J} = \mathrm{E}\{J\} \le \mathrm{E}\{\bar{x}(0)^{\mathrm T}P\bar{x}(0)\} = \mathrm{Trace}(P) = J^*.$$

注 1　当系统和控制器的初始状态都为零时,有下式成立:

$$\int_0^{\infty}(\bar{x}^{\mathrm T}Q\bar{x} + u^{\mathrm T}u)\,\mathrm{d}t < \int_0^{\infty}\gamma^2\bar{\omega}^{\mathrm T}\bar{\omega}\,\mathrm{d}t,$$

则根据定义3,可以说系统具有 H_∞ 范数意义下的干扰抑制功能.

注 2　若条件满足,则系统(1)存在输出反馈极小极大控制律,同时它给出了极小极大控制律的参数化表示. 从式(9)可以看出,系统的性能指标上界依赖于极小极大控制律的选取. 所以如何选取一个适当的极小极大控制律,使得系统的性能上界最小是十分关键的. 以下通过建立和求解一个凸优化问题,给出极小极大控制器的最优参数和性能指标的上界.

定理 2　对给定的系统(1)和性能指标(3),如果以下的优化问题:

$$\min_{\varepsilon,\gamma,P,Z}\ \mathrm{Trace}(P),$$
$$\text{s.t.}\quad P > 0,$$
$$\begin{bmatrix} A_0^{\mathrm T}P + PA_0 + Z^{\mathrm T} + Z + \varepsilon\bar{E}_1^{\mathrm T}\bar{E}_1 & P^{\mathrm T}\bar{B} & P^{\mathrm T}\bar{D} \\ \bar{B}^{\mathrm T}P & -\gamma^2 & 0 \\ \bar{D}^{\mathrm T}P & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix} \le 0,$$
$$\begin{bmatrix} -\varepsilon\bar{E}_1^{\mathrm T}\bar{E}_1 - M & P^{\mathrm T}\bar{D} & P^{\mathrm T}\bar{B} \\ \bar{D}^{\mathrm T}P & -\varepsilon & 0 \\ \bar{B}^{\mathrm T}P & 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} \le 0,$$

有解 $(\bar{\varepsilon},\bar{\gamma},\bar{P},\bar{Z})$,则

$$u^* = -(I + \varepsilon_2 E_2^{\mathrm T}E_2)^{-1}Y^{\mathrm T}P\bar{x}$$

是系统的最优极小极大控制律.

根据定理 1 的证明很容易证明,定理 2 是成立的.

4　仿真算例

针对系统(1)和性能指标(3),根据定理2,考虑系统的参数如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.5 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$
$$E_1 = [1\quad 0.6],\ E_2 = 0.5.$$

经 Matlab 中的 LMI 工具箱解得

$$P = \begin{bmatrix} 0.3056 & 0.0737 & 0 \\ 0.0737 & 0.4292 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4811 \end{bmatrix},$$
$$A_c = -0.1001,\ B_c = [0\quad 0.5005],$$
$$C_c = -0.5354,\ \gamma = 1.4604,$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.5372.$$

对系统施加幅值为 0.1 的阶跃干扰信号,系统的状态和控制响应曲线如图 1 和图 2 所示.

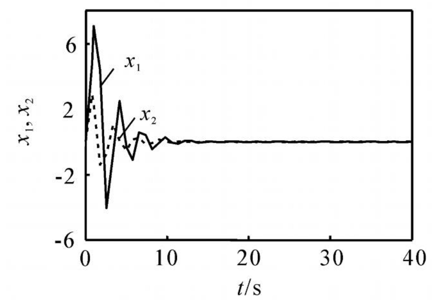

图 1　系统状态(x_1, x_2)的响应曲线

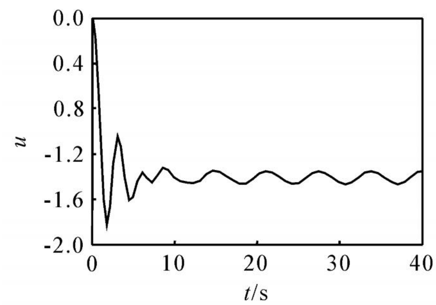

图 2　动态反馈控制 u 的响应曲线

从图中可以看出,尽管系统的运行过程中一直伴有干扰,但状态和控制曲线仍趋于稳定. 并且当系统的控制输入为零时,根据 Matlab 中的 mincx 工具箱求得性能指标的上界为 $\bar{J}^* = 1\,193.6$,可见干扰对系统的性能破坏是很严重的. 利用本文所设计的极小极大控制器,求得闭环系统的性能指标上界为 $J^* = 2.2159$,说明此控制器对干扰有着很强的抑制作用,并且从求得的控制器参数可以看出,控制器的能量消耗也是很小的.

5 结 语

考虑到系统的状态往往是不能直接量测到的,所以本文基于输出反馈研究系统的极小极大控制问题.当系统所承受的干扰很大时,系统的性能指标和稳定性被严重破坏,状态偏离平衡点,控制能量的消耗很大,导致性能指标的上界达到充分大.针对不确定性和干扰破坏程度最大的情形,设计的极小极大控制器不需要耗费很大的代价就可以把性能指标的上界控制到最小,且闭环系统是渐近稳定的,说明其对干扰的抑制有着很好的效果.同时求解的控制器未知参数 P 并不需要假设是对角形的,减少了设计的保守性.

参考文献(References)

[1] 杨富文. 具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(1): 61-68.
(Yang Fu-wen. Robust H_∞ control for systems with structured uncertain [J]. Control Theory and Applications, 1998, 15(1): 61-68.)

[2] Wu H N, Cai K Y. H_2 guaranteed cost fuzzy control for uncertain nonlinear systems via linear matrix inequalities[J]. Fuzzy Sets and System, 2004, 148(3): 411-429.

[3] Eduardo F C, Vilma A O. On the design of guaranteed cost controllers for a class of uncertain linear systems [J]. Systems & Control Letters, 2002, 46(1): 17-29.

[4] Moheimani R, Petersen I R. Optimal guaranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedback[J]. Automatica, 1996, 32(4): 575-579.

[5] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Guaranteed cost control for discrete time linear systems under controller gain perturbation [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2000, 312(1-3): 161-180.

[6] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 122-127.
(Yu L. Robust control — Linear matrix inequality method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 122-127.)

[7] 陈跃鹏, 张庆灵, 翟丁, 等. 广义系统可靠保成本控制[J]. 东北大学学报, 2004, 25(5): 471-474.
(Chen Yue-peng, Zhang Qing-ling, Zhai Di, et al. Reliably guaranteed cost control of descriptor systems [J]. J of Northeastern University, 2004, 25(5): 471-474.)

[8] Kogan M M. Solution to the inverse problem of minimax control and worst case disturbance for Linear continuous time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(5): 670-674.

[9] Kogan M M. Solution to the inverse problem of minimax control and minimax robust control [J]. Automechanism and Telemechanism, 1998, 3:87-97.

[10] 俞立, 王万良, 褚健. 不确定时滞系统的输出反馈稳定化控制器设计[J]. 自动化学报, 1998, 24(2): 225-229.
(Yu Li, Wang Wan-liang, Chu Jian. Design of output feedback stabilizing controller for uncertain time-delay systems[J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(2): 225-229.)

[11] 王德进. H_2 和 H_∞ 优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001: 147-149.
(Wang De-jin. H_2 and H_∞ control theory optimal[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001: 147-149.)

(上接第 207 页)

[7] 宁娣, 陆君安. 一个临界系统与 Lorenz 系统和 Chen 系统的异结构同步[J]. 物理学报, 2005, 54(10): 4590-4595.
(Ning Di, Lu Jun-an. Synchronization of a critical Chaotic system with Lorenz system and Chen system[J]. Acta Physica, 2005, 54(10): 4590-4595.)

[8] 李建芬, 林辉, 李农. 基于追踪控制的混沌异结构同步[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3992-3996.
(Li Jian fen, Lin Hui, Li Nong. Chaotic synchronization with diverse structures based on tracking control[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(8): 3992-3996.)

[9] 蔡国梁, 黄娟娟. 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rössler 系统的异结构同步[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3997-4004.
(Cai Guo-liang, Huang Juan-juan. Synchronization for hyperchaotic Chen system and hyperchaotic Rössler system with different structure[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(8): 3997-4004.)