

文章编号: 1001-0920(2008)02-0217-04

噪声方差不确定约束系统的滚动时域估计

赵海艳, 陈虹

(吉林大学 控制科学与工程系, 长春 130025)

摘要: 针对噪声方差不确定的约束系统, 讨论了一种鲁棒滚动时域估计 (MHE) 方法. 首先, 根据噪声方差不确定模型, 找到满足所有不确定性的最小方差上界, 在线性矩阵不等式 (LMI) 框架下求解优化问题, 得到近似到达代价的表达形式; 然后再融合预测控制的滚动优化原理, 把系统的硬约束直接表述在优化问题中, 在线优化性能指标, 估计出当前时刻系统的状态. 仿真时与鲁棒卡尔曼滤波方法进行比较, 结果表明了该方法的有效性.

关键词: 硬约束; 滚动时域估计; 不确定噪声方差; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Moving horizon estimation approach to constrained systems with uncertain noise covariance

ZHAO Hai-yan, CHEN Hong

(Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China. Correspondent: ZHAO Hai-yan, E-mail: haiyan@email.jlu.edu.cn)

Abstract: For the constraint system of covariance matrix being uncertain, a robust moving horizon estimation (MHE) strategy is discussed. The upper bound of minimum error covariance satisfying all the uncertainties is found and the optimal problem is solved in the framework of linear matrix inequality (LMI). Based on the moving horizon strategy, the state is estimated by minimizing performance object while satisfying the constraints for every possible noise covariance within the given bounds. Simulation and comparison results show with the robust Kalman filter are given. The results the effectiveness of the method.

Key words: Hard constraints; Moving horizon estimation; Uncertain noise covariance; Linear matrix inequality

1 引言

在经典的控制理论中, 如果所建模型的噪声统计特性精确已知, 则对系统状态进行估计时可采用最小二乘、卡尔曼滤波及最小方差等方法^[1-4]. 但在工程实践中, 有些噪声方差的统计特性是不确定的^[5-8], 如实际系统在运行过程中, 可能会受到强电磁干扰等随机因素的影响, 造成实际系统的统计特性发生较大的变动等^[9]. 特别是对系统的状态进行估计时还需要满足一定的约束条件, 如液体的泄漏量总是“非负的”等. 因此, 针对约束系统进行鲁棒估计问题的研究是十分重要的.

近年来, 随着模型预测控制 (MPC) 研究的不断深入及研究成果的不断取得^[10], 基于滚动优化原理的滚动时域估计 (MHE) 方法得到了人们的关注, 且在约束系统的状态估计中获得了成功应用^[11, 12].

MHE 的基本思想是将估计问题转化为固定时域长度的优化问题, 使在线处理系统约束成为可能. 这种估计方法充分利用了那些以约束形式出现的关于系统状态和干扰的已知信息, 可提高估计的合理性和准确性. 但是, 现有的滚动时域估计方法^[13-15] 没有针对噪声方差不确定这一现象进行讨论研究. 本文基于 MPC 的滚动优化原理, 针对噪声方差不确定约束系统提出了一种滚动时域估计方法. 最后, 通过三容系统液位估计例子验证了该方法的有效性和合理性, 并与鲁棒卡尔曼滤波方法进行了比较.

2 问题描述

考虑如下线性时不变离散系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + k. \quad (2)$$

约束条件如下:

收稿日期: 2006-11-01; 修回日期: 2007-03-30.

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目 (60374027); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目 (2004).

作者简介: 赵海艳 (1975 →), 女, 沈阳人, 博士生, 从事 H 滤波、滚动时域估计及应用研究; 陈虹 (1963 →), 女, 浙江桐乡人, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、鲁棒控制及非线性控制理论与应用的研究.

$$x_k \in X, w_k \in W, v_k \in V. \quad (3)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态,并假设其初始状态 $x(0)$ 为高斯分布的随机向量,且与 w_k 和 v_k 相互独立;

$y_k \in \mathbf{R}^m$ 是不确定测量输出; W, X 和 V 是凸集; $w_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $v_k \in \mathbf{R}^m$ 分别表示模型干扰和测量噪声,噪声方差分别为 $Q > 0, R(\cdot) > 0$. 测量噪声方差 $R(\cdot)$ 是不确定的且满足下列不确定结构:

$$R^{-1}(\cdot) = R^{-1} + M N + N^T M^T, \quad (4)$$

其中 $\{ \cdot \} : \{ \cdot \}$.

结合预测控制的滚动优化原理,滚动时域优化问题描述如下:

问题 1

$$\tilde{x}_{T-N}^* = \min_{\{w_k\}_{k=T-N}^{T-1}} \tilde{J}_T(x_{T-N}, \{w_k\}), \quad (5)$$

目标函数为

$$\begin{aligned} \tilde{J}_T(x_{T-N}, \{w_k\}_{k=T-N}^{T-1}) : = & \sum_{k=T-N}^{T-1} R^{-1} w_k + w_k^T Q^{-1} w_k + \\ & (x_{T-N} - \hat{x}_{T-N})^T P_{T-N}^{-1} (x_{T-N} - \hat{x}_{T-N}) \end{aligned} \quad (6)$$

满足式(1) ~ (3), N 是滚动时域窗口的大小. 其中: \hat{x}_{T-N} 为 $T-N$ 时刻的先验估计状态, P_{T-N} 是与先验估计状态 \hat{x}_{T-N} 和系统状态 x_{T-N} 之间的误差相对应的协方差矩阵,表示对初始状态估计的信心.

假设 T 时刻优化问题 1 存在最优解, 记为 $(x_{T-N}^*, \{w_k^*\}_{k=T-N}^{T-1})$, 则 $k(k = T-N+1, \dots, T)$ 时刻系统状态的估计值可通过下式计算:

$$x_k^* = A^k x_{T-N}^* + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B w_{T-N+j}^*. \quad (7)$$

求解优化问题 1 之前,需要得到先验估计状态 \hat{x}_{T-N} 和初始估计误差协方差 P_{T-N} ,即到达代价函数的表达式. 下面将讨论到达代价函数的求取方法并给出滚动时域估计算法.

3 滚动时域估计方法

在讨论具体算法之前,先给出如下引理:

引理 1 给定具有适当维数的实矩阵 $F = F^T, M, N$, 当且仅当存在一个标量 λ 使下式:

$$\begin{bmatrix} F - \lambda M M^T & N^T \\ N & I \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

成立,则对于所有的 $\lambda > 0$,

$$F + M N + N^T M^T > 0 \quad (9)$$

成立.

证明可参见文献[16].

由于噪声方差必须大于零,从引理 1 可知,当且仅当存在一个常数 λ 使得 $R^{-1} > M M^T + N N^T / \lambda$ 成立,那么模型(4)对于所有的不确定 $R^{-1}(\cdot) > 0$. 考虑如下形式估计器:

$$\hat{x}_{k+1} = (A - KC) x_k + Ky, \quad (10)$$

其中 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是需要确定的估计器的增益.

估计误差方差为

$$P_k = E\{(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T\} = (A - KC) P_k (A - KC)^T + KR(\cdot) K^T. \quad (11)$$

本文首要目标是通过最小化误差方差(11)的大小,优化得到一个线性估计器. 其中估计器增益 K 和误差方差矩阵 $P_k > 0$ 需要满足下列条件:

$$(K^*, P_{k+1}^*) = \arg \min \text{tr } P_{k+1}, \quad (12a)$$

$$(A - KC) P_k (A - KC)^T + KR(\cdot) K^T < P_{k+1}, \quad (12b)$$

$$\forall \lambda > 0, R(\cdot) > 0, \quad (12c)$$

其中 $\text{Tr } P_{k+1}$ 是估计误差方差 P_{k+1} 的迹.

由式(12)可知,估计器增益和下一时刻的估计误差方差可通过求解下列优化问题得到:

$$P_{k+1} - [K \ A - KC] \begin{bmatrix} R(\cdot) & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T \\ A - C^T K^T \end{bmatrix} > 0,$$

$$\forall \lambda > 0, R(\cdot) > 0, \quad (13)$$

应用 Schur 定理,上面的方程可转化为

$$\begin{bmatrix} P_{k+1} & K & A - KC \\ K^T & R^{-1}(\cdot) & 0 \\ A - C^T K^T & 0 & P_k^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (14)$$

$$\forall \lambda > 0, R(\cdot) > 0.$$

再把式(14)写成如式(9)所示的不确定形式,即

$$\begin{bmatrix} P_{k+1} & K & A - KC \\ K^T & R^{-1} & 0 \\ A - C^T K^T & 0 & P_k^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ N^T \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ N^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}^T > 0, \quad (15)$$

$$\forall \lambda > 0, R(\cdot) > 0.$$

对式(15)应用引理 1,可得下面的定理.

定理 1 优化问题(12)可用下面的半定规划问题求解:

$$(K, P_{k+1}) = \arg \min_{K, P_{k+1}} \text{Tr}(P_{k+1}), \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} P_{k+1} & K & A - KC & 0 \\ K^T & R^{-1} - M M^T & 0 & N^T \\ A - C^T K^T & 0 & P_k^{-1} & 0 \\ 0 & N & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (17)$$

那么,针对不确定系统(1) ~ (3),估计器(10)是鲁棒最小方差估计器. 其中 P_{k+1} 是系统最小化最坏情形的递推最优矩阵.

注 1 上面的定理与文献[9]中所给出的定理的区别是该定理得到的误差方差矩阵和估计器增益

是递推解的形式. 在这种意义上,可在不同的采样时刻,通过求解 LMI 优化问题 (16) 和 (17),得到最小方差矩阵.

对于无约束系统,当估计时域 $N = 1$ 时,递推滚动时域估计方法实质上近似于卡尔曼滤波方法.

综上,给出具有噪声方差不确定约束系统的滚动时域估计算法.

初始化,给定初始误差方差 P_0 ,噪声方差 Q ,初始状态 \hat{x}_0 ,时域长度 N .

Step1: 在采样时刻 T ,得到测量数据 $\{y_k\}_{T-N}^T$. 求解 LMI(16), (17),得到误差方差矩阵 P_{T-N} 和估计器的增益 K .

Step2: 根据式 (10) 计算 $T - N$ 时刻先验估计状态 \hat{x}_{T-N} ,然后利用先验条件 $\{P_{T-N}, \hat{x}_{T-N}\}$ 求解问题 1 得最优解 $\{\hat{x}_{T-N}^*\}, \{\hat{w}_k^*\}_{T-N}^T$,再根据式 (7) 递推得到当前时刻的状态估计值.

Step3: 计算下一时刻的先验估计状态.

Step4: 在时刻 $T + 1$,测量 y_{T+1} 并构造新的测量数据集,返回 Step1.

4 算例分析

应用本文讨论的滚动时域估计方法对三容实验系统进行液位估计. 根据物质守恒定律建立模型如下:

$$\begin{aligned} Sdh_1/dt &= Q_1 - Q_{13} - Q_{11}, \\ Sdh_3/dt &= Q_{13} - Q_{32} - Q_{33}, \\ Sdh_2/dt &= Q_2 + Q_{32} - Q_{20} - Q_{22}. \end{aligned} \quad (18)$$

其中: h_i 为容器 i 的液位; Q_{ij} 为从容器 i 到容器 j 的水流量; Q_1 和 Q_2 分别为水泵 1 和水泵 2 的供水流量; Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} 分别为 3 个容器的泄漏量; $S = 153 \text{ cm}^2$ 三为容器的截面积. 液位满足约束条件

$$0 \leq h_1, h_2, h_3 \leq 62 \text{ cm}. \quad (19)$$

三容系统的数学模型是非线性模型,在设计 MHE 估计器和卡尔曼滤波器时需要系统的线性模型作为名义模型,因此要对模型在平衡点进行线性化. 为了获得各液位的估计值,确定稳定工作点为: $h_1/s = 37 \text{ cm}, h_2/s = 24 \text{ cm}, h_3/s = 31.2 \text{ cm}, Q_1/s = 26.35 \text{ ml}, Q_2/s = 53.77 \text{ ml}$,并定义 $x_1 := h_1 - h_1/s, x_2 := h_2 - h_2/s, x_3 := h_3 - h_3/s, u_1 := Q_1 - Q_1/s, u_2 := Q_2 - Q_2/s, w_1 = Q_{11}, w_2 = Q_{22}, w_3 = Q_{33}$.

为了能合理地估计三容系统的液位值,应考虑液体的泄漏量总是大于零这个干扰约束条件. 此外,容器高度有已知的范围也可作为附加信息,并加以利用以提高估计的准确性. 因此,实际上所面临的是一个有约束的状态估计问题.

将非线性系统 (18) 在稳态工作点线性化,并取采样时间为 20 s,得到如下离散系统模型:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.7742 & 0.0234 & 0.2005 \\ 0.0234 & 0.6502 & 0.1495 \\ 0.2005 & 0.1495 & 0.6308 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.0813 & 0.0016 \\ 0.0012 & 0.2357 \\ 0.0125 & 0.0195 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} -0.1146 & -0.0011 & -0.0149 \\ -0.0011 & -0.1057 & -0.0115 \\ -0.0149 & -0.0115 & -0.1034 \end{bmatrix} w_k, \end{aligned} \quad (20)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_k + v_k, \quad (21)$$

$$R^{-1}(\cdot) = R^{-1} + \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0 \end{bmatrix}^T. \quad (22)$$

其中

$$R^{-1} = \text{diag}\{0.5, 0.5\}, \quad / \quad / \quad 1.$$

约束条件为 $w_k \geq 0$;估计时域长度 $N = 10$.

初始状态方差和模型干扰方差分别为

$$P_0 = \text{diag}\{5, 5, 5\}, Q = \text{diag}\{0.5, 0.5, 0.5\}.$$

由于测量噪声方差具有不确定的统计特性,仿真时可在不确定边界范围内随机取值,仿真结果如图 1 ~ 图 3 所示.

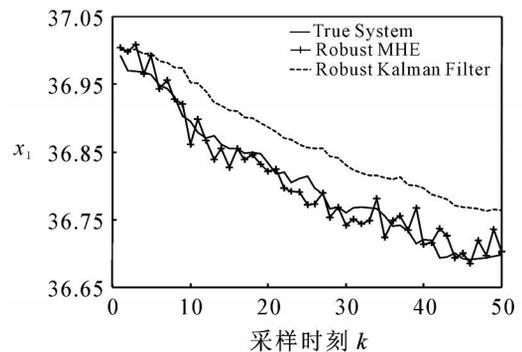


图 1 状态 x_1 的估计比较

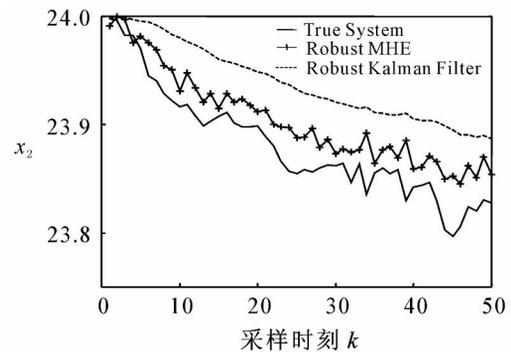


图 2 状态 x_2 的估计比较

仿真结果表明,滚动时域估计方法与卡尔曼滤波方法都能对系统状态进行估计. 然而,由于系统考

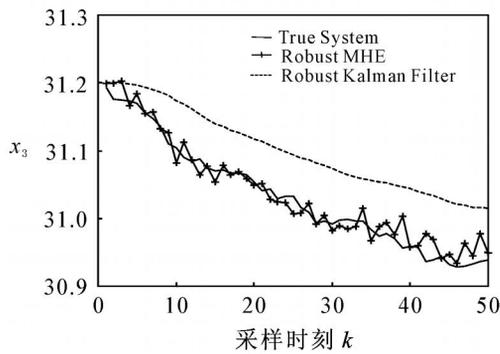


图3 状态 x_3 的估计比较

虑了‘泄漏量是非负的’这一干扰约束,干扰约束不满足白噪声的假设.从图1~图3可以看出,鲁棒卡尔曼滤波方法的估计效果不如滚动时域估计方法,这是由于滚动时域估计方法考虑了系统中存在的约束条件,并在线滚动优化处理,提高了估计的合理性与准确性.

5 结 语

本文讨论了具有噪声方差不确定约束系统的鲁棒滚动时域估计方法.首先,根据噪声方差不确定模型给出无约束系统的估计器设计方法,并通过求解LMI优化问题得到系统最坏情况下的最小方差矩阵;然后融合预测控制滚动优化原理,把系统的硬约束直接表述在优化问题中,通过极小化优化问题的性能指标,估计出系统的初始状态和作用在系统上的扰动,并由系统方程计算出系统状态的估计值.由于鲁棒滚动时域估计方法将系统的硬约束直接表述在优化问题中,并通过在线滚动优化使之动态满足,很好地解决了约束系统的状态估计问题.从三容系统液位估计的仿真结果可以看出,鲁棒滚动时域估计方法充分利用了以约束形式出现的关于系统状态和干扰的已知信息,提高了估计的合理性和准确性.由于对鲁棒滚动时域估计的研究刚刚开始,理论和算法还很不完善.

参考文献(References)

- [1] Kailath, Sayed A H, Hassibi B. Linear estimation[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [2] Ljung L. System identification: Theory for the user [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [3] Monin A, Salut G. Minimum variance estimation of parameters constrained by bounds[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(1): 246-248.
- [4] Fujishige S. Minimum-variance estimation for a linear

continuous-discrete system with noisy state-integral observation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1975, 20(1): 139-140.

- [5] Xie L, Souza C E. H state estimation for linear periodic systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38 (11): 1704-1707.
- [6] Shi P, Souza C, Xie L. Robust H filtering for uncertain systems with sampled data measurements[C]. IEEE Proc of the 32th Conf on Decision and Control. 1993, 1: 793-798.
- [7] Hung Y, Yang F. Robust. H filtering with error variance constraints for discrete time-varying systems with uncertainty[J]. Automatica, 2003, 39(3): 1185-1194.
- [8] Palhares R M, Peres P L D. Robust H filter design with pole constraints for discrete-time systems [J]. Franklin Institute, 2000, 3(37): 713-723.
- [9] Calafiore L, Ghaoui EI. Minimum variance estimation with uncertain statistical model [J]. IEEE Conf on Decision Control, 2001, 4(10): 3497-3499.
- [10] Zhang Liqian, Huang Biao. Robust model predictive control of singular systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 1000-1006.
- [11] 陈虹, 邹卫平, 孙鹏远. 连续搅拌反应釜浓度的滚动时域估计[J]. 系统仿真学报, 2001, 13(8): 37-40. (Chen Hong, Zou Wei-ping, Sun Peng-yuan. Application of moving horizon estimation in CSTR[J]. J of System Simulation, 2001, 13(8): 37-40.)
- [12] Wang Zhao, Liu Zhiyuan, Pei Run. The moving horizon strategy for vehicle state estimation[C]. The 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, 2004: 1547-1550.
- [13] Hector Valdes-Gonzalez, Jean-Marie Flaus, Gonzalo Acuna. Moving horizon state estimation with global coverage using interval techniques: Application to biotechnological processes[J]. J of Process Control, 2003, 13: 325-336.
- [14] Rao C V. Moving horizon strategies for the constrained monitoring and control of nonlinear discrete-time systems [D]. Madison: University of Wisconsin-Madison, 2000.
- [15] Rao C V, Rawlings J B, Lee J H. Constrained linear state estimation—a moving horizon approach [J]. Automatica, 2001, 37(10): 1619-1628.
- [16] Ghaoui L E, Oustry F, Lebret H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs [J]. SIAM J of Optimization, 1998, 9(1): 33-52.