

文章编号: 1001-0920(2008)02-0237-04

基于尖点突变对交通流模型的研究

郭 健^{1,2a}, 陈兴林¹, 金鸿章^{2b}

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨工程大学 a. 动力与能源工程学院, b. 自动化学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 传统的交通流模型难以解释某些实测交通流数据出现的非连续的“跳跃”式现象, 而基于突变理论的交通流模型则能够较好地三维空间角度甚至更高维角度予以解释. 为此, 针对快速道路的交通, 利用交通波动理论, 将交通流三参数关系模型与尖点突变数学模型相结合, 基于突变理论对快速道路交通流模型的临界状态进行分析. 分析结果与实际情况相符, 从而得出当实际检测到的车流密度接近临界密度时, 需要制定相应的交通管制策略和措施.

关键词: 突变理论; 尖点突变; 交通流; 快速道路

中图分类号: U491 **文献标识码:** A

Research on model of traffic flow based on cusp catastrophe

GUO Jian^{1,2a}, CHEN Xing-lin¹, JIN Hong-zhang^{2b}

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2a. College of Power and Energy Engineering, 2b. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. Correspondent: GUO Jian, E-mail: guojian_2006@hrbeu.edu.cn)

Abstract: The phenomena of discontinuous jumping, which exist in the datum of observed traffic flow, are hard to be explained by traditional traffic flow model. But they can be explained better by using traffic flow model of catastrophe theory in three-dimensional space or more-dimensional space. To the traffic of high-speed way, by using traffic wave theory, three-parametric relation model of traffic flow is combined with cusp catastrophe mathematic model to analyze the critical state of high-speed way traffic flow model based on catastrophe theory. The results of analysis are coincided with the fact. Thereby the policy and measure of traffic control must be done when the observed density of practical traffic flow is nearby the critical density.

Key words: Catastrophe theory; Cusp catastrophe; Traffic flow; High-speed way

1 引言

由于我国城市交通系统建设落后, 交通问题已成为制约城市发展的瓶颈问题. 交通拥堵、交通环境污染、交通事故已严重影响经济和社会的发展, 甚至关系到社会的安定问题.

传统的交通流模型均是建立在二维平面基础上的连续交通流三参数关系模型, 这些传统模型难以解释某些实测交通流数据出现的非连续的“跳跃”式现象, 而基于突变理论的交通流模型则能够较好地三维空间角度甚至更高维角度予以解释. 经过近几年的实验和进一步的研究发现, 流量-密度曲线在接近最大流的地方有明显的间断, 流量突然下降, 说明流量-密度曲线具有不连续性. 而以前的研究认为

该曲线是连续的, 并没有发现这个问题. 突变理论用“交点突变”的思想来解释和描述交通参数的上述不连续性, 有望解决传统理论的不足^[1,2].

突变理论是一种拓扑学理论, 一般所讲的突变理论实际上是初等突变理论. 它的主要数学渊源是根据势函数把临界点分类, 进而研究各种临界点附近非连续性态的特征, 即为有限个数的若干初等突变. 把这样得到的知识与对不连续现象的理论分析和观察资料相结合, 就可以建立数学模型, 更深刻地认识不连续现象的机理并作预测^[3,4]. 当把交通流的三参数关系模型作为整体来研究时所体现出的突变特性, 正好与突变理论中尖点突变模型体现出的突变指征相符合^[5], 所以利用尖点突变来研究交通

收稿日期: 2006-11-08; 修回日期: 2007-06-07.

基金项目: 国防基础科研项目(J1600B001); 黑龙江省博士后基金项目(LB H-Z06094); 哈尔滨工程大学校基金项目(HEUFT05061).

作者简介: 郭健(1977—), 女, 长春人, 副教授, 博士后, 从事系统工程、复杂系统脆性理论的研究; 陈兴林(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能机器人、计算机控制等研究.

流的三参数关系模型是可行的。

2 交通流三参数关系模型

交通量 Q , 行车速度 V 和车流密度 K 是表征交通流的 3 个基本参数. 三者之间的基本关系为^[6]

$$Q = KV. \quad (1)$$

速度 - 密度关系是参数之间的基本关系之一. 通过式 (1) 还可以得到速度 - 流量关系和流量 - 密度关系. 1967 年 May 和 Keller 根据车辆跟驰理论的一般表达式选取不同的 m 和 l , 得到了一组模型曲线族, 如表 1 所示.

表 1 根据车辆跟驰理论得出速度 - 密度模型

	$m = 0$	$m = 1$
$l = 0$	$V = 1/s(1/K - 1/K_j)$, s 为常数	
$l = 1$	$V = V_m \ln(K_j/K)$	
$l = 1.5$	$V = V_f [1 - (K/K_j)^{1/2}]$	
$l = 2$	$V = V_f (1 - K/K_j)$	$V = V_f e^{-K/K_m}$
$l = 3$		$V = V_f e^{-1/2(K/K_m)^2}$

在研究车流波动时, 借助 Greenshields 提出的速度 - 密度线性模型, 得出流量 - 密度曲线的特征为:

- 1) 当密度为零时, 流量为零, 于是曲线一定通过坐标原点;
- 2) 曲线中有一个表示最大(阻塞)密度而流量等于零的点;
- 3) 在两个零点之间必然有一个或几个流量峰值点;
- 4) 曲线不一定是连续的.

密度为零意味着道路中没有车辆, 只要有一辆车在道路中行驶, 则密度可被认为是趋近于零. 因此, 特征 1) 可表述为: 当密度趋近于零时, 流量也趋近于零.

根据基本关系式 (1) 和速度 - 密度模型, 可以确定流量与速度的关系. 速度 - 流量曲线有类似于流量 - 密度曲线的特点.

莱特希尔等论证了交通波的存在及特性. 当密度和流量发生变化时, 交通波的传播速度为^[8]

$$V = \frac{Q_2 - Q_1}{K_2 - K_1}. \quad (2)$$

当流量差 $Q = Q_2 - Q_1$ 和密度差 $K = K_2 - K_1$ 都很小时, 有

$$V = \frac{Q}{K} = \frac{dQ}{dK} \quad (3)$$

3 交通流尖点突变模型

3.1 模型的建立

将快速路交通流当流体来研究, 车流速度随车流密度的变化而变化, 其速度波方程为

$$V = dQ/dK = Q/K + KdV/dK. \quad (4)$$

当车流遇到某种扰动或突发事件时, 车队会受到冲击而降低车速, 车流密度会突然增大. 车速的降低犹如一股冲击波, 以气的速度向后传播. 受这一冲击波的影响, 交通流在某种临界状态下可能会产生突变, 即发生交通堵塞.

采用基于跟驰理论的广义速度 - 密度 May 模型作为基本方程. 该模型的优点在于当 $K = 0$ 和 $V = 0$ 时均有解, 且在 $0 < m < 1$ 和 $l > 1$ 区间内几乎涵盖了目前常用的所有速度 - 密度模型. 该模型表示如下:

$$V^{1-m} = V_f^{1-m} \left[1 - \left(\frac{K}{K_j} \right)^{l-1} \right], \quad 0 < m < 1, \quad l > 1. \quad (5)$$

取 $m = 0$, 对式 (5) 关于 K 求导可得

$$dV/dK = - (l-1) \frac{V_f}{K_j} \left(\frac{K}{K_j} \right)^{l-2}, \quad (6)$$

代入式 (4) 有

$$V = \frac{Q}{K} - (l-1) \frac{V_f}{K_j} K \left(\frac{K}{K_j} \right)^{l-2}. \quad (7)$$

按模型曲线族结构方程 l 的取值范围取 $l = 3$ 时, 式 (7) 可写成

$$K^3 + \frac{K_j^2}{2V_f} V K - K_j^2/2V_f Q = 0, \quad (8)$$

与尖点突变流形方程 $x^3 + ax + b = 0$ 相似, 构造密度突变模型如下:

势函数为

$$U(K, V, Q) = \frac{1}{4} K^4 + \frac{1}{4} \frac{K_j^2}{V_f} V K^2 - \frac{K_j^2}{2V_f} Q K, \quad (9)$$

突变曲面为

$$\frac{\partial U}{\partial K} = K^3 + \frac{K_j^2}{2V_f} V K - \frac{K_j^2}{2V_f} Q = 0, \quad (10)$$

突变流形方程为

$$K^3 + \frac{K_j^2}{2V_f} V K - \frac{K_j^2}{2V_f} Q = 0, \quad (11)$$

分叉集为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{K_j^2 V}{V_f} \right)^3 + \frac{27}{4} \left(\frac{K_j^2 Q}{V_f} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

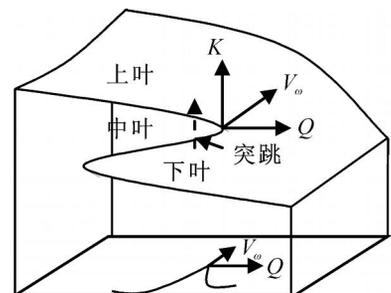


图 1 尖点突变曲面及其在 $Q-V$ 平面上的投影

临界曲面式(10)称为尖点突变曲面(如图1所示),在该曲面中存在一条折叠曲线.当控制变量 Q , V 变化时,状态变量 K 发生相应变化,曲线的运动轨迹亦发生渐变.开始是在突变曲面的下半曲面(底叶)运动,一旦运动轨迹经过折叠曲线便会出现“突跳”而逾越中间曲面(中叶),进入上半曲面(上叶).

3.2 模型的求解

突变流形方程(11)为高阶3次方程,用Matlab解其3个根分别为

$$K_1 = \sqrt[3]{\frac{K^2 Q S}{4V_f} + \sqrt{\dots}} + \sqrt[3]{\frac{K^2 Q}{4V_f} - \sqrt{\dots}}, \quad (13)$$

$$K_2 = \sqrt[3]{\frac{K^2 Q}{4V_f} + \sqrt{\dots}} + \sqrt[3]{\frac{K^2 Q}{4V_f} - \sqrt{\dots}}, \quad (14)$$

$$K_3 = \sqrt[3]{\frac{K^2 Q}{4V_f} + \sqrt{\dots}} + \sqrt[3]{\frac{K^2 Q}{4V_f} - \sqrt{\dots}}. \quad (15)$$

其中

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad = \left(\frac{K^2 Q}{4V_f}\right)^2 + \left(\frac{K^2 V}{6V_f}\right)^3,$$

K_1 为实数根, K_2 和 K_3 为复根.在突变曲面上,总势能对 K 的二阶导数为 $\frac{\partial^2 U}{\partial K^2} = 3K^2 + \frac{K^2}{2V_f}V$,在曲面中叶(含 $K=0$)上, $\frac{\partial^2 U}{\partial K^2} < 0$ 时处于不稳定状态;在上、下叶, $\frac{\partial^2 U}{\partial K^2} > 0$,处于稳定状态.

当 $=0$ 时,式(11)有实数解;当 <0 时,无实数解. $=0$ 时, k 为突变临界值,也就是说密度一旦达到或超越该临界值,就会产生状态的突变,即将出现交通阻塞.这正体现出非线性动态系统的分叉特性,即初始条件的一个很小的变化也可能导致系统产生不同的响应.

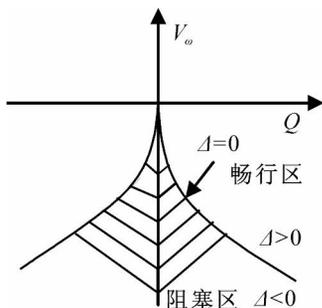


图2 突变映射

若将图1中的投影面放大则可得到如图2所示的平面,它是突变曲面(流形)在平面 $Q-V$ 上的一种突变映射.图2中的阴影区为折叠区.因为 Q 恒大于零,故交通流模型所适应的区域为折叠区的正半区域.当状态变量 K 在控制变量 Q, V 的作用下,落

在 >0 的区域时,则 K 是渐变的.此为畅行区,即非拥挤交通状态,其交通流为畅行交通流;当 K 值经过 $=0$ 进入 <0 区域时, K 的运动轨迹即由底叶突跳到上叶,形成一个突变.从物理意义上说,车流密度由渐变演化为跳跃式突变,车流密度瞬间达到阻塞密度,交通流从运动变为静止,由畅通变为堵塞,故该区域为阻塞区,即过饱和流状态.这从理论上解释了交通流发生突变的原因.

由以上所述, $=0$ 时可求得临界波速为

$$V_{lj} = -\sqrt[3]{\frac{27V_f Q^2}{2K_j^2}}, \quad (16)$$

相应有关突变临界密度

$$V_{lj} = \sqrt[3]{\frac{2K^2 Q}{V_f}}, \quad (17)$$

式中 Q 为达到临界速度时的流量.

对于非纯小客车流,车流阻塞时还要同时考虑车辆折算系数,取车辆单位为pcu(小客车的折算当量).取 k_j 最大阻塞密度为111.1 pcu/km^[5], V_f 自由流速度取设计时速120 km/h.仿真曲线如图3和图4所示.

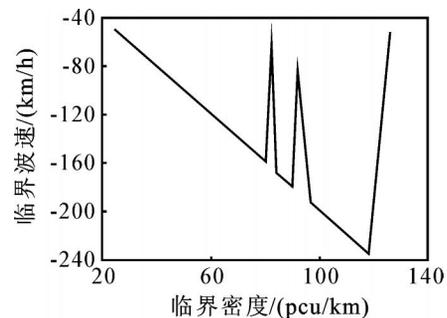


图3 临界波速-临界密度关系曲线

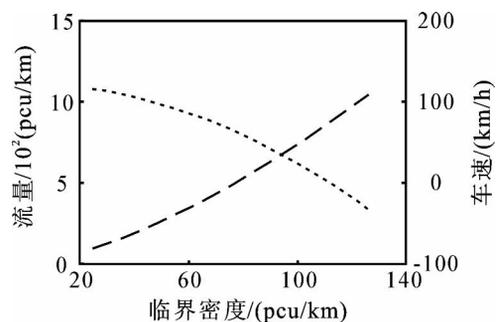


图4 流量-临界密度、车速-临界密度关系曲线

3.3 交通流尖点突变模型临界值分析

实际上,前面所说的阻塞密度应是一种理论上的阻塞密度.现实中达到这一密度之前,交通阻塞早已发生.也就是说,发生交通阻塞以后,总体上来说,车流或车队已停止(主要表现为头车不动了),但车流中还存在着局部的“微动”,驾驶员仍“想方设法”试图挪动自己的车辆前移,这种“微动”直至达到完

全静止下的最大车流密度时才结束.

分析图3和图4可得出如下结论:

1) 实际发生交通堵塞的临界密度与理论阻塞密度并不相等,即实际发生交通堵塞的临界密度小于理论阻塞密度.

2) 一般情况下,流量越大,遇到突发事件干扰时,其返回波速越大,发生交通突变导致交通阻塞的几率也越大.

3) 不同计算交通流量的快速路,其发生交通堵塞的车辆速度也不同.计算交通流量越高的快速路,其发生突变阻塞的速度反而越低.这是因为,流量愈高,遇到突发事件干扰时,其返回波速越大,发生交通突变导致交通阻塞的可能性也越大.

另外,通过得到的临界速度,可以实时地对交通流行为进行干预,当实际检测到的车流密度接近临界密度时,就应制定相应的交通管制策略和措施,如调节匝道进出口流量,总量控制快速路上的车辆数等.

4 结 语

利用交通波动理论,将交通流三参数模型转换为尖点突变数学模型,根据突变理论的原理从总体上对快速道路的阻塞状态及畅行状态进行了分析,并对其的临界状态也进行了较为深入的研究.

随着交通流状况变得越来越复杂,掌握的实测数据也更加详细具体,现有的交通流模型已不能满足研究的需要.突变理论的模型根据突变现象能够较精确地实时模拟交通流状况,不仅准确地建立了交通流三参数的关系模型,甚至可以挖掘影响交通流因素之间的关系,具有实际应用价值.

参考文献(References)

- [1] Lignos X, Ioannidis G, Kounadis A N. Non-linear buckling of simple models with tilted cusp catastrophe [J]. *Int J of Non-linear Mechanics*, 2003, 38(8): 1163-1172.
- [2] 宫晓燕, 汤淑明, 王知学, 等. 高速公路交通流建模综述[J]. *交通运输工程学报*, 2002, 2(1): 74-79.
(Gong Xiao-yan, Tang Shu-ming, Wang Zhi-xue, et al. Survey on freeway traffic flow modeling[J]. *J of Traffic and Transportation Engineering*, 2002, 2(1): 74-79.)
- [3] Jin Hong-zhang, Guo Jian, Wei Qi. Research on basic characteristics of complex system brittleness [J]. *J of Marine Science and Application*, 2004, 3(1): 57-63.
- [4] Guo Jian, Wu Dong-jian. Based on the relation of evolution among systems to analyze brittleness of complex system [C]. *The 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian, 2006: 667-671.
- [5] 张亚平, 张起森. 尖点突变理论在交通流预测中的应用[J]. *系统工程学报*, 2000, 15(3): 272-276.
(Zhang Ya-ping, Zhang Qi-sen. The application of cusp catastrophe theory in the traffic flow forecast [J]. *J of Beijing University of Technology*, 2000, 15(3): 272-276.)
- [6] 杨永勤, 刘小明, 于泉, 等. 交通流三参数关系的研究[J]. *北京工业大学学报*, 2006, 32(1): 43-48.
(Yang Yong-qin, Liu Xiao-ming, Yu Quan, et al. Research on three traffic flow parameters [J]. *J of Beijing University of Technology*, 2006, 32(1): 43-48.)
- [7] 唐铁桥, 黄海军. 用燕尾突变理论来讨论交通流预测[J]. *数学研究*, 2005, 38(1): 112-116.
(Tang Tie-qiao, Huang Hai-jun. The discussion of traffic flow forecast by using swallowtail catastrophe theory [J]. *J of Mathematical Study*, 2005, 38(1): 112-116.)
- [8] 熊烈强, 张正亚, 李杰. 交通流宏观建模方法研究[J]. *武汉理工大学学报*, 2005, 29(1): 26-30.
(Xiong Lie-qiang, Zhang Zheng-ya, Li Jie. A study of establishing methods about traffic macro models [J]. *J of Wuhan University of Technology*, 2005, 29(1): 26-30.)
- [10] Frank P M. Enhancement of robustness in observer based fault detection [J]. *Int J of Control*, 1994, 59(4): 955-981.
- [11] Arun T Vemuri, Marios M Polycarpou, Amt R Ciric. Fault diagnosis of differential-algebraic systems [J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybernetics*, 2001, 31(2): 143-152.
- [12] Wang Y, Xie L, De Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems [J]. *System Control Letter*, 1992, 19(12): 139-149.

(上接第236页)