

文章编号: 1001-0920(2008)03-0288-05

## 随机时延离散系统的 $l_2-l_1$ 滤波器型迭代学习控制

蔡逢煌, 王 武, 杨富文

(福州大学 电气工程与自动化学院, 福州 350002)

**摘 要:** 对于具有随机时延的一类离散系统的滤波器型迭代学习控制, 采用满足 Bernoulli 分布的二进制序列来描述数据传输的随机时延, 利用线性矩阵不等式方法设计具有随机时延的  $l_2-l_1$  滤波器, 给出了滤波误差系统均方指数稳定且具有给定的  $l_2-l_1$  性能的充分条件, 分析了滤波器型迭代学习控制收敛的充分条件, 仿真实例说明了该设计方法的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 随机时延; 离散系统;  $l_2-l_1$  性能

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

## Iterative learning control based on $l_2-l_1$ filter for discrete-time systems with random delay

CAI Feng-huang, WANG Wu, YANG Fu-wen

(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China. Correspondent: CAI Feng-huang, E-mail: caifenghuang@fzu.edu.cn)

**Abstract:** The problem of the iterative learning control based on  $l_2-l_1$  filter is solved for stochastic discrete-time systems with random delays. The random delays are described by using a binary switching sequence satisfying a conditional probability distribution. Filters are obtained such that the filter error systems are exponentially mean-square stable and guarantee a prescribed energy-to-peak disturbance attenuation level in term of linear matrix inequalities (LMIs). The iterative learning control based on the filter is designed. The simulation results show the effectiveness of the proposed design approach.

**Key words:** Iterative learning control; Random delay; Discrete-time system;  $l_2-l_1$  performance

### 1 引 言

通过网络形成闭环的控制系统称为网络控制系统(NCS). 相对于传统的点对点控制系统, 网络控制系统的主要优点是: 可实现信息资源共享, 可实现远程操作与控制, 便于故障诊断, 成本低廉, 安装维护方便等. 同时, 将通讯网络引入控制系统, 使得系统呈现出许多复杂的特性, 如时延的随机性和时变性, 因而系统的分析与综合变得十分复杂<sup>[1]</sup>.

对于传统的点对点控制系统, 迭代学习控制无论在理论上还是应用上都取得了丰硕的成果<sup>[2]</sup>. 对于网络控制下的迭代学习控制, 国内外学者还少有研究. 在网络控制系统的迭代学习控制中, 测量数据的准确性对于控制的性能起着决定性作用. 然而, 数据的网络传输有可能造成测量数据的随机时延, 它

将降低控制的性能和(或)破坏系统的稳定性, 尤其是对某些快速系统影响更大.

传统的处理时延的迭代学习控制方法已不再适用于 NCS 的分析与设计. 文献[3]研究了非线性网络控制系统的采样迭代学习控制, 提出了解决随机时延的一种方法, 但假设从传感器到控制器的传输时延是可测量的, 这在实际工程应用中较难实现. 文献[4-8]采用概率的方法来描述这种随机时延, 取得了一定的成果. 本文从测量数据随机时延的实际系统出发, 采用满足 Bernoulli 分布的序列来描述测量数据的随机时延, 研究具有随机时延的网络控制系统的滤波器型迭代学习控制器设计问题.

### 2 问题描述

基于滤波器的迭代学习控制系统的结构如图 1

收稿日期: 2006-12-05; 修回日期: 2007-04-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474049, 60604027); 福建省自然科学基金项目(A0510009).

作者简介: 蔡逢煌(1976—), 男, 福建莆田人, 讲师, 博士, 从事迭代学习控制等研究; 王武(1973—), 男, 福建莆田人, 讲师, 博士, 从事鲁棒控制、非脆弱控制的研究.

所示.

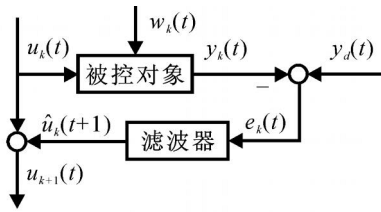


图 1 基于滤波器的迭代学习控制

考虑如下离散线性系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + B_1 w_k(t) + B_2 u_k(t), \\ y_k(t) = Cx_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$  是状态向量;  $w_k(t) \in \mathbf{R}^m$  是重复的外部扰动, 属于  $l_2[0, T]$ ;  $y_k(t) \in \mathbf{R}$  是对象输出;  $t \in [0, T]$  是迭代时间;  $k$  是迭代次数.

假设给定轨迹  $y_d(t)$  在时间区间  $t \in [0, T]$  上是可微的, 则迭代学习控制的控制目的就是设计迭代学习控制律  $u_k(t)$ , 使得对于所有的  $t \in [0, T]$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $y_k(t)$  收敛到  $y_d(t)$ . 对于线性系统而言, 系统的输入  $u_k(t)$  对滤波器的设计没有影响, 因此以下在设计滤波器时不考虑  $u_k(t)$ , 则扰动引起的输出即为系统输出的偏差.

重新构造数学模型如下:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + B_1 w_k(t), \\ e_k(t) = Cx_k(t). \end{cases} \quad (2)$$

设计的  $n$  阶滤波器为

$$\begin{cases} \hat{x}_k(t+1) = A_f \hat{x}_k(t) + B_f e_k(t), \\ \hat{z}_k(t) = C_f \hat{x}_k(t). \end{cases} \quad (3)$$

基于滤波器的迭代学习控制律为

$$\begin{cases} \hat{x}_k(t+1) = A_f \hat{x}_k(t) + B_f e_k(t), \\ \hat{u}_k(t) = C \hat{x}_k(t) + D e_k(t), \\ u_{k+1}(t) = u_k(t) + \hat{u}_k(t+1). \end{cases} \quad (4)$$

### 3 具有随机时延系统的 $l_2-l_1$ 滤波器

$l_2-l_1$  滤波是存在非 Gauss 噪声输入的系统常用的一种滤波器. 它是在假定系统的噪声输入为能量有界信号的前提下, 设计滤波器使得滤波误差系统具有一定的  $l_2-l_1$  扰动衰减水平, 即能量-峰值滤波. 这种准则是由 Wilson<sup>[9]</sup> 提出的, 其后学者们基于这种准则开展了滤波器设计方法的研究<sup>[10,11]</sup>. 对于具有随机通讯时延的网络化系统的  $l_2-l_1$  滤波器型迭代学习控制, 还未见报道.

本文研究系统测量数据具有一步随机时延的网络化系统的  $l_2-l_1$  滤波问题. 运用 LMI 方法, 给出了全阶滤波器存在的充分条件. 所设计的滤波器可使滤波误差系统均方指数稳定, 且具有给定的  $l_2-l_1$  性能.

考虑如下线性离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k), \\ z(k) = Lx(k). \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $x(k) \in \mathbf{R}^n$  是系统状态向量;  $w(k) \in \mathbf{R}^m$  是外部扰动, 属于  $l_2[0, \infty)$ ;  $z(k) \in \mathbf{R}^p$  是被估计状态;  $A, B_1, L$  是已知的实矩阵.

具有一步随机测量时延的测量输出描述为

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k), \\ \hat{y}(k) = r(k)y(k) + (1-r(k))y(k-1). \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $y(k) \in \mathbf{R}$  是测量输出向量;  $C$  是已知的实矩阵; 随机变量  $r(k) \in \mathbf{R}$  是满足 Bernoulli 分布的序列, 其取值为 0 和 1, 其概率为

$$\begin{cases} \text{Prob}\{r(k) = 1\} = E\{r(k)\} = \bar{r}, \\ \text{Prob}\{r(k) = 0\} = 1 - E\{r(k)\} = 1 - \bar{r}. \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\bar{r}$  是已知的正数.

设计  $n$  阶滤波器如式(3). 其中:  $\hat{x}(k) \in \mathbf{R}^n$  表示状态估计;  $A_f, B_f, C_f$  是要设计的滤波器参数. 根据式(3), (5) 和(6), 可得如下增广系统:

$$\begin{cases} x_d(k+1) = A_d x_d(k) + A_{d1} x_d(k-1) + B_d w(k), \\ \hat{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k) = C_d x_d(k). \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ r(k)B_f C & A_f \end{bmatrix} = A_{d0} + (r(k) - \bar{r})A_{d1}, \\ B_d &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_d = [L \quad -C_f], \\ A_{d1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-r(k))B_f C & 0 \end{bmatrix} = A_{d10} + (r(k) - \bar{r})A_{d11}, \\ A_{d10} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ \bar{r}B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad A_{d11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_f C & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{d10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-\bar{r})B_f C & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{d11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_f C & 0 \end{bmatrix}, \quad x_d(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

本文的目标是设计形如式(3)的全阶滤波器, 使得:

1) 在外部扰动  $w(k) = 0$  的情况下, 滤波误差系统(8)是均方指数稳定的, 即对于所有的  $x_d(0)$ , 存在  $1, 0 < \alpha < 1$ , 有

$$E\{ \|x_d(k)\|^2 \} \leq \alpha^k E\{ \|x_d(0)\|^2 \}. \quad (9)$$

2) 在零初始条件下, 滤波误差系统(8)具有  $l_2-l_1$  性能 ( $\gamma > 0$ ), 即

$$E\{e(k)^2\} < E\{w(k)^2\}, \forall w(k) \neq 0. \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} e(k)^2 = \sup_k \{e^T(k)e(k)\}, \\ w(k)^2 = \sup_{k=0} w^T(k)w(k). \end{cases} \quad (11)$$

下面给出本文的主要结果:

**定理1** 给定  $\gamma > 0$ , 如果存在正定对称阵  $P$  和  $R$ , 使得

$$\begin{bmatrix} R - P & * & * & * & * \\ 0 & -R & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * \\ PA_{d0} & PA_{d1} & PB_{d1} & -P & * \\ aPA_{d1} & aPA_{d1} & 0 & 0 & -aP \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -P & * \\ C_d & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

其中  $a = (1 - r)\bar{r}$ , 则系统(8)是均方意义下指数稳定的, 且具有给定的  $l_2$ - $l$  性能.

证明过程参见文献[12]中引理的证明.

**定理2** 给定  $\gamma > 0$ , 如果存在正定对称阵  $R_1$ ,  $R_2$  和  $W$ , 矩阵  $R_3, M, N$  和  $Z$ , 使得以下二式成立:

$$\begin{bmatrix} R_1 - W & * & * & * \\ R_2^T - W & R_3 - Y & * & * \\ 0 & 0 & -R_1 & * \\ 0 & 0 & -R_2^T & -R_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ WA & WA & 0 & 0 \\ YA + \bar{Z}C + M & YA + \bar{Z}C & bZC & bZC \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ aZC & aZC & -aZC & -aZC \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -I & * & * & * \\ WB - W & * & * & * \\ YB - W & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -aW \\ 0 & 0 & 0 & -aW - aY \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} -W & * & * \\ -W & -Y & * \\ L - N & L & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

其中  $a = (1 - r)\bar{r}, b = 1 - \bar{r}$ . 则系统(8)是均方意义下指数稳定的, 且具有给定的  $l_2$ - $l$  性能. 此时滤波器的参数为

$$\begin{cases} A_f = (W - Y)^{-1}M, \\ B_f = (W - Y)^{-1}Z, C_f = N. \end{cases} \quad (16)$$

证明 由定理1知, 系统(8)是均方意义下指数稳定的, 且具有给定的  $l_2$ - $l$  性能, 其充分条件是式(12)和(13)成立. 其他证明类似于文献[13]中定理3.1的证明.

#### 4 基于滤波器的迭代学习控制器设计

**定理3** 设被控系统的动态过程如式(1), 给定可达的期望轨迹  $y_d(t) (t \in [0, T])$ , 如果满足下列条件:

$$I - CB_2D < 1, x_k(0) = x_d(0). \quad (17)$$

则学习律(4)使得输出轨迹一致收敛于期望轨迹.

证明<sup>[2]</sup> 滤波器的滤波误差具有  $l_2$ - $l$  性能, 并且  $w_k(t)$  是可重复的扰动. 考察第  $k+1$  次迭代时的输出误差(以下  $0 \leq t \leq T$ ).

$$e_{k+1}(t+1) = e_k(t+1) - C(x_{k+1}(t+1) - x_k(t+1)) =$$

$$e_k(t+1) - \sum_{s=0}^t C(t+1, s+1) \times$$

$$B_2(u_{k+1}(s) - u_k(s)) =$$

$$e_k(t+1) - \sum_{s=0}^t C(t+1, s+1) \times$$

$$B_2(\hat{x}_k(s+1)) =$$

$$e_k(t+1) - \sum_{s=0}^t C(t+1, s+1) \times$$

$$B_2(C\hat{x}_k(s+1) + De_k(s+1)) =$$

$$[I - CB_2D]e_k(t+1) -$$

$$\sum_{s=0}^{t-1} C(t+1, s+1) B_2 De_k(s+1) +$$

$$\sum_{s=0}^t C(t+1, s+1) B_2 C\hat{x}_k(s+1).$$

两边取范数, 有

$$e_{k+1}(t+1)$$

$$\leq [I - CB_2D] e_k(t+1) +$$

$$\sum_{s=0}^{t-1} C(t+1, s+1) B_2 D e_k(s+1) +$$

$$\sum_{s=0}^t C(t+1, s+1) B_2 C \hat{x}_k(s+1). \quad (18)$$

由于  $\hat{x}_k(t) = \sum_{s=0}^{t-1} \wedge(t, s+1) B_f e_k(s)$ , 令

$$= \sup_{1 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t-1} C(t, s+1) B_2,$$

$$\wedge = \sup_{1 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t-1} \wedge(t, s+1) B_f.$$

式(18)经整理得

$$e_{k+1}(t+1)$$

$$e_k(t+1) + \sum_{s=0}^{t-1} e_k(s+1) \quad (19)$$

其中  $D + C^n$ ,  $n \geq 1$ . 式(19) 两端同乘以  $\alpha^{t+1}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 可得

$$\begin{aligned} & \alpha^{t+1} e_{k+1}(t+1) \\ & \alpha^{t+1} e_k(t+1) + \sum_{s=0}^{t-1} \alpha^{t-s} e_k(s+1) \\ & \alpha^{t+1} e_k(t+1) + \\ & \sum_{s=0}^{t-1} \alpha^{t-s} \sup_{t'} \int_{t'}^{s+1} e_k(s+1) \quad \} \\ & \alpha^{t+1} e_k(t+1) + \\ & \frac{(1-\alpha^T)}{1-\alpha} \sup_{t'} \int_{t'}^{t+1} e_k(t+1) \quad \}. \quad (20) \end{aligned}$$

式(20) 可写成

$$\begin{aligned} & \sup_{t'} \int_{t'}^{t+1} e_{k+1}(t+1) \quad \} \\ & \sim \sup_{t'} \int_{t'}^{t+1} e_k(t+1) \quad \}, \end{aligned}$$

其中  $\sim = \frac{(1-\alpha^T)}{1-\alpha}$ . 由  $\alpha < 1$  可找到足够小的  $\alpha$ , 使得  $\sim < 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t'} \int_{t'}^{t+1} e_k(t) \quad \} = 0$ .

### 5 数字仿真

设线性离散控制系统(1) 的参数如下:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.9583 & 1.2116 \\ -0.0659 & 0.9253 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], \\ B_1 &= \begin{bmatrix} -1.2325 \\ 0.0417 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.0417 \\ 0.0659 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

该模型为不间断电源的仿真模型. 系统的期望输出和初始状态为

$$\begin{aligned} y_d(t) &= 220 \sqrt{2} \sin(2\pi f k t_s), x_k(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ t_s &= 0.00005, f = 50 \text{ Hz}, \bar{r} = 0.9, \\ k &= 1, 2, \dots, 400. \end{aligned}$$

由定理 2, 利用 Matlab LMI Toolbox 选取  $E =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 可得当 } \alpha = 2.3022 \text{ 时, 有}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0005385 & 0.0000013 \\ 0.0000013 & 0.0000471 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.0005360 & 0.0000001 \\ -0.0000001 & -0.0000004 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.0005763 & 0.0000251 \\ 0.0000251 & 0.0006443 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.0209 & 0.0101 \\ 0.0100 & 0.3777 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1265 & 0.0732 \\ 0.0732 & 2.6751 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.0903 & -0.1899 \\ 0.0752 & -2.2016 \end{bmatrix},$$

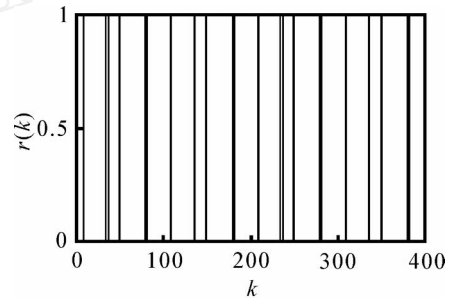
$$Z = \begin{bmatrix} -0.0115 \\ 0.0188 \end{bmatrix}, N = [0.8348 \quad 0.8601].$$

根据式(16) 可求得滤波器参数

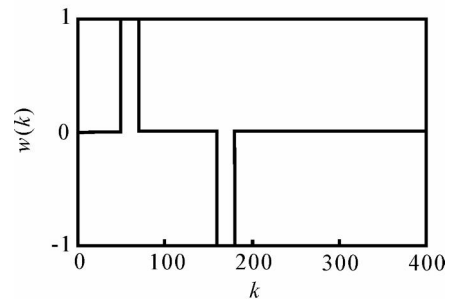
$$A_f = \begin{bmatrix} 0.8896 & 1.2468 \\ -0.0572 & 0.9241 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0.1154 \\ -0.0113 \end{bmatrix}, C_f = [0.8348 \quad 0.8601].$$

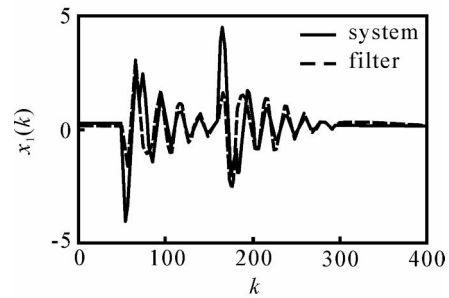
基于滤波器的迭代学习控制率(4), 误差为



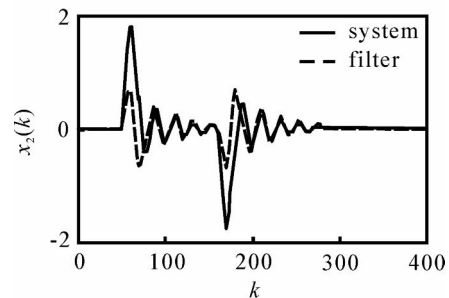
(a) 随机变量  $r(k)$



(b) 扰动  $w(k)$



(c) 系统输出  $x_1(k)$



(d) 滤波器输出  $x_2(k)$

图 2 随机变量、扰动和系统状态变量

$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ . 迭代学习控制算法满足定理3.

随机变量、扰动、系统状态和滤波器估计状态如图2所示. 其中:  $r(k)$  表示系统输出测量的随机时延 ( $r(k) = 1$  表示输出测量没有时延,  $r(k) = 0$  表示输出测量存在一步时延),  $w(k)$  为外部扰动,  $x_1(k)$  和  $x_2(k)$  为系统的状态变量.

选择  $C = [0.1, 0.1]$ ,  $D = 11$ . 则迭代学习控制系统的输出仿真曲线如图3所示, 满足控制要求.

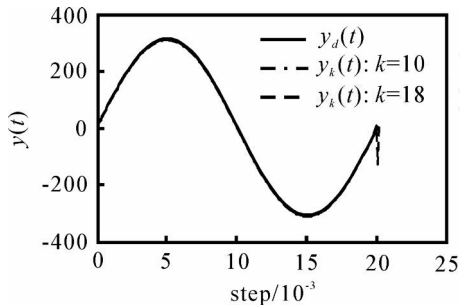


图3 迭代学习控制输出曲线

## 6 结论

本文研究具有随机时延网络控制系统的  $l_2-l_1$  滤波器型迭代学习控制. 利用 LMI 方法给出了滤波器的设计方法, 所设计的滤波器使得滤波误差系统均方指数稳定, 并且保证相对于所有有界的外界扰动信号, 滤波误差系统具有一定的  $l_2-l_1$  扰动衰减水平. 文中给出了基于滤波器的迭代学习控制的收敛条件. 数字仿真实例表明了该设计方法的有效性.

## 参考文献(References)

[1] 谢林柏, 方华京, 纪志成, 等. 时延网络化控制系统的  $H_2/H$  混合控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 1020-1024.  
(Xie Lin-bo, Fang Hua-jing, Ji Zhi-cheng, et al. Mixed  $H_2/H$ -infinity control of networked control systems with delay[J]. Control Theory & Applications, 2004, 21(6): 1020-1024.)

[2] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.  
(Sun Ming-xuan, Huang Bao-jian. Iterative learning control[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999.)

[3] Pan Ya-jun, Horacio J Marquez, Chen Tong-wen. Sampled-data iterative learning control for a class of nonlinear networked control systems [C]. Proc of the American Control Conf. Minneapolis, 2006: 3494-3499.

[4] Malek Zavarei M, Jamshidi M. Time-delay systems: Analysis, optimization and application [M]. Amsterdam: North-Holland, 1987.

[5] Nilsson J, Bernhardsson B, Wittenmark B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays[J]. Automatica, 1998, 34(1): 57-64.

[6] Srinivasagupta D, Schtler H, Joseph B. Time-stamped model predictive control: An algorithm for control of processes with random delays [J]. Computer & Chemical Engineering, 2004, 28(8): 1337-1346.

[7] Kolmanovsky I V, Maizenberg T L. Optimal control of continuous-time linear systems with a time-varying random delay[J]. Systems & Control Letters, 2001, 44(1): 119-126.

[8] Wang Z, Ho D W C, Liu X. Robust filtering under randomly varying sensor delay with variance constraints [J]. IEEE Trans on Circuits & Systems II: Express Briefs, 2004, 51(6): 320-326.

[9] Wilson D A. Convolution and hankel operator norms for linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(1): 94-97.

[10] Palhares R M, Peres P L D. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance: An LMI approach[J]. Automatica, 2000, 36(6): 851-858.

[11] Gao Hui-jun, Wang Chang-hong, Li Yan-hui. Robust  $l_2-l_1$  filter design for uncertain discrete-time state-delayed systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(5): 666-672.

[12] Yang F, Wang Z, Hung Y S, et al.  $H_\infty$  control for networked systems with random communication delays [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(3): 511-518.

[13] Palhares R M, Peres P L D. Robust  $H_\infty$  filter design with pole constraints for discrete-time systems[J]. J of the Franklin Institute, 2000, 337(6): 713-723.