第 23 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2008 年 3 月
Vol.23 No.3 Control and Decision Mar. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)03-0329-04

T-S 模糊系统 H∞跟踪控制设计

常晓恒[1,2] , 井元伟[1] , 高曦莹[2] , 刘晓平[1]
(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 辽宁工程技术大学 电气工程系, 辽宁 阜新 123000)

摘 要: 提出一种新的控制方法,以使 T-S 模糊控制系统达到 H_∞跟踪性能指标. 首先提出一个新的 H_∞跟踪性能指标,该指标考虑了受控输出变量中控制系数不为零的情况,比以往的性能指标更具一般性;然后给出了 H_∞跟踪控制器增益存在的充分条件,该条件可表示为线性矩阵不等式问题;最后通过一个仿真实例说明了所提出算法的有效性.

关键词: T-S 模糊系统; H_∞跟踪控制; 跟踪性能; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273.4 **文献标识码**: A

H∞ tracking control design of T-S fuzzy systems

CHANG Xiao-heng[1,2], *JING Yuan-wei*[1], *GAO Xi-ying*[2], *LIU Xiao-ping*[1]
(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shengyang 110004, China; 2. Department of Electrical Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China. Correspondent: CHANG Xiao-heng, E-mail: changxiaoheng@sina.com)

Abstract: A control design method for T-S fuzzy control systems is proposed to achieve H_∞ tracking performance. First, a new H_∞ tracking performance is proposed, which considers the case that the control coefficients are not zero in the controlled output variables, and is more general than some existing performances. A set of sufficient conditions for the existence of the H_∞ tracking controller for T-S fuzzy systems are proposed by using LMI-based method. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed approach.

Key words: T-S fuzzy system; H_∞ tracking control; Tracking performance; Linear matrix inequalities

1 引 言

T-S 模糊系统模型是 Takagi 和 Sugeno 于 1985 年提出的[1],目前已成为模糊控制领域非常活跃的一个分支. 它是一种本质非线性模型,易于表达复杂系统的动态特性. 近年来,许多文献对 T-S 模糊系统的稳定性和控制器设计问题进行研究[2-5].

H_∞控制近年来成为热门的研究课题[5-7]. 文献[6,7]把保证 H_∞性能指标的充分条件表示为线性矩阵不等式(LMI)的条件,为进一步研究系统的 H_∞控制问题提供了有效的方法. [5]改进了[6,7]的成果,充分考虑了受控输出中输入变量不为零的情况,给出了更具一般性的分析结果. 相比而言, H_∞跟踪控制的难度要大些,因为要尽可能提高系统 H_∞性能和减小控制误差. [8]给出了 H_∞跟踪控制的性能指标,并把这个跟踪控制的设计问题表示为 LMI 问题,它与[6,7]同样具有局限性,其 H_∞控制性能指标也没有考虑受控输出中控制系数不为零的情况.

本文充分利用文献[5]分析模糊 T-S 系统稳定性和设计 H_∞控制器的方法,给出一个新的 H_∞跟踪控制性能指标. 在这个性能指标中,充分考虑了受控输出变量 $z(t)$ 中 $D_i \neq 0$ 的情况,并在这个新的性能指标下,给出了 H_∞跟踪控制器系数存在的充分 LMI 条件. 利用 Matlab 中的 LMI 工具箱对具体例子进行仿真,用以说明本文算法的有效性.

在本文中,对于 $M, N \in R^{m\times n}$,不等式 $M^{\mathrm T} N + N^{\mathrm T} M \leq \rho M^{\mathrm T} M + \rho^{-1} N^{\mathrm T} N\ (\rho > 0)$ 被应用到相关的证明过程中.

2 T-S 模糊系统模型

考虑一个连续 T-S 模糊控制系统,其中第 i 条模糊规则为

$$R^i:\ \text{if } \zeta_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \zeta_2(t) \text{ is } M_2^i$$

收稿日期: 2007-03-16; **修回日期**: 2007-08-20.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60274099); 教育部博士点基金项目(20020145007).
作者简介: 常晓恒(1977 —),男,黑龙江肇东人,博士生,从事系统建模、控制系统稳定等研究; 井元伟(1956 —),男,辽宁西丰人,教授,博士生导师,从事复杂工业工程建模、现代通信网络控制等研究.

and $\cdots$ and $\zeta_p(t)$ is M_p^i;

$$\text{then}\begin{cases}\dot{x}(t)=A_ix(t)+B_iu(t)+w(t),\\ z(t)=C_ix(t)+D_iu(t).\end{cases}\tag{1}$$

其中

$$x(t)=[x_1(t)\quad x_2(t)\quad\cdots\quad x_n(t)]^{\mathrm T}\in R^n,$$
$$\zeta(t)=[\zeta_1(t)\quad\zeta_2(t)\quad\cdots\quad\zeta_p(t)]^{\mathrm T}\in R^p$$

为模糊系统的状态变量和前提变量;$M_k^i(i=1,2,\cdots,r,k=1,2,\cdots,p)$为模糊集;$r$为系统的模糊规则数目;$u(t)\in R^m$,$w(t)\in R^n$,$z(t)\in R^v$分别为输入变量、扰动变量和受控输出变量;$A_i\in R^{n\times n}$,$B_i\in R^{n\times m}$,$C_i\in R^{v\times m}$,$D_i\in R^{v\times m}$为系统的系数矩阵.

模糊控制系统的总体模型为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(\zeta(t))(A_ix(t)+B_iu(t)+w(t)),\\ z(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(\zeta(t))(C_ix(t)+D_iu(t)).\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$h_i(\zeta(t))=\omega_i(\zeta(t))/\sum_{j=1}^{r}\omega_j(\zeta(t)),$$
$$\omega_i(\zeta(t))=\prod_{k=1}^{p}M_k^i(\zeta_k(t)),$$

$M_k^i(\zeta_k(t))$表示前提变量$\zeta_k(t)$对于模糊集合M_k^i的隶属度,且有

$$0\le h_i(\zeta(t))\le 1,\quad\sum_{i=1}^{r}h_i(\zeta(t))=1.\tag{3}$$

为了表述方便,以下用x代替$x(t)$,用h_i代替$h_i(\zeta(t))$.

3 H∞跟踪性能

参考状态变量$x_r(t)$满足

$$\dot{x}_r(t)=A_rx_r(t)+r(t).\tag{4}$$

其中:A_r为稳定矩阵,$r(t)$为参考输入变量.

控制器设计[8]如下:

$$u(t)=\sum_{j=1}^{r}h_j[F_j(x(t)-x_r(t))].\tag{5}$$

结合式(2),(4)和(5),有

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{x}_r\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\overline{A}_{ij}\begin{bmatrix}x\\ x_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w\\ r\end{bmatrix},\\ \bar{z}=z-\sum_{i=1}^{r}h_iC_ix_r=\\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j(C_i+D_iF_j)(x-x_r)=\\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\times\\ \left([C_i+D_iF_j\quad -C_i-D_iF_j]\begin{bmatrix}x\\ x_r\end{bmatrix}\right).\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$\overline{A}_{ij}=\begin{bmatrix}A_i+B_iF_j & -B_iF_j\\ 0 & A_r\end{bmatrix}.$$

这里H_∞跟踪控制器设计的性能指标为寻找控制器(5),使得模糊系统(6)满足如下条件:

1) 当$\bar{w}=0$时,系统是渐近稳定的.

2) 对于给定的$\gamma>0$,在零初始条件下,满足

$$\|\bar{z}\|_2=\left\|z-\sum_{i=1}^{r}h_iC_ix_r\right\|_2<\gamma\|\bar{w}\|_2.$$

其中:$\bar{w}=\begin{bmatrix}w\\ r\end{bmatrix}$,$\|x\|_2=\sqrt{\int_0^\infty x^{\mathrm T}x\mathrm{d}t}$是$L_2$范数.

4 H∞跟踪控制器设计

定理1 对于式(6)所示系统,如果存在对称矩阵$M,N_{ii},L,Q_1>0,Q_2>0$,矩阵N_{ij}和$N_{ji}(N_{ji}=N_{ij}^{\mathrm T},i<j)$,对于所有的$i,j,k=1,2,\cdots,r$,使得以下不等式成立:

$$E_{ii}<N_{ii},\ E_{ij}+E_{ji}\le N_{ij}+N_{ji},\ i<j;\tag{7}$$

$$\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1r} & X_{1k}^{\mathrm T}\\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2r} & X_{2k}^{\mathrm T}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ N_{r1} & N_{r2} & \cdots & N_{rr} & X_{rk}^{\mathrm T}\\ X_{1k} & X_{2k} & \cdots & X_{rk} & -I\end{bmatrix}<0,$$
$$k=1,2,\cdots,r.\tag{8}$$

则H_∞跟踪控制的性能指标对于给定的$\gamma>0$是满足的. 其中

$$E_{ij}=\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}(A_iQ_1+B_iY_j)+\\ (A_iQ_1+B_iY_j)^{\mathrm T}+\frac{1}{\gamma^2}I\end{matrix} & -B_iY_j\\ \hline (-B_iY_j)^{\mathrm T} & \begin{matrix}Q_1(Q_2^{-1}A_r+A_r^{\mathrm T}Q_2^{-1}+\\ \frac{1}{\gamma^2}Q_2^{-1}Q_2^{-1})Q_1\end{matrix}\end{array}\right],$$

$$X_{ij}=[C_iQ_1+D_iY_j\quad -C_iQ_1-D_iY_j],$$
$$Y_i=F_iQ_1.$$

证明 构造Lyapunov函数$V(t)=\bar{x}^{\mathrm T}\overline{Q}^{-1}\bar{x}$,其中

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}x\\ x_r\end{bmatrix},\ \overline{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1^{-1} & 0\\ 0 & Q_2^{-1}\end{bmatrix}.$$

令

$$\overline{Q}_1^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1^{-1} & 0\\ 0 & Q_1^{-1}\end{bmatrix},$$

且有$G_{ij}=\overline{Q}_1^{-1}E_{ij}\overline{Q}_1^{-1}$. 对$V(t)$求导,有

$$\dot{V}(t)=\bar{x}^{\mathrm T}\overline{Q}^{-1}\dot{\bar{x}}+\dot{\bar{x}}^{\mathrm T}\overline{Q}^{-1}\bar{x}=$$
$$\bar{x}^{\mathrm T}\overline{Q}^{-1}\Big\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j(\overline{A}_{ij}\bar{x})+\bar{w}\Big\}+$$

$$\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j(\overline{A}_{ij}\overline{x})+\overline{w}\}^{\mathrm{T}}\overline{Q}^{-1}\overline{x}=$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}^{-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j(\overline{A}_{ij}\overline{x})+\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}^{-1}\overline{w}+$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j(\overline{A}_{ij}\overline{x})^{\mathrm{T}}\overline{Q}^{-1}\overline{x}+\overline{w}^{\mathrm{T}}\overline{Q}^{-1}\overline{x}\le$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\overline{x}^{\mathrm{T}}\times$$

$$\left[\begin{array}{c|c}\begin{array}{c}Q_1^{-1}(A_i+B_iF_j)+\\(A_i+B_iF_j)^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}\end{array} & -Q_1^{-1}B_iF_j\\ \hline (-Q_1^{-1}B_iF_j)^{\mathrm{T}} & Q_2^{-1}A_r+A_r^{\mathrm{T}}Q_2^{-1}\end{array}\right]\overline{x}+$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\overline{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}Q_1^{-1}Q_1^{-1} & 0\\ 0 & Q_2^{-1}Q_2^{-1}\end{bmatrix}\overline{x}+\gamma^2\overline{w}^{\mathrm{T}}\overline{w}=$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}\{\sum_{i=1}^{r}h_i^2G_{ii}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}^{r}h_ih_j(G_{ij}+G_{ji})\}\overline{x}+$$

$$\gamma^2\overline{w}^{\mathrm{T}}\overline{w}.$$

如果

$$G_{ii}<\overline{Q}_1^{-1}N_{ii}\overline{Q}_1^{-1},\tag{9}$$

$$G_{ij}+G_{ji}\le\overline{Q}_1^{-1}(N_{ij}+N_{ji})\overline{Q}_1^{-1},\ i<j.\tag{10}$$

则在式(9)和(10)的左右两侧同时乘以矩阵 $\overline{Q}_1$,有式(7)成立. 根据式(9)和(10),有

$$\dot{V}(t)<$$

$$\sum_{i=1}^{r}h_i^2\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}_1^{-1}N_{ii}\overline{Q}_1^{-1}\overline{x}+$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}^{r}h_ih_j\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}_1^{-1}(N_{ij}+N_{ji})\overline{Q}_1^{-1}\overline{x}+\gamma^2\overline{w}^{\mathrm{T}}\overline{w}=$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}_1^{-1}H^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1r}\\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2r}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ N_{r1} & N_{r2} & \cdots & N_{rr}\end{bmatrix}\times$$

$$H\overline{Q}_1^{-1}\overline{x}+\gamma^2\overline{w}^{\mathrm{T}}\overline{w}.$$

其中

$$H^{\mathrm{T}}=[h_1I\quad h_2I\quad\cdots\quad h_rI],$$

并有

$$\overline{z}^{\mathrm{T}}\overline{z}=$$

$$\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\times$$

$$([C_i+D_iF_j\quad -C_i-D_iF_j]\overline{x})\}^{\mathrm{T}}\times$$

$$\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_j\times$$

$$([C_i+D_iF_j\quad -C_i-D_iF_j]\overline{x})\}=$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}_1^{-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jX_{ij}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jX_{ij}\overline{Q}_1^{-1}\overline{x}=$$

$$\overline{x}^{\mathrm{T}}\overline{Q}_1^{-1}H^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}}JH\overline{Q}_1^{-1}\overline{x},$$

其中

$$J=[\sum_{k=1}^{r}h_kX_{1k}\quad\sum_{k=1}^{r}h_kX_{2k}\quad\cdots\quad\sum_{k=1}^{r}h_kX_{rk}].$$

如果

$$\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1r}\\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2r}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ N_{r1} & N_{r2} & \cdots & N_{rr}\end{bmatrix}<-J^{\mathrm{T}}J,\tag{11}$$

则利用 Schur 补定理,有 $\sum_{k=1}^{r}h_k=1$. 式(11)写可成式(8)的形式. 综上有

$$\dot{V}(t)<-\overline{z}^{\mathrm{T}}\overline{z}+\gamma^2\overline{w}^{\mathrm{T}}\overline{w}.\tag{12}$$

考虑到零初始条件,即 $x(0)=0, V(x(0))=0$,式(12)两侧同时对 t 取 $0\sim\infty$ 的积分并开根号,有 $\|\overline{z}\|_2<\gamma\|\overline{w}\|_2$. 当 $\overline{w}=0$ 时,由式(12)有 $\dot{V}(t)<-\overline{z}^{\mathrm{T}}\overline{z}<0$,即此时系统(6)是渐近稳定的. □

5　仿真实例

考虑 Air-condition 控制问题. 控制规则为

R^1: if $\zeta_1(t)$ is M_1^1 then

$$\dot{x}(t)=A_1x(t)+B_1u(t)+w(t),$$

$$z(t)=C_1x(t)+D_1u(t);$$

R^2: if $\zeta_1(t)$ is M_1^2 then

$$\dot{x}(t)=A_2x(t)+B_2u(t)+w(t),$$

$$z(t)=C_2x(t)+D_2u(t).$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.0493 & -1.0493\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.0132 & -0.4329\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\ 0.4926\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0\\ 0.1316\end{bmatrix},$$

$$C_1=C_2=[1\quad 0],$$

$$D_1=0.006,\ D_2=0.008.$$

这里取

$$h_1(\zeta(t))=1-\frac{1}{1+\exp(-2x_1)},$$

$$h_2(\zeta(t))=1-h_1(\zeta(t)),\ w(t)=\begin{bmatrix}0\\ 2\cos t\end{bmatrix}.$$

参考状态变量为

$$A_r=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & -4\end{bmatrix},\ r=\begin{bmatrix}0\\ 0.5\sin 5t\end{bmatrix}.$$

当 $\gamma=1.2$ 时,利用 Matlab 中 LMI 工具箱[9]进行仿真,由本文定理得出

$$Q_1=\begin{bmatrix}0.6775 & -1.3440\\ -1.3440 & 3.1738\end{bmatrix},$$

$$Q_2=\begin{bmatrix}2.0448 & 0.3815\\ 0.3815 & 1.5554\end{bmatrix},$$

$F_1 = [-86.8669 \quad -38.6877]$,

$F_2 = [-217.3743 \quad -96.8970]$.

在初始状态 $x_r(0) = [-2 \quad 0]^T$ 和 $x(0) = [1 \quad -1]^T$ 时, x_{r1}, x_1 和 x_{r2}, x_2 的响应曲线分别如图 1 和图 2 所示.

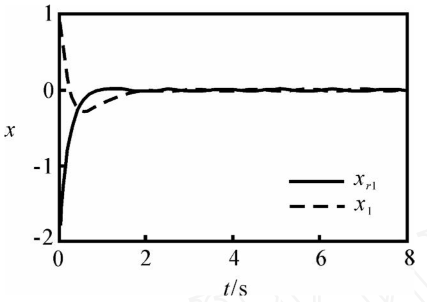

图 1 x_{r1} 和 x_1 的响应曲线

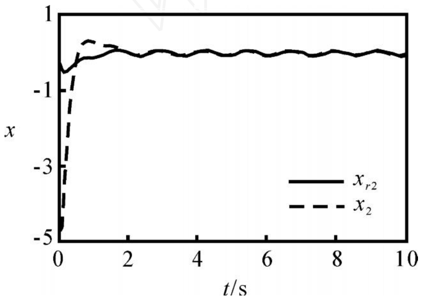

图 2 x_{r2} 和 x_2 的响应曲线

6 结 语

本文给出的 H_∞ 跟踪控制性能指标,充分考虑到受控输出变量 $z(t)$ 中 $D_i \neq 0$ 时的情况,并给出了 H_∞ 跟踪控制器系数存在的充分 LMI 条件. 整个计算过程简单、直观. 通过仿真实例可以看出,状态变量与参考向量吻合的效果非常好,这说明在本文控制算法下, H_∞ 跟踪误差比较小.

参考文献(References)

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of system and its application to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.

[2] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.

[3] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(2): 250-265.

[4] Kim E, Lee H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 8(5): 523-533.

[5] Liu X D, Zhang Q L. New approach H_∞ controller designs based on fuzzy observer for T-S fuzzy systems via LMI[J]. Atuomatica, 2003, 39(5): 1571-1582.

[6] Chen B S, Tseng C S, Uang H J. Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(3): 249-265.

[7] Chen B S, Tseng C S, Uang H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 571-585.

[8] Tseng C S, Chen B S, Uang H J. Fuzzy tracking control desing for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(3): 381-392.

[9] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, et al. LMI control toolbox[M]. Natick: The Math Works Inc, 1995.

(上接第 328 页)

[4] Zheng Ying, Fang Hua-jing, Wang Hua, et al. Fault detection approach for networked control system based on a memoryless reduced-order observer[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(4): 559-566.

[5] 樊卫华. 网络控制系统的建模与控制[D]. 南京: 南京理工大学, 2004.
(Fan Wei-hua. The modeling and control of networked control systems[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2004.)

[6] Li X, De Souza C E. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain lnear delay systems: A LMI approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42: 1141-1144.

[7] Rabello A, Bhaya A. Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and application[J]. IEE Proc on Control Theory Application, 2003, 150(5): 546-550.