

文章编号: 1001-0920(2008)03-0337-04

# 无穷时域的时间连续广义预测控制

刘晓华, 刘芳

(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

**摘要:** 将无穷时域的性能指标引入连续时间的广义预测控制, 通过施加新的终端等式约束, 把包含无穷时域性能指标的优化问题转化成可解的二次规划问题. 利用后退时域性能指标的单调性, 给出了保证连续时间广义预测控制闭环稳定性的条件. 仿真例子验证了该算法的有效性.

**关键词:** 广义预测控制; 连续时间系统; 无穷时域; 渐近稳定性

**中图分类号:** TP302.7 **文献标识码:** A

## Infinite horizon continuous-time generalized predictive control

LIU Xiaohua, LIU Fang

(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China. Correspondent: LIU Xiao-hua, E-mail: xhliu\_yt@sina.com)

**Abstract:** The cost function with infinite horizon is imported into the continuous-time generalized predictive control. By importing the new endpoint equality constraints, the optimal problem which has a cost function with infinite horizon can be transformed into a solvable quadric programming problem. The condition for guaranting the stability of the closed-loop system of continuous-time generalized predictive control is given according to the monotonicity of the receding-horizon cost. Simulation result shows the effectiveness of the algorithm.

**Key words:** Generalized predictive control; Continuous-time system; Infinite horizon; Asymptotically stability

### 1 引言

广义预测控制 (GPC) 算法<sup>[1]</sup> 具有模型参数少, 对扰动、随机噪声、时滞变化等有较强的鲁棒性等特点, 因而在工业过程控制中获得了广泛的应用<sup>[2,3]</sup>. Demircioglu 等在离散时间广义预测控制的基础上, 提出了连续时间的广义预测控制 (CGPC)<sup>[4]</sup>. CGPC 不但具有 GPC 的许多优点, 而且对外界扰动和参数摄动有更强的鲁棒性和自适应能力<sup>[5]</sup>.

系统的稳定性始终是控制系统设计的核心问题. 由于 GPC 算法考虑的是有限时域的优化问题, 不易找出可调参数与稳定性之间的显式关系, 使得算法闭环稳定性的分析较为困难<sup>[6-8]</sup>. 文献[8]采用无穷时域的性能指标, 给出了保证 GPC 闭环稳定的条件. 现有的预测控制的稳定性结果大都是针对离散时间系统, 而关于 CGPC 稳定性的研究并不多见. 文献[9]利用终端状态约束和终端状态加权, 给出一种保证 CGPC 系统稳定的方法.

本文针对连续时间的广义预测控制, 定义了不同于一般有限时域性能指标的无穷时域性能指标. 通过在预测时域引入等式约束, 对无穷时域性能指标进行转化, 从而获得最优控制律, 且最优控制序列满足所引入的终端等式约束. 通过后退时域性能指标的单调性, 给出了保证 CGPC 闭环系统稳定的条件. 最后通过仿真例子验证了该算法的有效性.

### 2 连续时间的广义预测控制

考虑如下连续时间线性模型<sup>[4]</sup>:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)}V(s). \quad (1)$$

其中:  $Y(s)$ ,  $U(s)$  和  $V(s)$  分别是系统的输出、控制输入和干扰输入;  $A(s)$ ,  $B(s)$  和  $C(s)$  是关于拉氏算子  $s$  的多项式, 且  $C(s)$  是稳定的多项式, 其定义如下:

$$\begin{aligned} A(s) &= s^{na} + a_1 s^{na-1} + \dots + a_{na-1} s + a_{na}, \\ B(s) &= s^{nb} + b_1 s^{nb-1} + \dots + b_{nb-1} s + b_{nb}, \\ C(s) &= s^{nc} + c_1 s^{nc-1} + \dots + c_{nc-1} s + c_{nc}. \end{aligned}$$

收稿日期: 2006-12-02; 修回日期: 2007-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60774016); 山东省自然科学基金项目(Y2005G01).

作者简介: 刘晓华(1959—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士, 从事预测控制、复杂系统控制理论及应用等研究; 刘芳(1982—), 女, 山东烟台人, 硕士生, 从事预测控制的研究.

定义性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{ [y^*(t+T) - w^*(t+T)]^2 + u^*(t+T)^2 \} dT \quad (2)$$

其中  $y^*(t+T)$ ,  $u^*(t+T)$  和  $w^*(t+T)$  分别为以截断的泰勒级数展开式出现的预测输出、预测输入和未来的设定值,且有

$$y^*(t+T) = T_{Ny} Y, \quad u^*(t+T) = T_{Nu} u, \\ w^*(t+T) = T_{Ny} W.$$

其中

$$T_{Ny} = [1 \quad T \quad T^2/2! \quad \dots \quad T^{Ny}/Ny!], \\ T_{Nu} = [1 \quad T \quad T^2/2! \quad \dots \quad T^{Nu}/Nu!], \\ W = [w(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T.$$

最小化性能指标(2),可得最优控制律

$$u = K(W - y^0). \quad (3)$$

其中

$$K = (H^T T_y H + T_u)^{-1} H^T T_y, \\ y^0 = [y(t) \quad y_1^0(t) \quad \dots \quad y_{Ny}^0(t)]^T.$$

式中

$$T_u = \int_{t_0}^{t_f} [T_{Nu}^T T_{Nu}] dT, \quad T_y = \int_{t_0}^{t_f} [T_{Ny}^T T_{Ny}] dT, \\ H = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & \dots \\ h_2 & h_1 & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & h_0 \\ \dots & \dots & \ddots & h_1 \\ h_{Ny} & \dots & \dots & h_{(Ny-Nu)} \end{bmatrix}.$$

$h_k$  为开环系统  $B(s)/A(s)$  的 Markov 参数.

基于后退时域策略的算法,将预测输入在  $T = 0$  时的值  $u^*(t+0) = u(t)$  作为控制输入,可得最优控制律

$$u(t) = k(w - y^0), \quad (4)$$

其中  $k$  为矩阵  $K$  的第一行.

将  $A(s)$  分成稳定的和不稳定的两部分,即  $A(s) = \bar{A}(s)\bar{A}(s)$ . 其中  $\bar{A}(s)$  为根全部在复平面左半部分的多项式,  $\bar{A}(s)$  为根在复平面右半部分或原点的多项式. 它们分别为

$$\bar{A}(s) = s^{n\bar{a}} + \bar{a}_1 s^{n\bar{a}-1} + \dots + \bar{a}_{n\bar{a}-1} s + \bar{a}_{n\bar{a}}, \\ \bar{A}(s) = s^{n\tilde{a}} + \tilde{a}_1 s^{n\tilde{a}-1} + \dots + \tilde{a}_{n\tilde{a}-1} s + \tilde{a}_{n\tilde{a}}.$$

定义预测时域

$$Ny = \max[Nu + nb - 1, n\bar{a}].$$

假设  $u(t+T) = 0, T = Ny$ , 即系统达到稳定后,系统的输入为零. 由此可得

$$\tilde{Y}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s) + \frac{C(s)}{A(s)} V(s) = \bar{A}(s) Y(s). \quad (5)$$

$\tilde{Y}$  的输出预测为

$$\tilde{y}(t+T) = T_{Ny} \tilde{H} u + T_{Ny} \tilde{y}^0. \quad (6)$$

其中

$$\tilde{y}^0 = [\tilde{y}(t) \quad \tilde{y}_1^0(t) \quad \dots \quad \tilde{y}_{Ny}^0(t)]^T, \\ \tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & \dots & \dots \\ \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \tilde{h}_0 \\ \dots & \dots & \ddots & \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_{Ny} & \dots & \dots & \tilde{h}_{(Ny-Nu)} \end{bmatrix}.$$

其中  $\tilde{h}_k$  为开环系统  $B(s)/\bar{A}(s)$  的 Markov 系数.

### 3 无穷时域的连续时间广义预测控制

定义无穷时域性能指标

$$J = \int_0^\infty [e^2(t+T) + u^2(t+T)] dT. \quad (7)$$

其中:  $e$  为控制加权,  $e(t+T)$  为跟踪误差且定义为

$$e(t+T) = y(t+T) - w(t+T).$$

对于  $t = 0$ , 有  $w(t) = w_t$ ,  $w_t$  为时刻  $t$  的设定值. 与定义在区间  $[t_0, t_f]$  上的有限时域性能指标(2)相比,式(7)是定义在区间  $[0, \infty)$  上的无穷时域性能指标.

采用无穷时域性能指标的 CGPC 的控制律,是通过最小化一个受预测误差等式约束的性能指标(7)获得的,因此优化问题可描述如下:

$$\min J = \int_0^\infty [e^2(t+T) + u^2(t+T)] dT, \\ \text{s. t. } e(t+T) = y(t+T) - w(t+T). \quad (8)$$

显然,这是一个不可解的优化问题. 为使其转化为可解的优化问题,引入终端等式约束

$$\tilde{y}(t+T) = \bar{A}(0) w(t+T), \quad \forall T = Ny. \quad (9)$$

文献[8]通过引入终端等式约束进行离散系统的状态空间实现,从而将不可解的优化问题转化为二次规划问题. 由于连续系统与离散系统不同,本文通过引入新的终端等式约束(9)进行连续系统的状态空间实现.

由式(5)知在时域中有

$$\tilde{y}(t+T) = a [y_0(t+T) \quad y_1(t+T) \quad \dots \quad y_{n\bar{a}}(t+T)]^T, \quad (10)$$

其中

$$a = [\bar{a}_{n\bar{a}} \quad \bar{a}_{n\bar{a}-1} \quad \dots \quad \bar{a}_1 \quad 1].$$

将式(9)代入式(10),可得

$$a [e(t+T) \quad e_1(t+T) \quad \dots \quad e_{n\bar{a}}(t+T)]^T = 0, \quad T = Ny. \quad (11)$$

假设

$$z = [e(t+T) \quad e_1(t+T) \quad \dots \quad e_{n\bar{a}-1}(t+T)]^T,$$

$$= \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} & & I_{n-1} \\ -\bar{a}_{n-1} & -\bar{a}_{n-2} & \dots & -\bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

其中对于任给的  $k$  和  $l, 0_{k,l}$  表示一个  $k \times l$  维的零矩阵. 根据式(11) 有

$$\dot{z} = Lz, e(t + T) = Lz,$$

其中  $L = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ . 显然,  $L$  为稳定且可逆的矩阵. 因此有

$$z = e^{-LT} z(t + Ny), \lim_{T \rightarrow \infty} z = 0, T > Ny.$$

于是

$$\int_{Ny}^{\infty} e^{2(t+T)} dt = \int_{Ny}^{\infty} (Lz z^T L^T) dt = -\frac{1}{2} L^{-1} z(t + Ny) e(t + Ny). \quad (12)$$

将式(12) 代入式(7), 可得

$$J = J - \frac{1}{2} L^{-1} z(t + Ny) e(t + Ny), \quad (13)$$

其中

$$J = \int_0^{Ny} [e^2(t + T) + u^2(t + T)] dt.$$

因此, 采用无穷时域性能指标的 CGPC, 其优化问题可转化成如下二次规划问题:

$$\begin{aligned} \min J &= J - \frac{1}{2} L^{-1} z(t + Ny) e(t + Ny), \\ \text{s.t. } &\tilde{y}(t + T) = \bar{A}(0) w(t + T), \quad \forall T > Ny. \end{aligned} \quad (14)$$

下一节将证明, 引入的终端等式约束不会影响无穷时域 CGPC 的控制目标. 因此优化问题(14) 与优化问题(8) 是等价的, 即求解此二次规划问题可得到最优控制律.

### 4 终端等式约束

本节在系统稳定和不稳定两种情况下, 分析终端等式约束(9) 对控制目标的影响.

如果系统(1) 是稳定的, 则有  $\bar{A}(s) = A(s)$ , 因此  $\bar{A}(s) = 1, \bar{n} = 0$ . 此时式(5) 可化为

$$\tilde{Y}(s) = B(s)U(s) + C(s)V(s) = A(s)Y(s). \quad (15)$$

因此终端等式约束可化为

$$\tilde{y}(t + T) = A(0) w(t + T). \quad (16)$$

如果这个约束条件成立, 则 CGPC 的无穷时域性能指标可转化为可解的性能指标, 并且保证

$$y(t + T) = w(t) = w_t, \quad t \geq 0.$$

如果这个约束条件不能满足, 则将导致一个非零的稳态误差, 从而得到一个无界的性能指标. 因此, 最小化性能指标(13) 得到的控制序列一定满足终端等式约束.

如果系统(1) 是不稳定的, 则  $\tilde{y}$  描述了系统不稳定部分的输出. 终端等式约束说明:

1) 系统不稳定的部分一定能在时间  $T < Ny$  时达到稳态;

2) 时刻  $t + Ny$  的  $\tilde{y}$  所导致的稳态误差要求保证

$$y(t + T) = w(t) = w_t, \quad t \geq 0.$$

如果条件 1) 不满足, 则系统不稳定的部分在  $t + Ny$  后不可控, 因为假设  $u(t + T) = 0, T > Ny$ ; 如果条件 2) 不满足, 则预测的稳态将远离设定点, 导致无界的性能指标. 因此, 如果最优控制有足够的自由度满足 1) 和 2), 则无穷性能指标最小的控制方案必须满足终端等式约束, 即式(8) 与式(14) 等价; 如果没有足够的自由度满足终端等式约束, 则性能指标是无界的, 将得到不稳定的结果. 因此, 引入的终端等式约束不影响控制目标.

### 5 闭环稳定性

本节依据后退时域性能指标的单调性<sup>[8]</sup>, 证明闭环系统的稳定性.

**定理 1** 对于采用无穷时域性能指标(7) 的 CGPC, 如果控制加权  $\lambda > 0$ , 则其闭环系统是渐近稳定的.

**证明** 令  $u^*(t + T)$  为时刻  $t$  的最优控制, 从而得出最优的预测误差  $e^*(t + T)$  和最优的性能指标  $J_t^*$ . 在时刻  $t + 1$ , 性能指标  $J_{t+1}^*$  可定义为

$$J_{t+1}^* = J_t^* - \int_0^1 [e^{*2}(t + T) + u^{*2}(t + T)] dt. \quad (17)$$

因为在时刻  $t + 1$  的性能指标不会大于  $J_{t+1}^*$ , 所以

$$J_{t+1}^* - J_{t+1} = J_t^* - \int_0^1 [e^{*2}(t + T) + u^{*2}(t + T)] dt. \quad (18)$$

于是可得最优性能指标列  $\{J_{t+k}^*\}$  是单调递减的, 且有下界 0. 当  $u^*(t + T) = u(t + T)$  时, 有  $e(t + T) = e^*(t + T)$ , 代入式(18), 则有

$$\int_0^1 [e^2(t + T) + u^2(t + T)] dt = J_t^* - J_{t+1}^*. \quad (19)$$

因为  $\{J_{t+k}^*\}$  是收敛的, 所以当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(19) 的右边会衰减到 0, 从而导致

$$e^2(t + T) + u^2(t + T) = 0, \quad t \geq 0.$$

因此, 只要选择控制加权  $\lambda > 0$ , 便有  $e(t + T) = 0, t \geq 0$ . 从而保证了 CGPC 闭环系统的渐近稳定性.

### 6 仿真例子

设系统方程为

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)}, \quad C(s) = 0.2s^2 + s + 1.$$

给定跟踪目标设为  $w_t = 1.4$ , 采用无穷时域的性能

指标

$$J = \int_0^T [e^2(T) + 0.001u^2(T)] dt$$

设定当前时刻  $t = 0$ , 当  $Nu = 3$  时, 由预测时域的定义可知  $Ny = 3$ . 仿真得到的系统输出曲线如图 1 所示.

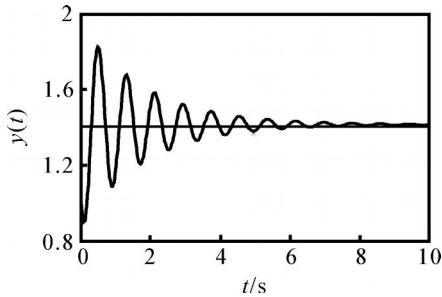


图 1 参考信号和闭环系统输出

从图 1 可以看出, 系统的输出曲线能够跟踪设定的目标, 且输出与设定值之间的误差随着时间的推移趋于零. 这说明闭环系统具有良好的渐近稳定性.

## 7 结 论

本文将离散时间 GPC 采用的无穷时域的性能指标引入 CGPC 稳定性的研究. 通过施加不影响控制目标的终端等式约束, 对无穷时域的性能指标进行转化, 从而使不可解的优化问题转化为可解的二次规划问题; 进而求解二次规划问题, 得到最优控制律. 由后退时域性能指标的单调性, 得到了使 CGPC 闭环系统达到渐近稳定的条件. 仿真结果验证了该算法的有效性.

## 参考文献(References)

[1] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized

predictive control: Part 1 & 2[J]. Automatica, 1987, 23(1): 137-160.

[2] 王伟, 杨建军. 广义预测控制: 理论、算法与应用[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 777-786.

(Wang Wei, Yang Jian-jun. Generalized predictive control: Theory, algorithm and application[J]. Control Theory and Applications, 1997, 14(6): 777-786.)

[3] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993. (Xi Yu-geng. Predictive control[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1993.)

[4] Demircoğlu H, Gawthrop P J. Continuous-time generalized predictive control[J]. Automatica, 1991, 27(1): 55-74.

[5] Demircoğlu H, Ercan Karasu. Generalized predictive control: A practical application and comparison of discrete and continuous-time versions[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2000, 10(1): 36-47.

[6] Demircoğlu H, Clarke D W. Generalized predictive control with end point weighting[J]. IEE Proc D, 1993, 140(4): 275-282.

[7] Kouvaritakis B, Rossiter J A, Chang A O T. Stable generalized predictive control: An algorithm with guaranteed stability[J]. IEE Proc D, 1992, 139(4): 349-362.

[8] Pierre O M, Sokaert. Infinite horizon generalized predictive control[J]. Int J of Control, 1997, 66(1): 161-175.

[9] Demircoğlu H, Clarke D W. CGPG with guaranteed stability properties[J]. IEE Proc D, 1992, 139(4): 371-380.

(上接第 336 页)

[5] Li Duan, Qian Furcai. Closed-loop optimal control law for discrete time LQG problems with a mean-variance objective[C]. 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Atlantis, 2004: 2291-2296.

[6] Fu Pei-lin, Li Duan, Qian Fur-cai. Active dual control for linear-quadratic Gaussian system with unknown parameters[C]. Proc of the 15th IFAC World Congress. Barcelona, 2002: 337-342.

[7] 钱富才, 刘丁, 李云霞. 基于两级算法的对偶控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(1): 89-93.

(Qian Fur-cai, Liu Ding, Li Yun-xia. Dual control based on two-level algorithm [J]. Control Theory and Applications, 2004, 21(1): 89-93.)

[8] Li Duan, Qian Furcai, Fu Pei-lin. Research on dual control[J]. Acta Automatic Sinica, 2005, 31(1): 32-42.

[9] 钱富才, 刘丁, 陈晓可. 基于滚动优化的对偶控制策略[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 855-861.

(Qian Fur-cai, Liu Ding, Chen Xiao-ke. Dual control strategy based on receding horizon[J]. Control Theory and Applications, 2005, 22(6): 855-861.)