第 23 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2008 年 3 月
Vol. 23 No. 3 Control and Decision Mar. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)03-0349-04

跳变双线性随机系统饱和执行器的镇定

刘 飞, 陈娇蓉
(江南大学 自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 对于一类具有 Markov 跳变参数的双线性离散随机系统,研究其饱和执行器问题. 分别采用一般二次型 Lyapunov 函数、饱和关联 Lyapunov 函数进行系统随机稳定性分析,以椭圆不变集构造随机稳定域,提出两种依赖于模态跳变率的饱和状态控制器设计方法,两种方法均以线性矩阵不等式的形式给出.

关键词: 双线性系统; 跳变系统; 饱和执行器; 椭圆不变集; 随机稳定性
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Stabilization of jump bilinear stochastic systems subject to actuator saturation

LIU Fei, CHEN Jiao-rong
(Institute of Automation, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China. Correspondent: LIU Fei, E-mail: fliu @sytu.edu.cn)

Abstract: Actuator saturation problems are discussed for a class of bilinear stochastic discrete-time systems with Markov jump parameters. The stochastic stability is respectively investigated by using general quadratic Lyapunov function and saturation-dependent Lyapunov function. A set of mode-dependent ellipsoid invariant sets are introduced to construct the stochastic stability region. Two design methods of saturation controller are presented, which dependent on the mode transition rate matrix. All the results are provided in the form of linear matrix inequality.

Key words: Bilinear systems; Jump systems; Actuator saturation; Ellipsoid invariant set; Stochastic stability

1 引 言

饱和执行器问题一直受到人们的关注. 在线性系统理论中,不变集概念是研究饱和执行器问题的有力工具之一[1,2]. 作为一类混杂系统,Markov 跳变系统除确定性连续动态外,还包含反映随机事件的跳变模态. 文献[3]对其进行研究,给出了饱和执行器的设计方法. 跳变双线性随机系统可看作由若干随机系统(系统中有乘性噪声)按 Markov 链从一个模态跳变到其他模态[4]. 关于跳变双线性随机系统的不变集构造及饱和执行器问题,目前还没有文献涉及.

本文研究具有饱和执行器的跳变双线性离散随机系统的镇定问题,分别用二次型 Lyapunov 函数、饱和关联 Lyapunov 函数两种方法研究系统的随机稳定性,以不同模态下椭圆不变集的交集构造随机稳定域,将状态反馈控制器的求解转化为线性矩阵不等式的可解性问题.

2 问题描述

考虑一类带有饱和执行器的 Markov 跳变双线性离散随机系统

$$x_{k+1} = A(r_k)x_k + B(r_k)\sigma(u_k) + \sum_{t=1}^{m} J_t(r_k)w_t(k)x_k. \tag{1}$$

其中 $x_k \in R^n$ 和 $u_k \in R^m$ 分别为系统的状态和控制输入向量; $w(k) = [w_1(k), \cdots, w_m(k)]^{\mathrm{T}} \in R^m$ 是不依赖于模态的相互独立的零均值白噪声序列; $A(r_k)$, $B(r_k)$, $J_t(r_k)$ 是依赖于模态 r_k 的适当维数矩阵. 为使表述简化,当 $r_k = i$ 时,分别用 A_i, B_i, J_{ti} 表示. r_k 是随时间 k 在有限集合 $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ 中取值的时齐的 Markov 链,转移概率为

$$\Pr\{r_{k+1} = j \mid r_k = i\} = p_{ij}.$$

其中 $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$, $\forall i, j \in S$.

收稿日期: 2006-12-05; **修回日期**: 2007-03-27.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574001); 新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-05-0485); 江南大学创新团队发展计划项目.
作者简介: 刘飞(1965—),男,安徽宣城人,教授,博士生导师,从事复杂系统性能分析与综合、先进控制理论与应用等研究; 陈娇蓉(1983—),女,浙江瑞安人,硕士生,从事复杂系统性能分析与综合的研究.

设饱和函数

$$\sigma(u) = [\sigma(u_1), \sigma(u_2), \cdots, \sigma(u_m)]^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\sigma(u_t) = \mathrm{sign}(u_t)\min\{1, |u_t|\}$, $\mathrm{sign}(\cdot)$ 为符号函数. 考虑状态反馈控制律 $u_k = K(r_k)x_k$, 则相应的闭环系统为

$$x_{k+1} = A(r_k)x_k + B(r_k)\sigma(K(r_k)x_k) + \sum_{t=1}^{m} J_t(r_k)w_t(k)x_k. \quad (2)$$

定义 1 设带有饱和执行器的随机系统如式 (1), 如果对于任意初始模态 r_0 和一定区域内的初始状态 x_0, 存在正数 $\overline{N(x_0, r_0)} > 0$, 满足

$$\lim_{M\to\infty} E\Big\{\sum_{k=0}^{M} x_k^{\mathrm{T}}(k, x_0, r_0)x_k(k, x_0, r_0) \mid x_0, r_0\Big\} < \overline{N(x_0, r_0)}, \quad (3)$$

则对于所有属于该区域的初始状态, 闭环系统 (2) 随机渐近稳定.

给定一组正定对称矩阵 $P_i, i = 1, 2, \cdots, N$, 可定义一组椭圆集合

$$\Omega(P_i) = \{x_k \in R^n : x_k^{\mathrm{T}} P_i x_k \leq 1\};$$

给定一组矩阵 H_i, 定义多面体集合[3]

$$\phi(H_i) = \{x_k \in R^n : |h_{it}x_k| \leq 1, \; t = 1, 2, \cdots, m\},$$

其中 h_{it} 表示矩阵 H_i 的第 t 行.

引理 1[5] 设 $P \in R^{m\times m}$ 为正定对称阵, 矩阵 $M_s \in R^{m\times n}$, $s = 1, 2, \cdots, r$. 如果 $\sum_{s=1}^{r} p_s = 1$ 且 $0 \leq p_s \leq 1$, 则有

$$\Big(\sum_{s=1}^{r} p_s M_s\Big)^{\mathrm{T}} P \Big(\sum_{s=1}^{r} p_s M_s\Big) \leq \sum_{i=1}^{r} p_s M_s^{\mathrm{T}} P M_s. \quad (4)$$

引理 2 设 R_1 和 R_2 为适当维数的正定对称矩阵, 则有

$$R_1 + R_1^{\mathrm{T}} - R_2 \leq R_1 R_2^{-1} R_1^{\mathrm{T}}. \quad (5)$$

证明 由于 $(R_1 - R_2)R_2^{-1}(R_1 - R_2)^{\mathrm{T}} \geq 0$, 将其展开, 得 $R_1R_2^{-1}R_1^{\mathrm{T}} - R_1 - R_1^{\mathrm{T}} + R_2^{\mathrm{T}} \geq 0$, 即可得式 (5) 成立. □

引理 3[1] 对于 $u_k \in R^m$, $v \in R^m$, 如果 $|v_t| < 1$, $t \in [1, m]$, 则有

$$\sigma(u_k) \in \mathrm{co}\{D_f u_k + D_f^- v, f \in \Phi\}. \quad (6)$$

其中: $\Phi = [1, 2^m]$, co 表示凸包, 即

$$\sigma(u_k) = \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f [D_f u_k + D_f^- v]. \quad (7)$$

式中 $0 \leq \theta_f \leq 1$, $\sum_{f=1}^{2^m} \theta_f = 1$. 令 Ξ 为 $m\times m$ 对角矩阵的全体, 其对角线上的元素为 1 或 0. 将 Ξ 中每个矩阵记为 D_f, 而 $D_f^- = (I - D_f)$, $f = 1, 2, \cdots, 2^m$. 显然, 如果 $D_f \in \Xi$, 则有 $D_f^- \in \Xi$.

注 1 D_f 的作用在于取出 u 的指定行加入约束, D_f^- 保证了 v 中对应的行不起作用. 根据排列组合原理, Ξ 中共有 2^m 个元素.

注 2 在以下的讨论中, 令 $v = H_i x_k$. 当 $x_k \in \phi(H_i)$ 时, 即 $|v_t| < 1$, $t \in [1, m]$, 则有

$$\sigma(u_k) = \sigma(K_i x_k) = \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f [D_f K_i x_k + D_f^- H_i x_k].$$

3 主要结果

本节运用引理 3 的结论, 将非线性的饱和控制问题转化为凸包中的一组线性控制问题. 下面分别采用两种不同的方法进行分析和设计.

3.1 基于二次型 Lyapunov 函数方法

定理 1 对于一组给定的状态反馈控制矩阵 K_i, 如果存在一组适当维数的矩阵 H_i 和正定阵 P_i, 满足

$$T_{if} = \overline{A_{if}}^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} P_j \overline{A_{if}} + \sum_{k=1}^{m} J_{ki}^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} P_j J_{ki} - P_i < 0, \quad (8)$$

$$\Omega(P_i) \subset \phi(H_i). \quad (9)$$

其中

$$\overline{A_{if}} = A_i + B_i(D_f K_i + D_f^- H_i).$$

则 $\forall x_0 \in \bigcap_{i=1}^{N} \Omega(P_i)$, 闭环系统 (2) 渐近稳定.

证明 假定 $x_k \in \bigcap_{i=1}^{N} \Omega(P_i)$, 由式 (9) 知 $x_k \in \phi(H_i)$, 由引理 3 得

$$\sigma(K_i x_k) = \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f [D_f K_i x_k + D_f^- H_i x_k].$$

从而闭环系统为

$$x_{k+1} = A_i x_k + B_i \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f (D_f K_i + D_f^- H_i)x_k + \sum_{t=1}^{m} J_t(r_k)w_t(k)x_k,$$

即

$$x_{k+1} = \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f \overline{A_{if}} x_k + \sum_{t=1}^{m} J_t(r_k)w_t(k)x_k.$$

取二次型 Lyapunov 函数 $V_k(x_k, r_k) = x_k^{\mathrm{T}} P(r_k) x_k$, 则有

$$\Delta V_k(x_k, r_k) = E\{V_{k+1}(x_{k+1}, r_{r+1}) \mid x_k, r_k = i\} - V_k(x_k, r_k = i) =$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} \Big[\sum_{f=1}^{2^m} \theta_f \overline{A_{if}} x_k + \sum_{t=1}^{m} J_t(r_k)w_t(k)x_k\Big]^{\mathrm{T}} \times$$

$$P_j\Big[\sum_{f=1}^{2^m}\theta_f\overline{A}_{if}x_k+\sum_{t=1}^{m}J_t(r_k)w_t(k)x_k\Big]-x_k^{\mathrm T}P_ix_k.$$

由引理 1 知

$$\Delta V_k(x_k,r_k)\le x_k^{\mathrm T}\sum_{f=1}^{2^m}\theta_f\Big(\overline{A}_{if}^{\mathrm T}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}P_j\overline{A}_{if}+\sum_{k=1}^{m}J_{ki}^{\mathrm T}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}P_jJ_{ki}-P_i\Big)x_k.$$

不难证明,如果式(8)成立,则 $\Delta V_k(x_k,r_k)<0$. 类似于文献[6]中定理 1 的证明,可知系统满足条件(3). □

在定理 1 的基础上给出状态反馈控制器增益求解方法,即有如下定理:

定理 2　如果存在一组正定对称矩阵 $X_i\in R^{n\times n}$, $Y_i\in R^{m\times n}$, $Z_i\in R^{m\times n}$,满足

$$\begin{bmatrix}-X_i & \Psi_{12}\\ \Psi_{12}^{\mathrm T} & \Psi_{22}\end{bmatrix}<0,\qquad(10)$$

$$\begin{bmatrix}1 & z_{it}\\ z_{it}^{\mathrm T} & X_i\end{bmatrix}>0.\qquad(11)$$

其中: z_{it} 表示 Z_i 的第 t 行,且

$$\Psi_{12}=[U_i^{\mathrm T}\quad W_{1i}^{\mathrm T}\quad W_{2i}^{\mathrm T}\quad\cdots\quad W_{mi}^{\mathrm T}],$$

$$\Psi_{22}=-\mathrm{diag}\{\Phi_i\quad\Phi_i\quad\cdots\quad\Phi_i\}.$$

式中

$$U_i^{\mathrm T}=[\sqrt{p_{i1}}(A_iX_i+B_iD_fY_i+B_iD_f^-Z_i)^{\mathrm T},\cdots,\sqrt{p_{iN}}(A_iX_i+B_iD_fY_i+B_iD_f^-Z_i)^{\mathrm T}],$$

$$W_{ti}^{\mathrm T}=[\sqrt{p_{i1}}X_iJ_{ti}^{\mathrm T},\cdots,\sqrt{P_{iN}}X_iJ_{ti}^{\mathrm T}],$$

$$\Phi_i=\mathrm{diag}\{X_1,X_2,\cdots,X_N\}.$$

则 $\forall x_0\in\bigcap_{i=1}^{N}\Omega(P_i)$,具有饱和执行器的闭环系统(2)渐近稳定,且状态反馈控制器增益为 $K_i=Y_iX_i^{-1}$.

证明　对定理 1 中式(8)进行 Schur 补,并作变量替换 $X_i=P_i^{-1}$, $Y_i=K_iX_i$, $Z_i=H_iX_i$,立即可得式(10). 另一方面,保证式(9)的一个充分条件为 $h_{it}P_i^{-1}h_{it}^{\mathrm T}<1$,即 $1-h_{it}X_iX_i^{-1}X_ih_{it}^{\mathrm T}>0$. 由 Schur 补并考虑到 $z_{it}=h_{it}X_i$,可得式(11)成立. □

注 3　如果系统(1)中的随机噪声 $\sum_{t=1}^{m}J_t(r_k)w_t(k)x_k=0$,则系统(1)退化为一般的带有饱和执行器 Markov 跳变系统. 此时将定理 2 中的 $J_{ti}(t\in[1,m])$ 置为零,可得到一般的带有饱和执行器 Markov 跳变系统的状态反馈控制器的求解方法.

3.2　基于饱和关联 Lyapunov 函数方法

定理 3　对于一组给定的状态反馈控制矩阵 K_i,如果存在一组适当维数的矩阵 H_i 和正定阵 P_{if},满足

$$\begin{bmatrix}P_{if}-\sum_{t=1}^{m}J_{ti}^{\mathrm T}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}P_{jq}J_{ti} & \overline{A}_{if}^{\mathrm T}R^{\mathrm T}\\ R\overline{A}_{if} & R+R^{\mathrm T}-\sum_{j=1}^{N}p_{ij}P_{jq}\end{bmatrix}>0,\qquad(12)$$

$$\Omega(P_{if})\subset\Phi(H_i),\ q=1,2,\cdots,2^m.\qquad(13)$$

则 $\forall x_0\in\bigcap_{i=1}^{N}\bigcap_{f=1}^{2^m}\Omega(P_{if})$,闭环系统(2)渐近稳定.

证明　假定 $x_k\in\bigcap_{i=1}^{N}\bigcap_{f=1}^{2^m}\Omega(P_{if})$,由式(13)知 $x_k\in\Phi(H_i)$. 记 $\overline{A}_{if}=\sum_{f=1}^{2^m}\theta_f(k)\overline{A}_{if}$,则闭环系统为

$$x_{k+1}=\overline{A}_{if}x_k+\sum_{t=1}^{m}J_t(r_k)w_t(k)x_k.$$

取饱和关联的 Lyapunov 函数

$$V_k(x_k,r_k,\theta(x_k))=x_k^{\mathrm T}P(r_k,\theta(x_k))x_k=x_k^{\mathrm T}\sum_{f=1}^{2^m}\theta_f(x_k)P_{if}x_k,$$

其中 $\theta(x_k)=[\theta_1(x_k),\theta_2(x_k),\cdots,\theta_{2^m}(x_k)]$ 是状态 x_k 的函数. 为了简化记号,用 $\theta(k)$ 和 $\theta_f(k)$ 分别表示 $\theta(x_k)$ 和 $\theta_f(x_k)$,参数 $\theta(k)$ 反映了执行器饱和的程度[7]. 则有

$$\begin{aligned}&\Delta V_k(x_k,r_k,\theta(k))=\\&E\{V_{k+1}(x_{k+1},r_{k+1},\theta(k+1))\mid x_k,r_k=i\}-\\&V_k(x_k,r_k=i,\theta(k))=\\&E\Big(\Big[\overline{A}_{if}x_k+\sum_{t=1}^{m}J_t(r_k)w_t(k)x_k\Big]^{\mathrm T}\times\\&P(r_{k+1},\theta(k+1))\Big[\overline{A}_{if}x_k+\\&\sum_{t=1}^{m}J_t(r_k)w_t(k)x_k\Big]-x_k^{\mathrm T}\sum_{f=1}^{2^m}\theta_f(k)P_{if}x_k=\\&x_k^{\mathrm T}\overline{A}_{if}^{\mathrm T}\sum_{q=1}^{2^m}\sum_{j=1}^{N}\theta_q(k+1)p_{ij}P_{jq}\overline{A}_{if}x_k+\\&x_k^{\mathrm T}\sum_{t=1}^{m}J_t^{\mathrm T}(r_k)\sum_{q=1}^{2^m}\sum_{j=1}^{N}\theta_q(k+1)p_{ij}P_{jq}J_t(r_k)x_k-\\&x_k^{\mathrm T}\sum_{f=1}^{2^m}\theta_f(k)P_{if}x_k.\end{aligned}$$

记

$$\overline{P}_j(\theta(k+1))=\sum_{q=1}^{2^m}\sum_{j=1}^{N}\theta_q(k+1)p_{ij}P_{jq},$$

显然,保证 $\Delta V_k(x_k,r_k,\theta(k))<0$ 成立的充分条件为

$$\overline{A}_{if}^{\mathrm T}\overline{P}_j(\theta(k+1))\overline{A}_{if}+\sum_{t=1}^{m}J_t^{\mathrm T}(r_k)\overline{P}_j(\theta(k+1))J_t(r_k)-P(r_k,\theta(k))<0.\qquad(14)$$

式(14)等价于

$$\begin{bmatrix} \# & \overline{A}_{if}^{\mathrm{T}} R \\ R\overline{A}_{if} & R\overline{P}_j^{-1}(\theta(k+1))R^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} > 0. \qquad (15)$$

其中

$$\# = P(r_k, \theta(k)) - \sum_{t=1}^{m} J_t^{\mathrm{T}}(r_k)\overline{P}_j(\theta(k+1))J_t(r_k),$$

R 是适当维数的正定对称阵. 由引理 2 知,如果下式满足:

$$\begin{bmatrix} \# & \overline{A}_{if}^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} \\ R\overline{A}_{if} & R + R^{\mathrm{T}} - \overline{P}_j(\theta(k+1)) \end{bmatrix} > 0, \qquad (16)$$

则可保证式(15) 成立. 将

$$\overline{A}_{if} = \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f(k)\overline{A}_{if},\ P(r_k, \theta(k)) = \sum_{f=1}^{2^m} \theta_f(k) P_{if},$$

$$\overline{P}_j(\theta(k+1)) = \sum_{q=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{N} \theta_q(k+1) p_{ij} P_{jq}$$

代入上式,不难证明,只要式(12) 成立即可保证式(16) 成立. 类似于定理 1,闭环系统对于所有属于 $\bigcap_{i=1}^{N} \bigcap_{f=1}^{2^m} \Omega(P_{if})$ 的初始状态是渐近稳定的.

注 4　饱和关联的 Lyapunov 函数利用了更多的执行器饱和的实时信息. 当 $P_{if} = P_i$, $\forall f \in [1, 2^m]$ 时,饱和关联的 Lyapunov 函数便退化为一般的二次型 Lyapunov 函数.

同理,由定理 3 可给出状态反馈控制器的求解方法,即有如下定理:

定理 4　如果存在一组适当维数的正定对称矩阵 Q 和 Q_{if} 以及矩阵 Y_i 和 Z_i,满足

$$\begin{bmatrix} Q_{if} - \sum_{t=1}^{m} J_{ti}^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_{jq} J_{ti} & * \\ A_i Q + B_i D_f Y_i + B_i D_f^- Z_i & Q^{\mathrm{T}} + Q - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_{iq} \end{bmatrix} > 0, \qquad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & z_{it} \\ z_{it}^{\mathrm{T}} & Q_{if} \end{bmatrix} > 0. \qquad (18)$$

则 $\forall x_0 \in \bigcap_{i=1}^{N} \bigcap_{f=1}^{2^m} \Omega(P_{if})$ 存在状态反馈控制器,使得闭环系统(2) 渐近稳定,且控制器增益为 $K_i = Y_i Q^{-1}$.

证明　对式(12) 两边左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{R^{-1}, R^{-1}\}$,并令 $Q = R^{-1}$, $Y_i = K_i Q$, $Z_i = H_i Q$, $Q_{if} = QP_{if}Q$, $Q_{iq} = QP_{iq}Q$. 假定 J_{ti} 是对角线元素取值相同的对角矩阵,则有 $J_{ti}Q = QJ_{ti}$. 从而式(17) 和(18) 的证明类似于定理 2 中式(11) 的证明. □

以二维系统、两种模态跳变为例进行数值仿真,结果显示两种方法均可获得同样的控制器,使得闭环系统稳定. 然而,两种方法求得的随机稳定域是不同的,后者的稳定域比前者大,即保守性更小. 具体计算结果略.

4　结　　语

本文讨论一类具有 Markov 跳变参数的双线性离散随机系统饱和执行器镇定问题. 分别用一般的二次型 Lyapunov 函数、饱和关联 Lyapunov 函数方法给出了状态反馈控制器的设计方法,并用椭圆不变集给出了相应的稳定域,将状态反馈控制器的求解转化为线性矩阵不等式的可解性问题.

参考文献(References)

[1] Hu T S, Lin Z L, Chen B M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation[J]. Systems Control Letters, 2002, 45(2): 97-112.

[2] Hu T S, Lin Z L, Chen B M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. Automatica, 2002, 38(2): 351-259.

[3] Liu H P, Boukas E K, Sun F, et al. Controller design for Markov jumping systems subject to actuator saturation[J]. Automatica, 2006, 42(3): 459-465.

[4] Wang Z D, Qiao H, Burnham K J. On stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian jumping parameters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(4): 640-646.

[5] Cao Y Y, Lin Z L, Shamash Y. Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation[J]. Systems and Control Letters, 2002, 46(2): 137-151.

[6] Cao Y Y, Lam J. Stochastic stabilizability and H_∞ control for discrete-time jump linear systems with time delay[J]. J of the Franklin Institute, 1999, 336(8): 1263-1281.

[7] Cao Y Y, Lin Z L. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function[J]. Automatica, 2003, 39(7): 1235-1241.