文章编号: 1001-0920(2008)03-0246-05

模态跳变概率可控的Markov跳变线性系统的优化

徐琰恺, 陈 曦
(清华大学 智能与网络化系统研究中心, 北京 100084)

摘 要: 研究模态跳变概率可控的Markov跳变线性二次模型的最优控制问题. 考虑两类模态跳变控制策略:开环模态控制和闭环模态控制,应用策略迭代和性能势的概念,给出了最优的闭环模态控制优于最优的开环模态控制的充分条件,以指导最优控制器的设计. 在已知最优的开环模态控制策略的基础上,应用策略迭代给出了构造闭环模态控制策略的方法,以进一步改善系统的性能.

关键词: Markov跳变系统; 最优控制; 策略迭代
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Optimization of Markov jump linear system with controlled jump probabilities of modes

XU Yan-kai, CHEN Xi
(Center for Intelligent and Networked Systems, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: XU Yan-kai, E-mail: xuyankai99@mails.thu.edu.cn)

Abstract: The optimal control problem of Markov jump linear quadratic model with controlled jump probabilities of modes is investigated. Two kinds of mode control policies, open-loop control policy and close-loop control policy, are considered. By using policy iteration and performance potential concept, a sufficient condition for the optimal close-loop control policy being better than the optimal open-loop control policy is proposed. The condition is helpful for the design of an optimal controller. Furthermore, based on the optimal open-loop control policy, by using policy iteration, an efficient algorithm is proposed to construct a close-loop control policy, and the performence of the system is further improved.

Key words: Markov jump system; Optimal control; Policy iteration

1 引 言

近年来, 切换系统理论成为系统理论研究的热点之一[1]. Markov跳变线性系统(MJLS)是研究较为成熟的一类切换系统,它在柔性制造系统、电力系统、经济系统、库存控制等工作模态跳变的实际系统中得到了广泛的应用[2,3]. MJLS的研究成果很丰富[4-6],近年来国内学术界也取得了很多成果[7-10].

本文考虑离散时间跳变线性二次高斯(JLQG)模型的优化问题. 标准Markov跳变系统的模态跳变依赖于一个Markov链,该Markov链的转移概率是给定的. 在实际系统中,工作模态的跳变虽然是随机的,但其跳变概率往往是可控的(或可在有限集合中选取). 例如机器从正常模态到故障模态的跳变,故障概率依赖于日常检修的力度;网络化控制系统中控制信号的接收和丢失两种模态的切换,依赖于通信信号的强度. 有关这类模态跳变概率可控问题的研究较少[11-13],且只针对特殊问题.

本文讨论两类模态跳变概率的控制策略,分别称作开环模态控制和闭环模态控制,分析了它们与标准的JLQG的关系. 一般而言,求解最优的开环模态控制是较小空间的搜索问题,较为容易求解,而寻找最优的闭环模态控制则很困难. 本文应用策略迭代和性能势的概念,给出了最优的闭环模态控制优于最优的开环模态控制的充分条件. 基于这一条件容易构造出闭环模态控制策略,其性能优于最优的开环模态控制策略.

收稿日期: 2006-12-20; **修回日期**: 2007-04-20.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574064).
作者简介: 徐琰恺(1981—),男,江苏常州人,博士生,从事混杂系统、Markov决策过程的研究; 陈曦(1965—),女,成都人,副研究员,从事随机最优控制、传感器网络等研究.

2　问题描述

Markov 跳变系统是一类具有两种动态的混杂系统:一种称为模态,由有限离散状态的 Markov 链描述;另一种称为状态,由每一模态下的状态空间方程描述. 考虑如下离散时间线性系统:

$$x_{k+1} = A(\theta_k)x_k + B(\theta_k)u_k + \sigma(\theta_k)w_k. \tag{1}$$

其中: k 为离散时刻, $x_k \in R^n$ 为状态, $\theta_k \in \mathbf{S} = \{1, 2, \cdots, S\}$ 为模态, $u_k \in R^m$ 为控制变量, w_k 为零均值、协方差矩阵为单位阵的独立同分布随机变量; $A(\theta_k)$, $B(\theta_k)$, $\sigma(\theta_k)$ 是依赖于模态的合适维数的矩阵. 模态 θ_k 符合 Markov 链, 其转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in\mathbf{S}}$. 假设该 Markov 链是遍历的, 稳态概率 $\pi = [\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_S]$. 待优化的性能指标为

$$J(x_0, \theta_0) = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}E\Big\{\sum_{k=0}^{K-1}[f^u(\theta_k, x_k)] \mid x_0, \theta_0\Big\}. \tag{2}$$

其中代价函数

$$f^u(\theta_k, x_k) = x_k^{\mathrm{T}}M(\theta_k)x_k + u_k^{\mathrm{T}}N(\theta_k)u_k.$$

假设系统(1) 是随机可镇定的, 对于稳定系统, 性能指标(2) 存在且与初值无关[5]. 为表述方便, 当 $\theta_k = i$ 时, 矩阵 $A(\theta_k)$, $B(\theta_k)$, $\sigma(\theta_k)$, $M(\theta_k)$, $N(\theta_k)$ 简记为 A_i, B_i, σ_i, M_i, N_i. 令 $a_i = \sigma_i\sigma_i^{\mathrm{T}}$, 假设矩阵 M_i 和 N_i 是半正定矩阵.

如果从模态 i 跳变到其他模态的转移概率 $\{p_{ij}, \forall j \in \mathbf{S}\}$ 并非事先给定, 而是可从一个有限集合 Y_i 中任意选取的, 则称模态跳变概率 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in\mathbf{S}}$ 可控. 本文研究模态跳变概率可控的 JLQG 的优化问题. 这时的容许控制策略 $\mathbf{L}$ 是反馈控制律 u 和模态跳变控制策略的组合, 记为 $\mathbf{L} = \{u, \mathbf{P}\}$.

考虑两类跳变控制策略: 第一类策略中跳变概率与当前的系统状态 x 无关, 即对于任何 x, 跳变概率取值相同, 这类跳变控制策略称作开环模态控制; 第二类策略中跳变概率与当前系统状态相关, 对于不同的 x, 跳变概率也不同, 可称作闭环模态控制, 相应的转移概率记为 $p_{ij}(x)$.

考虑如下优化问题:

问题 1　寻找状态反馈控制律 $u(i, x)$ 和闭环模态控制 $p_{ij}(x)$, 使得性能(2) 最小. 记问题 1 的容许控制策略为 $\mathbf{L}_1 = \{u(i, x), p_{ij}(x)\}$, 其中最优的控制策略记为 $\mathbf{L}_1^*$.

问题 2　寻找状态反馈控制律 $u(i, x)$ 和开环模态控制 p_{ij}, 使得性能(2) 最小. 记问题 2 的容许控制策略为 $\mathbf{L}_2 = \{u(i, x), p_{ij}\}$, 其中最优的控制策略记为 $\mathbf{L}_2^*$.

问题 3　给定模态转移概率矩阵 $\mathbf{P}$, 寻找状态反馈控制律 $u(i, x)$, 使得性能(2) 最小. 记问题 3 的容许控制策略为 $\mathbf{L}_3(\mathbf{P}) = \{u(i, x)\}$, 其中最优的控制策略记为 $\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P})$.

问题 3 是标准的 JLQG 问题, 它的最优解由如下引理给出:

引理 1[5]　给定转移概率矩阵 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j\in\mathbf{S}}$, 则问题 3 的最优反馈控制律为

$$u^*(i, x) = -L_i x,$$

$$L_i = [N_i + B_i^{\mathrm{T}}F_iB_i]^{-1}B_i^{\mathrm{T}}F_iA_i.$$

其中 $F_i = \sum_{j\in\mathbf{S}} p_{ij}K_j$, K_i 是代数耦合 Riccati 方程的解, 即

$$K_i = A_i^{\mathrm{T}}F_iA_i + M_i - A_i^{\mathrm{T}}F_iB_iL_i.$$

此时系统最优性能为

$$J^{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P})} = \sum_{i\in\mathbf{S}}\pi_i \mathrm{tr}(a_iF_i).$$

对于问题 3, 采用与文献[13]类似的方法, 应用文献[5]的结果容易证明, 最优反馈控制律 $u^*(i, x)$ 对应的值函数(也称性能势[14]) 为

$$g^{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P})}(i, x) = x^{\mathrm{T}}K_ix + q_i. \tag{3}$$

q_i 是如下方程的解:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{q} + J^{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P})}\mathbf{e} - \tilde{\mathbf{f}} = 0. \tag{4}$$

其中: $\mathbf{I}$ 是单位阵, $\mathbf{q} = [q_1, \cdots, q_S]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{e} = [1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\mathbf{f}} = [\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_S]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{f}_i = \mathrm{tr}(a_iF_i)$. 方程(4) 的解不唯一, 如果 $q_i(\forall i \in \mathbf{S})$ 是它的解, 则对于任意常数 c, $q_i + c(\forall i \in \mathbf{S})$ 也是方程(4) 的解. 文献[14]给出了如下形式的一个特解:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{e}\pi)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}. \tag{5}$$

如果 p_{ij} 是可控的, 则 $\{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P}), p_{ij}\}$ 是问题 2 的一个容许控制策略. 令 $\mathbf{P}^* = \arg\min_{\mathbf{P}}\{J^{\{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P}), p_{ij}\}}\}$, 则 $\mathbf{L}_2^* = \{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P}^*), p_{ij}^*\}$ 是问题 2 的最优容许控制策略, 且 $\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P}^*)$ 的性能与 $\mathbf{L}_2^*$ 的性能相同, 即 $J^{\mathbf{L}_2^*} = J^{\mathbf{L}_3^*(\mathbf{P}^*)}$. 通过求解问题 3, 在 $\{Y_i, \forall i \in \mathbf{S}\}$ 空间上搜索最优的开环模态控制, 可求得问题 2 的最优策略 $\mathbf{L}_2^*$. 也可采用文献[13]提出的梯度下降算法进行寻优.

问题 1 的求解相对较为困难. 问题 2 的容许控制策略可看作问题 1 的一类特殊的容许控制策略, 即问题 2 的策略空间是问题 1 的策略空间的子集. 因此问题 1 的最优容许控制策略 $\mathbf{L}_1^*$ 的性能不会低于问题 2 的最优容许控制策略 $\mathbf{L}_2^*$ 的性能.

动态系统可用 Markov 系统建模. 定义转移函数 $P_i(B \mid x)$ 为从模态 i 和状态 x 转移到 Borel 集合 B 的概率, $P(j, B \mid i, x)$ 为从模态 i 和状态 x 转移到模态 j 和 Borel 集合 B 的概率, 则有 $P(j, B \mid i, x) = p_{ij}P_i(B \mid x)$. 对于任意代价函数 $f(i, x)$, 定义相应的转移算子

$$\mathbf{P}f(i,x) = \sum_{j\in S} p_{ij} \int_{y\in R^n} P_i \mathrm{d}(y\mid x) f(j,y). \quad (6)$$

其中 $\mathbf{P}f(i,x)$ 表示当前模态为 i 和状态为 x 时,经过一步转移后下一时刻代价函数的期望值. 记 $\mathbf{L}$ 为控制策略,它可以是问题 1,2 或 3 中的任意一类容许控制策略. 在该策略下的转移函数、代价函数和稳态性能分别记为 $P^{\mathbf{L}}$, $f^{\mathbf{L}}$ 和 $J^{\mathbf{L}}$. 文献[15]给出了策略迭代公式,用于进行性能优化.

引理 2[15] 策略 $\mathbf{L}'$ 优于策略 $\mathbf{L}$,当且仅当:

1) 任取 $i\in\mathbf{S}$, $x\in R^n$,有

$$\mathbf{P}^{\mathbf{L}'}g^{\mathbf{L}}(i,x) + f^{\mathbf{L}'}(i,x) \le \mathbf{P}^{\mathbf{L}}g^{\mathbf{L}}(i,x) + f^{\mathbf{L}}(i,x).$$

2) 存在 $l\in\mathbf{S}$ 和测度不为零的集合 $X\subset R^n$,使得任取 $x\in X$,有

$$\mathbf{P}^{\mathbf{L}'}g^{\mathbf{L}}(l,x) + f^{\mathbf{L}'}(l,x) < \mathbf{P}^{\mathbf{L}}g^{\mathbf{L}}(l,x) + f^{\mathbf{L}}(l,x).$$

其中 $g^{\mathbf{L}}$ 是策略 $\mathbf{L}$ 对应的性能势,它满足 Poisson 方程 $J^{\mathbf{L}} + g^{\mathbf{L}} = f^{\mathbf{L}} + \mathbf{P}^{\mathbf{L}}g^{\mathbf{L}}$.

3 两类模态控制策略的分析

本节讨论问题 1 的最优容许控制策略优于问题 2 的最优容许控制策略的条件.

引理 3 如果 $\exists l\in\mathbf{S}$, $X\subset R^n$, $\overline{p}_{lj}\in Y_l$,使得对于 l 和 $x\in X$,有

$$\sum_{j\in S}\overline{p}_{lj}\int_{y\in R^n} P_l^{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*)}(\mathrm{d}y\mid x)\, g^{\mathbf{L}_2^*}(j,y) < \sum_{j\in S}p_{lj}^*\int_{y\in R^n} P_l^{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*)}(\mathrm{d}y\mid x)\, g^{\mathbf{L}_2^*}(j,y), \quad (7)$$

则 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\mathbf{L}_2^*$.

证明 $\mathbf{L}_2^*$ 可看作问题 1 的一个容许控制策略 $\widetilde{\mathbf{L}}_1 = \{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*), \widetilde{p}_{ij}(x) = p_{ij}^*, \forall x\}$, $\mathbf{L}_2^*$ 与 $\widetilde{\mathbf{L}}_1$ 的性能相同. 构造问题 1 的容许控制策略 $\mathbf{L}_1' = \{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*), p_{ij}'(x)\}$,其中

$$p_{ij}'(x) = \begin{cases} \overline{p}_{ij}, & i = l, x\in X; \\ p_{ij}^*, & \text{其他}. \end{cases} \quad (8)$$

注意到代价函数 $f^u(i,x)$ 仅与反馈控制律有关,与模态跳变控制策略无关,于是有

$$\mathbf{P}^{\mathbf{L}_1'}g^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x) + f^{\mathbf{L}_1'}(i,x) = \sum_{j\in S}p_{ij}'(x)\int_{y\in R^n}P_i^{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*)}(\mathrm{d}y\mid x)\,g^{\mathbf{L}_2^*}(j,y) + f^{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*)}(i,x),$$

$$\mathbf{P}^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}g^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x) + f^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x) = \sum_{j\in S}p_{ij}^*\int_{y\in R^n}P_i^{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*)}(\mathrm{d}y\mid x)\,g^{\mathbf{L}_2^*}(j,y) + f^{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*)}(i,x).$$

根据式(7)和(8),对于 l 和 $x\in X$,有

$$\mathbf{P}^{\mathbf{L}_1'}g^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(l,x) + f^{\mathbf{L}_1'}(l,x) < \mathbf{P}^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}g^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(l,x) + f^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x);$$

对于其他模态 i 和状态 x,有

$$\mathbf{P}^{\mathbf{L}_1'}g^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x) + f^{\mathbf{L}_1'}(i,x) = \mathbf{P}^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}g^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x) + f^{\widetilde{\mathbf{L}}_1}(i,x).$$

由引理 2 知 $\mathbf{L}_1'$ 优于 $\widetilde{\mathbf{L}}_1$,同时 $\mathbf{L}_1^*$ 不差于 $\mathbf{L}_1'$,所以 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\widetilde{\mathbf{L}}_1$. 因为 $\mathbf{L}_2^* = \widetilde{\mathbf{L}}_1$,所以 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\mathbf{L}_2^*$. □

引理 4 如果 $\exists l\in\mathbf{S}$, $X\subset R^n$, $\overline{p}_{lj}\in Y_l$,使得对于 l 和 $x\in X$,有

$$\sum_{j\in S}\overline{p}_{lj}[x^{\mathrm{T}}(A_l - B_lL_l)^{\mathrm{T}}K_j(A_l - B_lL_l)x + \mathrm{tr}(a_lK_j) + q_j] < \sum_{j\in S}p_{lj}^*[x^{\mathrm{T}}(A_l - B_lL_l)^{\mathrm{T}}K_j(A_l - B_lL_l)x + \mathrm{tr}(a_lK_j) + q_j], \quad (9)$$

则 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\mathbf{L}_2^*$. 其中 $K_i, q_i, L_i(\forall i\in\mathbf{S})$ 是给定 p^* 条件下问题 3 的解.

证明 将式(3)代入式(7),由引理 3 和引理 4 易证. □

记

$$\boldsymbol{\Pi} \triangleq (A_l - B_lL_l)^{\mathrm{T}}\sum_{j\in S}K_j(\overline{p}_{lj} - p_{lj}^*)(A_l - B_lL_l),$$

$$\boldsymbol{\Gamma} \triangleq \sum_{j\in S}(\mathrm{tr}(a_lK_j) + q_j)(p_{lj}^* - \overline{p}_{lj}),$$

则式(9)等价于

$$x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}x < \boldsymbol{\Gamma}. \quad (10)$$

由上述引理,可得到最优的闭环模态控制优于最优的开环模态控制的充分条件如下:

定理 1 如果 $\exists l\in\mathbf{S}$, $X\subset R^n$, $\overline{p}_{lj}\in Y_l$,并且满足下面 3 个条件之一:

1) $\boldsymbol{\Pi}$ 是不定矩阵;

2) $\boldsymbol{\Pi}$ 是非零半正定矩阵,且 $\boldsymbol{\Gamma} > 0$;

3) $\boldsymbol{\Pi}$ 是非零半负定矩阵,且 $\boldsymbol{\Gamma} < 0$.

则 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\mathbf{L}_2^*$. $K_i, q_i, L_i(\forall i\in\mathbf{S})$ 是给定 p^* 条件下问题 3 的解.

证明 首先说明式(10)不可能恒成立. 如果它恒成立,从引理 2 可得出 $\overline{p}_{lj}$ 优于 p_{lj}^*,这与 p_{lj}^* 是问题 2 的最优容许控制策略相对应的转移概率矩阵矛盾,因此式(10)的解不可能是 R^n 空间. 引理 4 的条件等价于:对于问题 2 的最优容许控制策略 $\mathbf{L}_2^*$, $\exists l\in\mathbf{S}$, $\overline{p}_{lj}\in Y_l$,使得式(10)的解存在.

矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 有 4 种情况:非零半正定,非零半负定,零和不定. 针对这 4 种情况分别加以讨论.

当条件 1) 成立时,即 $\boldsymbol{\Pi}$ 是不定的,则无论 $\boldsymbol{\Gamma}$ 取何值,式(10)的解都存在.

当条件 2) 成立时,即 $\boldsymbol{\Pi}$ 是非零半正定的,则有 $0 \le x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}x < +\infty$. 式(10)既不恒成立但又有解,这等价于 $\boldsymbol{\Gamma} > 0$.

当条件 3) 成立时,即 $\boldsymbol{\Pi}$ 是非零半负定的,则有 $-\infty < x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}x \le 0$. 如果 $\boldsymbol{\Gamma} \ge 0$,则由引理 2 知 $\overline{p}_{lj}$ 优

于 p_{lj}^*,这与前提条件矛盾,所以 $\Gamma < 0$.

如果 $\Pi = 0$,则当 $\Gamma > 0$ 时,式(10)的解为 R^n;当 $\Gamma \geq 0$ 时,式(10)无解.所以 Π 不可能为零. □

定理 1 给出了最优的闭环模态控制优于最优的开环模态控制的充分条件.当这一条件满足时,闭环模态控制比开环模态控制好.这对于控制器的设计具有指导意义.对于模态跳变概率可控的优化问题,寻找最优的开环模态控制是一个较小空间的搜索问题,相对较为简单.寻找闭环模态控制相当困难,因为当模态跳变依赖于系统状态时,状态反馈控制律无法用求解标准 JLQG 问题的方法求出,仅有的方法是计算量较大的动态规划或基于离散化和仿真的策略迭代方法[15].如果找到了最优的开环模态控制策略,便可采用定理 1 给出的充分条件,判断是否存在更好的闭环模态控制策略,从而对模态跳变概率作进一步的优化.

针对两模态一维的系统,定理 1 的条件可以得到简化.

推论 1　$m = n = 1$,模态集合 $\mathbf{S} = \{1,2\}$.如果 $\exists\, l \in \mathbf{S}, \overline{p}_{lj} \in Y_l, \overline{p}_{lj} \neq p_{lj}^*$,使得

$$\frac{(\sigma_l^2 K_2 + q_2) - (\sigma_l^2 K_1 + q_1)}{(A_l - B_l L_l)^2 (K_1 - K_2)} > 0, \tag{11}$$

则 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\mathbf{L}_2^*$.其中 $K_i, q_i, L_i\ (\forall i \in \mathbf{S})$ 是给定 p^* 条件下问题 3 的解.

证明　在此情况下,有

$$\Pi = (A_l - B_l L_l)^2 (\overline{p}_{l1} - p_{l1}^*)(K_1 - K_2),$$

$$\Gamma = (p_{l1}^* - \overline{p}_{l1})[(\sigma_l^2 K_1 + q_1) - (\sigma_l^2 K_2 + q_2)].$$

根据定理 1,易证推论 1 成立. □

此时可进一步求出区间 X.求解方程 $\Pi x^2 = \Gamma$,可得到

$$\begin{cases} x_+ = \sqrt{\dfrac{(\sigma_l^2 K_2 + q_2) - (\sigma_l^2 K_1 + q_1)}{(A_l - B_l L_l)^2 (K_1 - K_2)}}, \\ x_- = -\sqrt{\dfrac{(\sigma_l^2 K_2 + q_2) - (\sigma_l^2 K_1 + q_1)}{(A_l - B_l L_l)^2 (K_1 - K_2)}}. \end{cases} \tag{12}$$

当式(11)成立时,x_+ 和 x_- 存在.当 $(\overline{p}_{l1} - p_{l1}^*)(K_1 - K_2) > 0$ 时,区间 $X = [x_-, x_+]$;当 $(\overline{p}_{l1} - p_{l1}^*)(K_1 - K_2) < 0$ 时,区间 $X = (-\infty, x_-] \cup [x_+, +\infty)$.

如果定理 1 的条件成立,则需要寻找问题 1 的容许控制策略来优化系统性能.寻找 $\mathbf{L}_1^*$ 是相当困难的.作为折中,期望寻找一个满意的问题 1 的容许控制策略,使它比 $\mathbf{L}_2^*$ 有较大的改进.以上引理和定理的证明都是构造性的,由此容易构造一个闭环模态控制.将原有的反馈控制律与该闭环模态控制相结合,可得到一个新策略,这个新策略比 $\mathbf{L}_2^*$ 及相应的开环模态控制 p^* 更好.

算法 1　构造问题 1 的容许控制策略,其步骤如下:

1) 求解得到问题 2 的最优容许控制策略 $\mathbf{L}_2^*$.

2) 检验定理 1 的条件,当它满足时,可能存在不止一个模态 $l \in \mathbf{S}$,Y_l 中也可能存在多个满足条件的 $\overline{p}_{lj}$.此时任选一组满足条件的模态 $l \in \mathbf{S}$,以及相应的 $X \subset R^n$,$\overline{p}_{lj} \in Y_l$.

3) 对 $\mathbf{L}_2^*$ 作一步策略迭代,用式(8)构造出 $\mathbf{L}_1' = \{\mathbf{L}_3^*(\mathrm{p}^*), p_{ij}'(x)\}$.

4　数值算例

设有两模态一维的系统,$\mathbf{S} = \{1,2\}$.

$A_1 = 0.5,\ B_1 = 2,\ M_1 = 1,\ N_1 = 10,\ \sigma_1 = 2,$

$A_2 = 1,\ B_2 = 1,\ M_2 = 2,\ N_2 = 10,\ \sigma_2 = 1,$

$Y_1 = \{[0.8\ \ 0.2], [0.2\ \ 0.8]\},$

$Y_2 = \{[0.5\ \ 0.5]\}.$

求解最优的开环模态控制,得到

$$\mathrm{p}^* = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

此时 $K_1 = 1.236,\ K_2 = 2.614,\ q_1 = 6.549,\ q_2 = 0.664,\ L_1 = 0.094,\ L_2 = 0.161$.当 $l = 1$ 时,有

$$\frac{(\sigma_1^2 K_2 + q_2) - (\sigma_1^2 K_1 + q_1)}{(A_1 - B_1 L_1)^2 (K_1 - K_2)} = 2.772 > 0,$$

因此问题 1 的最优容许控制策略 $\mathbf{L}_1^*$ 优于 $\mathbf{L}_2^*$.由式(12)得到 $X = [-1.665, 1.665]$.应用算法 1,可构造性能更好的闭环模态控制.当 $x \in X$ 时,有

$$\mathrm{p}'(x) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix};$$

否则,$\mathrm{p}'(x) = \mathrm{p}^*$.通过仿真可知,在 $\mathbf{L}_2^*$ 下系统性能为 4.87;由算法 1 构造的 $\mathbf{L}_1'$ 下,系统性能为 4.06,比 $\mathbf{L}_2^*$ 的性能优化了 17%.

5　结　　论

本文考虑两类模态跳变控制策略,给出了最优的闭环模态控制优于最优的开环模态控制的充分条件.当优化模态跳变概率为可控的 JLQG 系统时,首先寻找最优的状态反馈控制和最优的开环模态控制,然后验证本文给出的充分条件.如果满足,则继续寻找更优的闭环模态控制;否则,开环控制已经足够好,不必继续进行大量的计算.如果最优的闭环模态控制难以得到,则应用算法 1 构造一个闭环模态控制,这样可显著地改善系统的性能.最后通过算例验证了该算法的有效性.

参考文献(References)

[1] 程代展,郭宇骞.切换系统进展[J].控制理论与应用,2005,22(6):954-960.
(Cheng Dai-zhan, Guo Yu-qian. Advances on switched systems [J]. Control Theory & Applications, 2005, 22

(6) : 954-960.)

[2] Abou Kandil H, Smet O D, Freiling G, et al. Flow control in a failure-prone multi-machine manufacturing system[C]. Proc of INRIA/IEEE Symp on Emerging Technologies & Factory Automation. Paris, 1995, 2: 575-583.

[3] Boukas E K, Shi P, Andijani A. Robust inventory-production control problem with stochastic demand [J]. Optimal Control Applications Methods, 1999, 20(11): 1-20.

[4] Ji Y, Chizeck H J. Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(7): 777-788.

[5] Costa O, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. London: Springer-Verlag, 2005.

[6] Xue F, Guo L. Necessary and sufficient conditions for adaptive stabilizability of jump linear systems [J]. Communications in Information and Systems, 2001, 1 (2): 205-224.

[7] **张利军,李春文,程代展. 参数不确定马尔可夫跳变系统的鲁棒适应控制**[J]. **控制与决策**, 2005, 20(9): 1030-1033.
(Zhang Li-jun, Li Chun-wen, Cheng Dai-zhan. Robust adaptive control of Markov jump systems with parameter uncertainties[J]. Control and Decision, 2005, 20(9): 1030-1033.)

[8] **刘飞. 不确定跳变系统鲁棒 L_2-L_∞滤波**[J]. **控制与决策**, 2005, 20(1): 32-35.
(Liu Fei. Robust L_2-L_∞ filtering for uncertain jump systems[J]. Control and Decision, 2005, 20(1): 32-35.)

[9] **刘飞,张曦煌. L_2 增益约束下跳变系统鲁棒控制**[J]. **控制理论与应用**, 2006, 23(3): 1030-1037.
(Liu Fei, Zhang Xi-huang. Robust control for jump systems with L_2 gain constraints[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(3): 1030-1037.)

[10] **刘飞,苏宏业,褚健. 含参数不确定性的马尔可夫跳变过程鲁棒正实控制**[J]. **自动化学报**, 2003, 29(5): 761-766.
(Liu Fei, Su Hong-ye, Chu Jian. Robust positive real control of Markov jump systems with parametric uncertainties[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29 (5): 761-766.)

[11] Ji Y, Chizeck H J. Optimal quadratic control of jump linear system with separately controlled transition probabilities[J]. Int J of Control, 1989, 49(2): 481-491.

[12] Boukas E K, Liu Z K. Jump linear quadratic regulator with controlled jump rates [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(2): 301-305.

[13] Xu Y K, Chen X, Cao X R. Optimization for controlled jump rates of JLQG problem [C]. Proc of Chinese Control Conf. Guangzhou, 2005: 378-383.

[14] Cao X R. From perturbation analysis to Markov decision processes and reinforcement learning [J]. Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, 2003, 13(1): 9-39.

[15] Hernandez Lerma O, Lasserre J B. Policy iteration for average cost Markov control processes on borel spaces [J]. Acta Applicande Mathematicae, 1997, 47(2): 125-154.

(上接第 245 页)

[32] Wang W, Xu Z, Lu W, et al. Determination of the spread parameter in the Gaussian kernel for classification and regression [J]. Neurocomputing, 2003, 55(3/4): 643-663.

[33] **张恒喜,郭基联,朱家元,等. 小样本多元数据分析方法及应用**[M]. **西安:西北工业大学出版社**, 2002.
(Zhang Heng-xi, Guo Ji-lian, Zhu Jia-yuan, et al. Multivariate data analysis methods and applications with small sample [M]. Xi'an: Northwest Polytechnical University Press, 2002.)

[34] Kowk J. The evidence framework applied to support vector machines[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(5): 1162-1173.

[35] Van Gestel T, Suykens J A, Baesaens D, et al. Financial time series prediction using least squares support vector machines within the evidence framework [J]. IEEE Trans on Neural Networks: Special Issue on Neural Networks in Financial Engineering, 2001, 12(4): 809-821.