

文章编号: 1001-0920(2008)04-0425-06

# 基于闭环系统动态特征的自整定 PI 控制器

王 强, 宋文忠, 达飞鹏

(东南大学 自动化研究所, 南京 210096)

**摘 要:** 为了满足时变对象自适应控制的需要, 根据闭环系统主导极点的原理, 提出了能够表示不同类型闭环系统的三阶标准化闭环模型. 利用标准化模型在线辨识闭环系统, 并从中提取 3 个能够表征闭环系统动态性能的特征量; 然后利用神经网络建立闭环系统特征与对象参数变化率之间的关系. 通过将控制器与对象的参数集结, 根据对象参数变化率来整定 PI 控制器. 在不同条件下的仿真说明所提方法的有效性和鲁棒性.

**关键词:** 闭环模型; 主导极点; 参数集结; 神经网络

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Self-tuning PI controller based on dynamic characteristics of closed-loop system

WANG Qiang, SONG Wen-zhong, DA Fei-peng

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: WANG Qiang, E-mail: wangq\_mail@163.com)

**Abstract:** To design adaptive controllers for time-varying processes, a normalized third order closed-loop model which can represent different types of closed-loop systems is developed based on the principle of dominant poles of closed-loop system. Closed-loop system can be identified on-line by using normalized third order closed-loop model, and dynamics of closed-loop system can be described by three characteristic parameters which are extracted from the normalized third order closed-loop model. Then a neural network is utilized to derive the relationship between the characteristic parameters and the varying rate of plant parameters, which can be used to adjust the parameters of PI controller by aggregating the parameters of controller and plant. Several simulations under different conditions show the effectiveness and robustness of the proposed method.

**Key words:** Closed-loop model; Dominant poles; Parameter aggregating; Neural network

### 1 引言

尽管近半个世纪来不断推出各种先进的控制方法, 但 PID 控制器以其结构简单、适应性强和易于现场操作等优点, 仍是迄今为止最常用的控制方法. Desborough<sup>[1]</sup>于 2001 年指出, 有 2/3 的 PID 控制系统性能达不到用户所期望的要求, 而其中很重要的原因就是由于对象的非线性或时变所造成的, 说明了现有的针对时变系统的自适应 PID 整定方法还不能满足实际的要求.

现有的自适应 PID 整定方法主要有两类: 第一类是基于模型的方法, 例如极点配置自校正 PID<sup>[2]</sup>和最小方差自适应 PID<sup>[3]</sup>等, 这种方法主要依赖模型, 而生产过程中由于外界环境变化或干扰的发生, 往往得不到精确的模型; 还有一类就是基于特征或

规则的方法, 如模糊整定<sup>[4]</sup>、模式识别自整定<sup>[5]</sup>等. 基于规则的方法并不需要对象的模型, 而是利用系统特征量如超调、衰减率等来整定控制器<sup>[6]</sup>. 例如 Sbarbaro 等<sup>[5]</sup>以闭环系统的阶跃响应曲线为特征整定控制器. 如果从阶跃响应中仅提取超调、衰减率等特征<sup>[6]</sup>, 只能局限于欠阻尼响应情况, 过阻尼响应情况下这些特征并不明显, 导致特征无法提取, 而且当回路的随机干扰较大或生产过程不允许作较大的阶跃扰动时提取特征也很困难.

针对线性时变系统的需求, 本文提出基于闭环系统特征的 PI 自整定方法. 该方法利用三阶标准化模型在线辨识闭环系统, 利用闭环系统的动态特征识别对象的参数变化率来整定控制器.

### 2 三阶标准化闭环模型

收稿日期: 2006-12-18; 修回日期: 2007-03-08.

作者简介: 王强(1977—), 男, 太原人, 博士生, 从事神经网络和自适应控制的研究; 宋文忠(1936—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事先进控制与综合自动化等研究.

系统结构如图1所示.其中: $\tau$ 是对象的时间常数变化率; $k$ 是对象的增益变化率; $\zeta$ 和 $\omega$ 是所提取的闭环特征; $r$ 是参考输入; $l$ 是负载输入; $y$ 是被控对象输出; $d$ 是噪声.

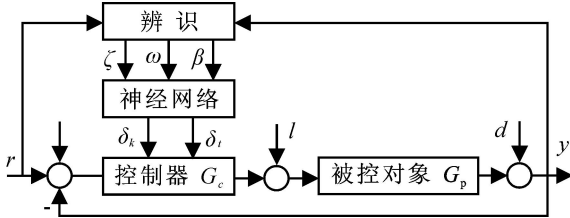


图1 控制系统结构

线性时变对象微分方程为

$$y(t) + nT(t) \frac{dy(t)}{dt} + n(n-1)T^2(t) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \dots = K(t)u(t). \quad (1)$$

其中: $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别为对象的输出和输入信号, $T(t)$ 为对象时变时间常数, $K(t)$ 为对象时变增益, $n$ 为对象阶次.设 $s = d/dt$ 为微分算子,则对象模型可以写为

$$G_p(s) = \frac{K(t)}{(T(t)s + 1)^n}. \quad (2)$$

采用PI控制器

$$G_c(s) = K_p(t) \left( 1 + \frac{1}{T_i(t)s} \right). \quad (3)$$

其中: $K_p(t)$ 为时变比例系数, $T_i(t)$ 为时变积分时间常数.则其闭环传递函数为

$$G_d(s) = \frac{T_i(t)s + 1}{\frac{T_i(t)}{K(t)K_p(t)}s(T(t)s + 1)^n + T_i(t)s + 1}. \quad (4)$$

如果在 $t$ 时刻对象(2)的参数发生了变化,则参数变化率为

$$\begin{aligned} k &= K(t)/K(t-1), \\ \tau &= T(t)/T(t-1), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $k, \tau \in R$ .经典的自适应控制是在闭环情况下直接辨识对象模型,由于输出信号的测量噪声经过反馈环节与输入信号相关,会使得辨识存在较大的偏差,甚至会导致对象的不可辨识性<sup>[7]</sup>.而且对象模型的阶次很难正确估计,且实际的工业对象中激励主要是阶跃信号,很难满足高阶对象辨识的充分激励要求.由于以上问题的存在使得自适应控制很难在工程中得到真正的应用.

为了避免现有的自适应控制的缺点,本文从闭环的角度来研究自适应控制的可行性,因为辨识闭环模型具有以下优点:

1) 辨识闭环模型避免了闭环情况下辨识对象

模型带来的闭环可辨识性问题;

2) 反馈作用使得闭环系统极点分离为主导极点和非主导极点,使闭环系统近似建模成为可能;

3) 实际对象都受到非线性和扰动影响,反馈作用可以减弱扰动和非线性对闭环系统的影响.

现有的PID整定方法基本上都假设模型结构为纯时延模型或高阶惯性模型,这两种模型代表了工业中绝大部分对象的特性,具有很强的通用性,本文称这两种模型为“标准化对象模型”.相对于标准化对象模型,本文提出了“标准化闭环模型”,该模型同样能够辨识不同形式的闭环系统.

文献[8]指出,由于反馈的引入,高阶闭环系统的极点随着开环增益的增加有的会靠近虚轴,有的会远离虚轴,而靠近虚轴的极点就会逐渐成为闭环系统主导极点.闭环主导极点对闭环系统瞬态响应起着决定性的作用,而闭环非主导极点只是对过渡过程的起始阶段有影响.在主导极点的作用下,闭环系统阶跃响应有3类响应形式:欠阻尼、过阻尼和适度阻尼,分别是复极点占主导、实极点占主导、复极点和实极点共同主导下的响应形式.因此闭环系统的辨识模型至少要三阶才可以同时考虑复极点和实极点的作用,并完整地表示闭环系统不同的响应形式.文献[9]中当系统阶跃响应为欠阻尼响应时,闭环系统被简化为二阶加纯时延(SOPDT)模型,因为此时闭环系统的主导极点是复极点,实极点并不占主导作用,可以用二阶模型近似.但是由于没有实极点,SOPDT模型无法表示适度阻尼的情况.而绝大多数的满意控制都是在适度阻尼情况下工作的,因此本文选择三阶模型来近似闭环系统,可得辨识模型 $G_d(s)$ 为如下形式:

$$G_d(s) = \frac{N(s)}{(T_1s^2 + 2\zeta T_1s + 1)(T_2s + 1)}. \quad (6)$$

其中: $N(s)$ 是传递函数分子, $\zeta$ 为阻尼比, $T_1$ 和 $T_2$ 为模型的时间常数.式(6)称作标准化闭环模型.常见的对象如一阶加纯时延(FOPDT),SOPDT对象和高阶惯性对象所组成的闭环系统都是只有3种响应形式:欠阻尼、过阻尼和适度阻尼,而对这3种形式的响应三阶模型都能很好地近似.

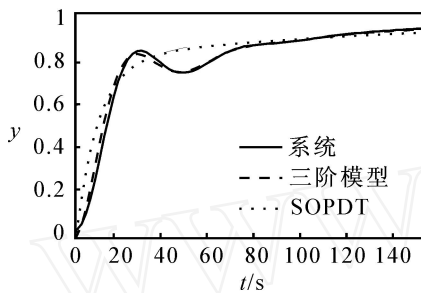
采用递推阻尼最小二乘法<sup>[10]</sup>作为辨识算法.通过辨识不同对象的闭环系统,对比了三阶模型与SOPDT模型辨识的效果.给定一高阶惯性对象为

$$G_p(s) = \frac{5}{(5s + 1)^4}. \quad (7)$$

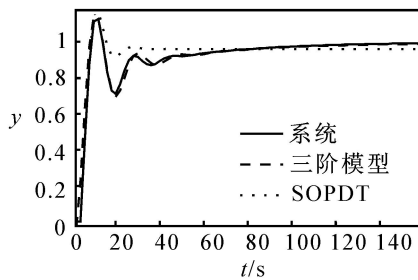
其控制器参数为 $K_p = 0.207$ , $T_i = 36.438$ .再给定一个FOPDT时延对象

$$G_p(s) = \frac{e^{-4s}}{10s + 1}. \quad (8)$$

其控制器参数为  $K_p = 2.475, T_i = 34.6$ . 分别用 SOPDT 模型和三阶模型辨识这两个闭环系统. 如图 2 所示, 只有三阶模型才能表示适度阻尼时的情况, 而 SOPDT 模型无法表示. 因此不管对象是时延对象还是高阶对象, 闭环系统都可以用三阶标准化模型来逼近.



(a) 高阶惯性对象



(b) 时延对象

图 2 SOPDT与三阶模型辨识闭环系统

本文提出根据闭环系统的特征来识别对象参数变化率. 根据式(6), 设  $\alpha = T_2/T_1, \beta = 1/T_1$ , 可得闭环系统的 3 个特征量为  $\{ \alpha, \beta, \gamma \}$ , 表示系统的时间尺度, 而  $\gamma$  则确定了系统的阶跃响应形状. 当  $\alpha$  很大时系统是实极点占主导, 而  $\alpha$  很小时是复极点占主导.

在线辨识得到的是离散模型. 假设式(6)离散化以后有 2 个复极点  $p_{1,2}$  和 1 个实极点  $p_3$ . 根据连续系统与离散系统互相转换的原理<sup>[12]</sup>, 用离散极点求闭环特征量的公式如下:

$$\begin{cases} \alpha = |\log(p_1)| / |\log(p_3)|, \\ \beta = |\log(p_1)| / t_s, \\ \gamma = -\cos(\arg(p_1)). \end{cases} \quad (9)$$

其中  $|\cdot|$  是复数的模,  $\arg(\cdot)$  是复数的辐角,  $t_s$  是采样时间.

### 3 控制器参数的自整定

#### 3.1 参数自整定

假设  $t_0$  为初始时刻, 此时对象为标称对象, 参数为  $K(t_0) = K_0, T(t_0) = T_0$ . 定义积分绝对误差指标为

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)| dt. \quad (10)$$

以衰减率 0.9 和 IAE 最小为最优性能指标, 根据性能指标整定好的控制器参数为  $K_p(t_0) = K_p^*$  和  $T_i(t_0) = T_i^*$ . 根据参数集结的原理<sup>[13]</sup>, 设  $S = T(t_0)s, \bar{K} = K(t_0)K_p(t_0), \bar{T} = T_i(t_0)/T(t_0)$ . 则式(4)变为如下形式:

$$G_d(s) = \frac{\bar{T}S + 1}{\frac{\bar{T}}{K}S(S+1)^n + \bar{T}S + 1}. \quad (11)$$

式(11)将对象的参数与控制器的参数集结起来, 使得闭环系统从式(4)的 5 个参数变为式(11)的 3 个参数, 简化了闭环模型的形式. 且式(11)的控制器参数满足闭环系统性能指标要求, 因此称之为“满意”闭环系统.

如果在  $t$  时刻对象参数发生变化, 即  $K(t) = \kappa K(t-1), T(t) = \tau T(t-1)$ , 则可以调整控制器参数为

$$\begin{cases} K_p(t) = \kappa K_p(t-1), \\ T_i(t) = \tau T_i(t-1). \end{cases} \quad (12)$$

则闭环系统又恢复到“满意”闭环系统.

#### 3.2 样本处理

利用神经网络作为识别工具, 以闭环的特征量作为神经网络的输入, 输出为对象参数变化率, 最后利用参数变化率来整定 PI 参数, 如图 1 所示.  $\kappa, \tau$

$M, M \subset R, M$  为对象参数变化率的允许变化范围, 即对象参数每次变化都应该限制在一定的范围内, 但是对象在运行过程中可以多次改变, 总的变化范围没有限制. 在  $M$  中平均选择  $m$  个  $\kappa$  和  $\tau$ , 得到  $m \times m$  组  $\{ \kappa_i, \tau_j \}_{i,j}$ , 其中  $i, j = 1, 2, \dots, m$ . 任意给定一组对象参数变化率  $\{ \kappa_i, \tau_j \}_{i,j}$ , 根据参数集结的原理可得:

1) 控制器参数不变, 对象参数改变

$$K(t) = \kappa K(t-1), T(t) = \tau T(t-1). \quad (13)$$

得到的闭环系统为

$$G_1(s) = \frac{\bar{T}S + 1}{\frac{\bar{T}}{\kappa K}S(S+1)^n + \bar{T}S + 1}. \quad (14)$$

2) 对象参数不变, 控制器参数改变

$$K_p(t) = \kappa K_p(t-1),$$

$$T_i(t) = T_i(t-1)/\tau. \quad (15)$$

得到的闭环系统为

$$G_2(s) = \frac{\bar{T}S + 1}{\frac{\bar{T}}{\kappa K}S(S+1)^n + \frac{\bar{T}}{\tau}S + 1}. \quad (16)$$

设  $S_1$  和  $S_2$  分别是式(14)和(16)的根, 可得

$$S_1 = S_2. \quad (17)$$

利用标准化闭环模型辨识闭环系统,则可以提取到 $\{k, \tau\}_{i,j}$ 所对应的闭环系统特征量.用调整控制器参数的方法得到训练样本的好处在于对对象的形式没有要求,不同形式的对象例如时延对象、高阶对象都可以用调整控制器参数的方法得到训练样本.

### 3.3 实时自整定方法

#### (1) 滤波系数

当对象参数变化或控制器参数变化时,辨识算法都需要一定的过渡时间才能正确地识别到参数的变化.如果不考虑辨识的过渡时间,会由于辨识参数还未收敛到真值而误调整控制器.为此在自整定过程中加入滤波系数 $\alpha, 0 < \alpha < 1$ ,即根据式(12)可得参数变化量为

$$\begin{cases} K_p(t) = \alpha K_p(t-1) + (1-\alpha) K_p(t-1), \\ T_i(t) = \alpha T_i(t-1) + (1-\alpha) T_i(t-1). \end{cases} \quad (18)$$

加入滤波系数后的自整定方程为

$$\begin{cases} K_p(t) = K_p(t-1) + \Delta K_p(t), \\ T_i(t) = T_i(t-1) + \Delta T_i(t). \end{cases} \quad (19)$$

滤波系数的加入稳定了自整定的过程.下面将根据具体的仿真来确定滤波系数的大小.

#### (2) 无扰动切换

自整定过程中PI控制器比例系数的变化必定会造成对象输入信号突变,而使得系统输出发生大的超调.因此当每次控制器整定时,应该在控制器输出信号中加入补偿.一般的PI控制器输出为

$$u(t) = K_p(t) e(t) + \frac{K_p(t)}{T_i(t)} \int_{t_0}^t e(t) dt. \quad (20)$$

其中 $e(t)$ 为误差信号, $t_0$ 为初始时刻.假设在 $t+1$ 时刻调整比例系数 $K_p(t+1) = K_p(t)$ ,控制器输出将发生跳变,为此引入补偿项

$$c = (K_p(t) - K_p(t+1)) e(t+1). \quad (21)$$

则加入补偿后的控制器输出为

$$u(t+1) = K_p(t+1) e(t+1) + \frac{K_p(t+1)}{T_i(t+1)} \int_{t_0}^{t+1} e(t) dt + c. \quad (22)$$

#### (3) 辨识算法

为了避免由于激励不足而引起的控制器参数误整定,在阻尼最小二乘法的基础上加入了条件更新原则<sup>[11]</sup>.满足约束条件则可以整定控制器参数,如果不满足约束条件则不能整定.该组合算法本文称之为条件更新阻尼最小二乘法(CDLS).

## 4 仿真研究

为了验证本文提出的自整定方法的有效性,分别就参数突变、负载干扰、参数渐变和随机噪声情况下的自整定系统进行了仿真.

给定一高阶惯性对象为

$$G_p(s) = \frac{1}{(10s+1)^8}, \quad (23)$$

根据性能指标得到控制器参数为 $K_p = 0.6265, T_i = 52.3974$ ,采样时间为 $10\text{ s}$ ,CDLS算法中遗忘因子为 $0.9$ ,阻尼因子 $\mu$ 为 $0.0001$ .参数变化率 $k, \tau \in [0.4, 2.5]$ .根据以上条件采集训练样本,神经网络结构为 $[3\ 10\ 2]$ ,即3个输入节点,10个隐含层节点和2个输出节点.隐含层和输出层的激活函数分别为sigmoid函数和线性函数.由于特征量的变化范围比较大,将标准化到 $[-1, 1]$ 的范围内,利用交叉验证的方法训练神经网络.

为了得到滤波系数,针对标称对象和已经整定好的控制器.参考输入不变时,当对象增益增大2倍,辨识算法需要20个周期的递推才逐渐收敛于真值,此时 $k = 2$ ,递推周期为 $T = 20$ ,选择滤波系数为 $\alpha = k/T = 0.1$ .下面的仿真将对不同的滤波系数进行比较.

### 4.1 对象参数突变

当 $t = 1000$ 时,对象(23)的参数发生突变, $T(t) = 5, K(t) = 2$ ,系统响应如图3(a)所示.对象参数的变化引起输出的振荡,由于整定的及时,使得闭环系统快速恢复到稳定状态.

根据参数集结原理可知,只要集结增益系数 $k(t) = K_p(t)K(t)/K_p(t_0)K(t_0)$ 和集结时间系数 $\tau(t) = T_i(t)T(t_0)/T(t)T_i(t_0)$ 等于1,则闭环系统均为“满意”闭环系统.图3(b)和(c)是不同滤波系数情况下 $k(t)$ 和 $\tau(t)$ 的曲线,当滤波系数为 $0.05$ 时,整定过程明显要慢很多;当滤波系数为 $0.3$ 时, $k(t)$ 出现了振荡;当滤波系数为 $0.1$ 时,总的效果最好.

### 4.2 参数突变加负载

当 $t = 1000$ 时,对象(23)的参数突变为 $K(t) = 2$ 且 $T(t) = 8$ , $t = 2000$ 时加入阶跃负载,幅度为 $0.15$ .如图4所示,如不及时整定,则系统将出现振荡.同时对CDLS与递推最小二乘法(RLS)进行了对比.从图4看出,由于采用了CDLS算法,使得自整定过程非常稳定,没有出现波动的情况,避免了过度整定控制器参数.

### 4.3 参数渐变加随机噪声

以FOPDT对象进行仿真,标称模型为

$$G_p(s) = \frac{e^{-4s}}{10s+1}. \quad (24)$$

根据性能指标设计控制器参数为 $K_p = 2.110, T_i = 10.196$ ,采样时间为 $3\text{ s}$ .CDLS算法中遗忘因子为 $0.9$ ,阻尼因子 $\mu$ 为 $0.001$ .参数变化率

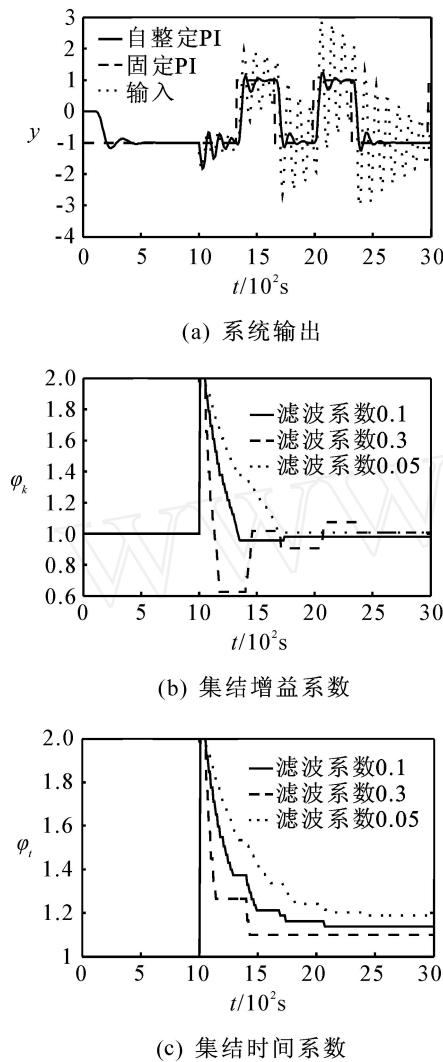


图 3 高阶惯性对象参数突变 PI 自整定控制

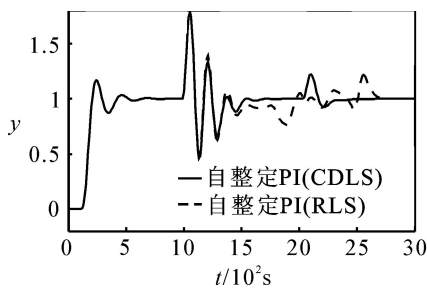


图 4 高阶惯性对象参数突变加负载 PI 自整定控制

$k, t \in [0.4, 2.5]$ . 根据以上条件采集训练样本,神经网络结构和激活函数等设置与高阶惯性对象的仿真相同. 滤波系数为 0.03.

在  $t = 100$  时,对象增益每个采样周期上升 0.009,而时间常数每个采样周期增加 0.03. 分别加入均值为零和均值为 1 的服从正态分布的随机噪声,噪信比为 0.12. 如果控制器参数不变,则随着对象参数的增加,系统将变得不稳定. 如图 5 所示,自整定系统不仅能使得系统稳定,而且还得到了很好的控制效果. 当  $t = 1000$  时,  $K(t) = 3.7 = 3.7 K_0$ ,

$3.7 > 2.5$ . 即对象增益总的变化已经超出了参数变化率的设定范围,说明了参数可多次变化,只有变化率的限制,而没有总的变化量的限制. 同时经过对均值为零和均值非零的噪声进行对比可以看出,不管是哪种噪声,自整定系统都取得了很好的控制效果.

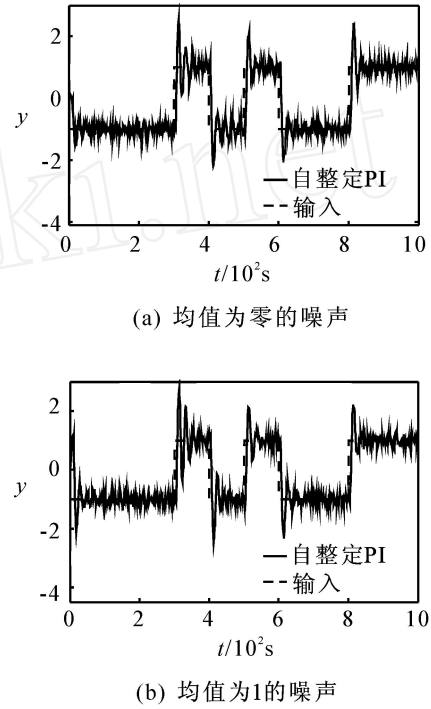


图 5 时延对象参数渐变加噪声 PI 自整定控制

从以上的实验来看,首先说明了对于工业中常见的对象如高阶、时延对象,都可以利用三阶模型来近似其闭环系统;其次说明了该自整定方法对于参数多次变化的范围并没有限制;最后根据加入噪声的仿真说明了该自整定方法具有一定的鲁棒性和抗干扰能力.

### 5 结 论

针对线性时变对象,提出了基于闭环系统特征的 PI 自整定,利用了直接辨识闭环系统没有可辨识性问题和极点分离为主导与非主导极点的优势. 不管对象形式如何都可以利用标准化模型来辨识闭环系统. 最后对高阶惯性对象和时延对象在多种情况下进行仿真,说明了本文提出的方法是有效的.

### 参考文献(References)

[1] Desborough L, Miller R. Increasing customer value of industrial control performance monitoring-honeywell's experience[C]. Proc of the 6th Int Conf on Chemical Process Control. Arizona: AIChE, 2001: 172-192.

[2] Shen J C. Fuzzy neural networks for tuning PID controller for plants with underdamped responses[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(2): 333-342.

[3] Chen J, Huang T C. Applying neural networks to on

- line updated PID controllers for nonlinear process control[J]. J of Process Control, 2004, 14(2): 211-230.
- [4] 高宪文, 赵亚平. 焦炉模糊免疫自适应 PID 控制的应用研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(12): 1346-1349.  
(Gao Xian-wen, Zhao Ya-ping. Application research on fuzzy immune adaptive PID control in coke oven [J]. Control and Decision, 2005, 20(12): 1346-1349.)
- [5] Sbarbaro D, Johansen T A. Analysis of artificial neural networks for pattern-based adaptive control [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2006, 17(5): 1184-1193.
- [6] Tursini M, Parasiliti F, Zhang D. Real-time gain tuning of PI controllers for high-performance PMSM drives[J]. IEEE Trans on Industry Applications, 2002, 38(4): 1018-1026.
- [7] 莫建林, 王伟, 许晓鸣, 等. 系统辨识中的闭环问题[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 9-14.  
(Mo Jian-lin, Wang Wei, Xu Xiao-ming, et al. Closed-loop problem in system identification [J]. Control Theory and Applications, 2002, 19(1): 9-14.)
- [8] 杨献勇. 热工过程自动控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.  
(Yang Xian-yong. Automatic control of thermal process [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000.)
- [9] Suganda P, Krishnaswamy P R, Rangaiah G P. On-line process identification from closed-loop tests under PI control[J]. Chemical Engineering Research and Design, Trans of the Institute of Chemical Engineers, 1998, 76(A4): 451-457.
- [10] 林茅琼, 陈增强, 袁著祉. 基于阻尼最小二乘法的神经网络预测偏差补偿自校正控制器[J]. 信息与控制, 2000, 29(1): 27-33.  
(Lin Mao-qiong, Chen Zeng-qiang, Yuan Zhu-zhi. Self-tuning controller for neural network predictive deviation compensation based on damped least square [J]. Information and Control, 2000, 29(1): 27-33.)
- [11] Astrom K J, Wittenmark B. 自适应控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
(Astrom K J, Wittenmark B. Adaptive control [M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [12] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.  
(Hu Shou-song. Modern control theory [M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [13] 宋文忠, 蒋国平. 一种新型状态 PI 调节器的研究[J]. 自动化学报, 1997, 23(6): 786-792.  
(Song Wen-zhong, Jiang Guo-ping. On a new kind of state PI regulator [J]. Acta Automatica Sinica, 1997, 23(6): 786-792.)

(上接第 424 页)

- [6] 马占新. 数据包络分析方法的研究进展[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(3): 42-46.  
(Ma Zhan-xin. Research development of data envelopment analysis [J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(3): 42-46.)
- [7] 马占新. 样本数据包络面的研究与应用[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(12): 32-37.  
(Ma Zhan-xin. Frontier that is formed by some sample units and its applying [J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2003, 23(12): 32-37.)
- [8] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. European J of Operational Research, 1978, 6(2): 429-444.
- [9] Charnes A, Cooper W W, Golany B, et al. Foundations of data envelopment analysis for pareto-koopmans efficient empirical production functions [J]. J of Econometrics, 1985, 30(1): 91-107.
- [10] Färe R, Grosskopf S. A nonparametric cost approach to scale efficiency[J]. J of Economics, 1985, 87(4): 594-604.
- [11] Seiford L M, Thrall R M. The mathematical programming approach to frontier analysis [J]. J of Economics, 1990, 46(1/2): 7-38.