

文章编号: 1001-0920(2008)04-0473-04

时滞系统稳定性分析:一种积分等式方法

李旭光, 朱新坚, 曹广益
(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 提出一种积分等式方法研究时滞系统稳定性问题. 该方法是已有积分不等式方法的改进. 结合自由权矩阵构建积分等式, 且自由权矩阵的选取由 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数确定, 从而在稳定条件的推导过程中, 不引入任何模型转换及限界方法. 基于该方法, 可得到具有更低保守性的稳定条件. 仿真例子说明了所提方法的有效性.

关键词: 时滞系统; 稳定性; 线性矩阵不等式; Lyapunov-Krasovskii 泛函

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Stability analysis of time-delay systems: An integral-equality approach

LI Xu-guang, ZHU Xin-jian, CAO Guang-yi

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China. Correspondent: LI Xu-guang, E-mail: masdanlee@163.com)

Abstract: An integral-equality approach is presented to study the stability of time-delay systems, which is an improved version of the integral inequality and is constructed with free weighting matrices. The free terms are chosen according to the derivative of the Lyapunov-Krasovskii employed. As a result, neither model transformation nor bounding technique is introduced during the stability analysis. Less conservative stability criteria can be obtained based on the proposed approach. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Time-delay systems; Stability; Linear matrix inequality; Lyapunov-Krasovskii functional

1 引言

时滞系统的稳定性是当前一个热点研究问题, 近年来人们提出了许多方法来降低已有结论的保守性. 其中, 文献[1]提出一种积分不等式的研究方法, 该方法结合自由权矩阵^[2]和 Moon 不等式^[3]得出与文献[4]中不同的积分不等式. 该方法与同类研究方法相比, 可得到保守性更低的稳定判据.

本文基于文献[1]的结论, 提出一种积分等式的研究方法. 该方法从以下两个方面改进了文献[1]的结论: 1) 积分等式方法是一种局部的方法. 当采用该方法研究时滞系统稳定性时, 一些系统变量间的关系会被忽略. 考虑到这一点, 积分等式采用了自由权矩阵, 且相关自由项根据 Lyapunov-Krasovskii 泛函选取, 从而该方法是全局性的. 2) 积分不等式方法采用 Moon 不等式, 从而不可避免地引入了额外的保守性. 而本文方法不采用任何形式的不等式方法, 不引入额外的保守性. 仿真结果表明, 本文方法的保

守性更低.

2 积分等式

首先给出文献[1]中的积分不等式. 对矩阵 $X = X^T > 0$, M_1, M_2 和标量 $h > 0$, 下面不等式成立:

$$- \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) X \dot{x}(s) ds \\ + \tau(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & * \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} (t) + \\ h^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} X^{-1} [M_1 \quad M_2] (t),$$

其中 $\tau(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h)]$. 该结论利用 Moon 不等式和下面等式:

$$0 = 2[x^T(t) N_1^T + x^T(t-h) N_2^T] \times \\ [x(t) - x(t-h) - \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds], \quad (1)$$

其中 N_1 和 N_2 为自由权矩阵.

下面给出积分等式, 并比较两种方法.

收稿日期: 2006-12-14; 修回日期: 2007-03-27.

基金项目: 国家 863 计划项目(2003AA517020).

作者简介: 李旭光(1980—), 男, 沈阳人, 博士生, 从事时滞系统、鲁棒控制等研究; 朱新坚(1958—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、燃料电池系统等研究.

引理 1 给定标量 $h > 0$, 对任意矩阵 R, N, X , 函数 $f(x)$ 和有

$$- \int_{t-h}^t f^T(s) R f(s) ds =$$

$$2 \int_{t-h}^t N^T f(s) ds + h^T X -$$

$$\int_{t-h}^t (N^T f^T(s)) \begin{bmatrix} X & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s) \end{bmatrix} ds.$$

证明 由

$$N^T \int_{t-h}^t f(s) ds = \int_{t-h}^t f^T(s) N^T ds,$$

$$\int_{t-h}^t X ds = h^T X,$$

引理 1 可得证.

注 1 引理 1 是一个等式, 因此在分析系统稳定性时不额外引入保守性, 这点优于积分不等式.

对于给定 $f(s), R$, 任意自由项 N, X 和 都满足等式成立. 当用引理 1 推导稳定条件时, 这些自由项可按下面规则确定, 从而得到保守性低的判据.

规则 1 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数 $\dot{V} e^T e$ 常出现在时滞系统稳定性分析的条件中, 其中 V 为所采用的 Lyapunov-Krasovskii 泛函. 对于这样的展开形式, 选取 $= e$.

规则 2 N 应为一个由自由权矩阵组成的列向量. N 中元素个数等于 e 中元素个数.

利用式 (1) 分析时滞系统时, 一些变量间的关系会被忽略, 以如下时滞系统为例:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - h_i). \quad (2)$$

通常 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数取形为

$$\dot{V} e^T e,$$

$$e^T = (x^T(t) \quad x^T(t - h_1) \quad \dots \quad x^T(t - h_n) \dot{x}^T(t)).$$

根据自由项选取规则, 定义 $= e, N^T = (N_1^T \quad \dots \quad N_{n+2}^T)$, 这样无变量关系被忽略. 如采用积分不等式, n 个变量及其自由权矩阵会被忽略^[1]. 因此, 可以预见基于积分等式的方法会得到保守性更低的结论, 且如果一个系统中含时滞项越多, 提高的效果越明显.

积分等式及自由项选取规则构成了一个分析时滞系统稳定性的系统方法. 下面将利用这个方法推导时滞系统的稳定条件.

注 2 除了结合引理 1, 自由项的选取规则也可用于其他采用自由权矩阵的方法中. 当系统变量关系由自由权矩阵表示时, 恒等于零的项也应根据 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数形式 $(\dot{V} e^T e)$ 确定, 且 e 中元素都分配自由权矩阵.

下面给出例子说明一些已有结果可直接由自

由权选择规则改进.

在文献[5, 6]中, 可见

$$\dot{V} e^T e,$$

$$e^T =$$

$$(x^T(t) \quad x^T(i_k h) \quad x^T(t - t_0) \quad \dot{x}^T(t) \quad \int_{t_0}^t x(s) ds).$$

然而, 无自由权矩阵分配给 $\int_{t_0}^t x(s) ds$ 项.

以下通过例子说明文献[5, 6]中结论可进一步改进.

例 1 考虑如下网络控制系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$u(t) = [-3.75 \quad -11.5] x(t). \quad (3)$$

由文献[5]得时滞上界 0.873. 由本文方法对文献[5]中判据进行改进, 得时滞上界 0.967, 过程如下: 考虑网络控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(i_k h),$$

$$t \in [i_k h + k, i_{k+1} h + k + 1],$$

$$(i_{k+1} - i_k) h + k + 1, \quad m = k,$$

$$k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

定理 1 给定标量 m , 和矩阵 K , 如果存在矩阵 $P_k (k = 1, 2, 3), T_j > 0, R_j > 0 (j = 1, 2)$ 和任意矩阵 $N_i, S_i, M_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 满足下面 LMIs:

$$\begin{bmatrix} 11 & * \\ 21 & 22 \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0. \quad (6)$$

其中

$$11 = \begin{bmatrix} 11 & * & * & * \\ 21 & 22 & * & * \\ 31 & 32 & 33 & * \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix},$$

$$21 = \begin{bmatrix} 0 P_3 + N_5 - M_5 A & - N_5 - M_5 B K + S_5 \\ N_1^T & N_2^T \\ S_1^T & S_2^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 P_3 - S_5 & 0 P_2^T + M_5 \\ N_3^T & N_4^T \\ S_3^T & S_4^T \end{bmatrix},$$

$$22 = \begin{bmatrix} - 0 T_2 & * & * \\ N_5^T & - R_1 & * \\ S_5^T & 0 & - R_2 \end{bmatrix},$$

$$11 = P_2 + P_2^T + T_1 + 0 T_2 + N_1 + N_1^T - M_1 A - A^T M_1^T,$$

$$\begin{aligned}
21 &= N_2 - N_1^T + S_1^T - M_2 A - K^T B^T M_1^T, \\
31 &= N_3 - P_2^T - S_1^T - M_3 A, \\
41 &= M_1^T + N_4 + P_1 - M_4 A, \\
22 &= -N_2 - N_2^T + S_2 + S_2^T - \\
&\quad M_2 B K - K^T B^T M_2^T, \\
32 &= -N_3 + S_3 - S_2^T - M_3 B K, \\
42 &= -N_4 + S_4 + M_2^T - M_4 B K, \\
33 &= -T_1 - S_3 - S_3^T, \\
43 &= -S_4 + M_3^T, \\
44 &= M_4 + M_4^T + R_1 + 2 R_2, \\
0 &= \frac{1}{2} (\quad + \quad m), \quad = \frac{1}{2} \quad - \quad m,
\end{aligned}$$

则系统(4)渐近稳定.

证明 定理1的证明类似于文献[5]中引理8的证明.由文献[5]有

$$\begin{aligned}
&2e^T(t)N[x(t) - x(ikh) - \int_{ikh}^t \dot{x}(s)ds] + \\
&2e^T(t)S[x(ikh) - x(t-0) - \int_{t-0}^{ikh} \dot{x}(s)ds] + 2e^T(t)M \times \\
&[-Ax(t) - BKx(ikh) + \dot{x}(t)] = 0, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$e^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(ikh) \quad x^T(t-0) \quad \dot{x}^T(t)], \quad (8)$$

$$N^T = [N_1^T \quad N_2^T \quad N_3^T \quad N_4^T], \quad (9)$$

$$S^T = [S_1^T \quad S_2^T \quad S_3^T \quad S_4^T], \quad (10)$$

$$M^T = [M_1^T \quad M_2^T \quad M_3^T \quad M_4^T]. \quad (11)$$

将式(7)~(11)替换为

$$\begin{aligned}
&2e^T(t)N[x(t) - x(ikh) - \int_{ikh}^t \dot{x}(s)ds] + \\
&2e^T(t)S[x(ikh) - x(t-0) - \int_{t-0}^{ikh} \dot{x}(s)ds] + 2e^T(t)M \times \\
&[-Ax(t) - BKx(ikh) + \dot{x}(t)] = 0, \\
&e^T(t) = [e^T(t) \quad \int_{t-0}^t x(s)ds], \\
&N^T = [N^T \quad N_5^T], \\
&S^T = [S^T \quad S_5^T], M^T = [M^T \quad M_5^T].
\end{aligned}$$

这样更多的矩阵变量(N5, S5, M5)被引入.类似地,文献[5,6]中其他结论也可以这样改进.

注3 本文方法引入更多自由权矩阵,从而使线性矩阵不等式的求解更灵活,进而降低了结论保守性.这里需指出,某些情况下,更多的矩阵变量不一定会降低保守性,但决不会增加^[7].

3 稳定性分析

应用积分等式研究下面时滞系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h_1) + A_2 x(t-h_2). \quad (12)$$

其中:A, A1, A2为常值矩阵;时滞h1, h2满足0 < h1 < h2 < h2, h1 < mu < 1.

定理2 对给定标量mu > 0, h1 > 0和h2 > 0,系统(12)渐近稳定,如存在矩阵P > 0, Q = Q^T > 0, R1 = R1^T > 0, R2 = R2^T > 0, N1i, N2i, Mi(i = 1, 2, 3, 4)满足下面LMI:

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_1 N_1 & \bar{h}_2 N_2 \\ * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 \\ * & * & -\bar{h}_2 R_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ * & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ * & * & Q_{33} & Q_{34} \\ * & * & * & Q_{44} \end{bmatrix}, \\
11 &= Q + N_{11} + N_{11}^T + N_{21} + \\
&\quad N_{21}^T - M_1 A - A^T M_1^T, \\
12 &= -N_{11} + N_{12}^T + N_{22}^T - M_1 A_1 - A^T M_2^T, \\
13 &= N_{13}^T - N_{21} + N_{23}^T - M_1 A_2 - A^T M_3^T, \\
14 &= P + N_{14}^T + N_{24}^T + M_1 - A^T M_4^T, \\
22 &= -(1 - \mu)Q - N_{12} - \\
&\quad N_{12}^T - M_2 A_1 - A_1^T M_2^T, \\
23 &= -N_{13}^T - N_{22} - M_2 A_2 - A_1^T M_3^T, \\
24 &= -N_{14}^T + M_2 - A_1^T M_4^T, \\
33 &= -N_{23} - N_{23}^T - M_3 A_2 - A_2^T M_3^T, \\
34 &= -N_{24}^T + M_3 - A_2^T M_4^T, \\
44 &= \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i R_i + M_4 + M_4^T, \\
N_1^T &= (N_{11}^T \quad N_{12}^T \quad N_{13}^T \quad N_{14}^T), \\
N_2^T &= (N_{21}^T \quad N_{22}^T \quad N_{23}^T \quad N_{24}^T).
\end{aligned}$$

证明 取Lyapunov-Krasovskii泛函

$$\begin{aligned}
V &= \\
&x^T(t)Px(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \bar{h}_i \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)ds + \\
&\int_{t-h_1}^t x^T(s)Qx(s)ds. \quad (14)
\end{aligned}$$

对其求导得到

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \\
&2x^T(t)P\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i \dot{x}^T(t)R_i \dot{x}(t) - \\
&\sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)ds + x^T(t)Qx(t) - \\
&(1 - \dot{h}_1)x^T(t-h_1)Qx(t-h_1) + \dots \quad (15)
\end{aligned}$$

其中

$$= \sum_{i=1}^2 2^T N_i (x(t) - x(t-h_i)) -$$

$$\begin{aligned} & \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s) ds = 0, \\ & = \\ & 2^T M(-Ax(t) - A_1 x(t-h) - \\ & A_2 x(t-h_2) + \dot{x}(t)) = 0, \\ & - \int_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds \\ & - \int_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

由积分等式

$$\begin{aligned} & - \int_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds = \\ & \int_{i=1}^2 \left(2^T N_i \int_{t-h_i}^t \dot{x}(s) ds + h_i^T X_i - \right. \\ & \left. \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s) \begin{bmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \right). \end{aligned} \quad (17)$$

根据前面介绍的选取规则,定义

$$\begin{aligned} T &= (x^T(t) \quad x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h_2) \quad \dot{x}^T(t)), \\ N_i^T &= (N_{i1}^T \quad N_{i2}^T \quad N_{i3}^T \quad N_{i4}^T), \\ M^T &= (M_1^T \quad M_2^T \quad M_3^T \quad M_4^T). \end{aligned}$$

联合式(15) ~ (17) 可得

$$\begin{aligned} & \dot{V} \\ & 2x^T(t) Px(t) + \int_{i=1}^2 \bar{h}_i \dot{x}^T(t) R_i \dot{x}(t) + \\ & x^T(t) Qx(t) - (1-\mu)x^T(t-h_1) Qx(t-h_1) + \\ & \int_{i=1}^2 2^T N_i (x(t) - x(t-h_i)) + 2^T M(Ax(t) - \\ & A_1 x(t-h_1) - A_2 x(t-h_2) + \\ & \dot{x}(t)) + \int_{i=1}^2 (\bar{h}_i^T X_i - \\ & \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s) \begin{bmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds). \end{aligned}$$

进一步

$$\begin{aligned} & \dot{V} \\ & T \left(\int_{i=1}^2 \bar{h}_i X_i \right) - \\ & \int_{i=1}^2 \int_{t-h_i}^t \dot{x}^T(s) \begin{bmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds. \end{aligned} \quad (18)$$

选定 $X_i = N_i R_i^{-1} N_i^T$, 可保证 $\begin{bmatrix} X_i & N_i \\ N_i^T & R_i \end{bmatrix} \leq 0$. 再

由 Schur 补^[8], 如果式(15) 满足, $\dot{V} \leq 0$.

现在, 给出一个数值仿真来比较两种方法.

例 2 考虑系统(12), 取参数

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.0129 & -0.0031 \\ 0.0129 & 0.4969 \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0129 & -0.0031 \end{bmatrix}, \\ \bar{h}_2 &= 0.1, \mu = 0.5. \end{aligned}$$

要计算可确保系统(12) 稳定的最大 \bar{h}_1 , 由文献 [1] 的方法(积分不等式), 得 $\bar{h}_1 = 1.262$. 由定理 1(积分等式), 得 $\bar{h}_1 = 1.262$.

注 4 本文提出的积分等式方法可推广到含更多时滞项的系统, 且时滞项越多, 本文较积分不等式方法效果改进越显著.

4 结 论

提出一种分析时滞系统稳定性的方法. 利用积分等式及自由项选取规则, 可进一步降低稳定判据的保守性. 数值仿真结果说明了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Zhang X M, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays [J]. Automatica, 2005, 41 (8) : 1405-1412.
- [2] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems [J] Int J of Control, 2001, 74(14) : 1446-1455.
- [3] He Y, Wu M, She J H, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(5) : 828-832.
- [4] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Boston: Brikhauser, 2003.
- [5] Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H control of systems with uncertainty [J]. Automatica, 2005, 41(4) : 999-1007.
- [6] Yue D, Han Q L. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay[J]. Automatica, 2005, 41(2) : 233-240.
- [7] Gu K. Partial solution of LMI in stability problem of time-delay systems[C]. Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix, 1999: 227-232.
- [8] Boyd S, Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia PA: SIAM, 1994.