

文章编号: 1001-0920(2008)04-0367-05

基于区间代数方法分析嵌入式系统抖动的稳定性

沈青^{1,2}, 桂卫华¹, 阳春华¹

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410083; 2. 国防科技大学 指挥军官基础教育学院, 长沙 410003)

摘要: 针对嵌入式实时调度系统, 分析了控制任务的采样周期和延时不规则抖动属性及控制任务的稳定性能. 针对抖动引起的时变不确定性, 采用区间代数分析方法, 构建系统的离散时间闭环区间状态矩阵, 通过对单个时不变矩阵范数的判断得到一个保守的系统稳定性充分判据. 仿真实例表明, 当抖动在有界范围内变化时, 该方法简便有效.

关键词: 调度; 抖动; 不确定性; 区间代数; 稳定性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability analysis of embedded systems subject to jitter based on interval algebra approach

SHEN Qing^{1,2}, GUI Wei-hua¹, YANG Chun-hua¹

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Basic Education for Officers, National University of Defense Technology, Changsha 410003, China. Correspondent: SHEN Qing, E-mail: shenqing@public.cs.hn.cn)

Abstract: The stability properties of the embedded real-time scheduling systems whose control loops are subject to sampling and latency jitter are studied. Focused on the time uncertainty caused by jitter, a discrete-time closed-loop interval matrix is set up based on interval algebra methods. Furthermore, a looser sufficient stability condition by simply evaluating the norm of a time invariant matrix is presented. Simulation results show the effectiveness of the proposed method with jitter bounded systems.

Key words: Scheduling; Jitter; Uncertainty; Interval algebra; Stability

1 引言

控制系统主要由采样、控制计算和触发 3 部分构成, 经典控制理论设计规定采样信号和触发信号同时产生且均为恒定周期信号^[1]. 而在实际的嵌入式系统中, 由于并行任务资源竞争, 在控制调度算法下任务作业的采样周期和触发延时会发生变化, 称这种变化为抖动. 抖动会降低系统稳定性能, 严重情况下会破坏系统稳定性^[2]. 基于离散控制理论, 采用在线补偿算法^[3]可以减小抖动对控制性能指标的影响.

从控制角度来看, 具有时变输入输出时延的系统很难分析, 文献[4]针对每个任务作业的采样周期和延时均已知且重复出现的有限矩阵序列, 给出其稳定性判据为有限矩阵序列乘积的谱半径小于 1. 对于无限矩阵序列, 文献[5]提出系统稳定性判据为: 存在一个正定矩阵 P , 对所有闭环矩阵集

乘方均满足, $\|c_{cl_k}^T \cdot P \cdot c_{cl_k} - P\| < 0, \forall c_{cl_k}^k, k$

1. 文献[6]提出了在已知采样周期的分布特性的情况下系统稳定性判据, 简化了判断条件. 以上文献中提出的稳定条件判据都需事先知道控制任务在线运行时每个作业的属性参数或采样周期分布特性, 这在实际系统中很难得到.

本文将抖动引起的不确定性描述为系统的状态矩阵的各个元素在一些确定的区间内变化, 采用区间代数^[7]分析方法, 将实数运算扩展到区间运算, 分析区间控制系统的稳定性.

2 实时调度时间分析

2.1 抖动定义

(1) 采样抖动

不相等的控制任务周期作业开始时间意味着不规则采样, 即连续采样作业时间间隔不是一个恒定值. 采样间隔在不同的控制任务作业执行期间发

收稿日期: 2006-12-19; 修回日期: 2007-04-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60505018).

作者简介: 沈青(1965—), 女, 浙江临海人, 副教授, 博士生, 从事实时调度、优化控制与网络控制等研究; 桂卫华(1950—), 男, 武汉人, 教授, 博士生导师, 从事分散控制、大系统控制理论等研究.

生改变,这一变化值即为采样抖动.定义每个任务作业的采样间隔为

$$h_k = s_{k+1} - s_k. \quad (1)$$

(2) 触发延时抖动

调度引起控制任务每个作业的开始和结束时间之间延时发生变化,即在采样和触发之间的时间间隔不是一个恒定值,这一延时变化称为采样触发延时抖动.定义每个采样触发延时为

$$k = f_k - s_k. \quad (2)$$

式(1)和(2)中: k 为控制任务的第 k 个周期作业, s 为任务作业开始时间, f 为任务作业完成时间.

2.2 抖动属性

设控制任务 task 的额定采样周期、额定触发延时和截止期分别为 h_d, a, d ,其最大最小采样间隔定义如图 1 所示.最大采样间隔为 $h_{max} = h_d + d - a$,最小采样间隔为 $h_{min} = a + (h_d - d)$.

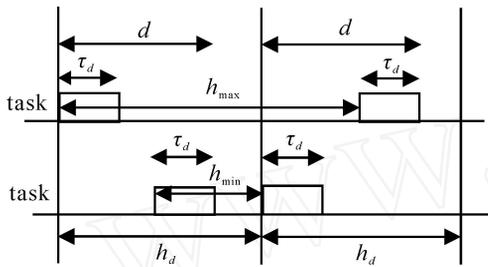


图 1 最大最小采样间隔

控制任务 task 的最大最小触发延时定义如图 2 所示.最大触发延时为 $\tau_{max} = d$,最小触发延时为 $\tau_{min} = a$.

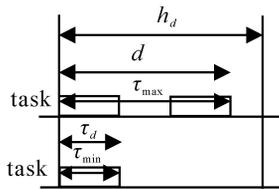


图 2 最大最小采样触发延时

由上述分析发现,在多任务处理机系统中,在保证任务截止期的情况下,控制任务 task 的采样周期和触发延时均有可能在一定范围内出现抖动,控制信号产生时间发生改变,控制信号计算值出现误差,由此会对系统稳定性造成影响.

2.3 抖动实例

设有 2 个控制任务共享一个处理器资源,其任务属性见表 1,其中 h_d 为任务额定采样周期, a 为额定触发延时(作业时间).在 RM(速率单调)调度策略下任务作业执行见图 3,其中高信号表示任务作业在执行,中信号表示任务作业已准备好但处于等待状态,低信号表示任务作业为闲置状态.图 3 中,1

为 $h(\text{task}_{2,1}) = 4$, 2 为 $h(\text{task}_{2,2}) = 4$, 3 为 $h(\text{task}_{2,3}) = 5$, 4 为 $h(\text{task}_{2,4}) = 7$, 5 为 $(\text{task}_{2,1} = 2, 6$ 为 $(\text{task}_{2,2}) = 2, 7$ 为 $(\text{task}_{2,3}) = 2, 8$ 为 $(\text{task}_{2,4}) = 4$.

表 1 任务集

	h_d	a
task ₁	4	2
task ₂	5	2

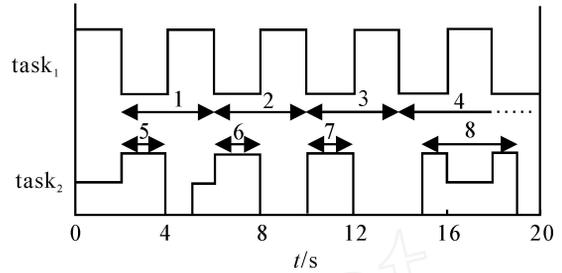


图 3 采样抖动和延时抖动:部分调度

表 1 中,task₂ 的额定采样周期和额定触发延时分别为 5 s 和 2 s.由于抖动,采样周期 $h_k \in [4, 7]$ s 和延时时间 $k \in [2, 4]$ s.分别在各自的区间范围内变化(如图 3),不再是一固定值.

3 系统模型及问题描述

3.1 采样周期和触发延时均为额定值的闭环系统模型

具有延时 a 的连续时不变系统过程模型^[1]如下:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - a), \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (4)$$

其中 h_d, a 为控制器设计时采用的额定采样周期和额定触发延时.式(3)中, a 小于或等于 h_d ,当系统采样周期和触发延时恒定时,线性离散时不变控制系统模型为

$$x_{k+1} = \phi(h_d) x_k + \psi_0(h_d, a) u_k + \psi_1(h_d, a) u_{k-1}, \quad (5)$$

$$y_k = Cx_k. \quad (6)$$

其中: x_k 是状态变量; u_k, u_{k-1} 是当前和过去时刻的控制信号; $\phi(h_d), \psi_0(h_d, a), \psi_1(h_d, a)$ 是由采样周期 h_d 和延时 a 决定的系统矩阵和输入矩阵^[1],且

$$\phi = e^{Ah_d}, \quad (7)$$

$$\psi_1 = e^{A(h_d - a)} \int_0^a e^{As} ds B, \quad (8)$$

$$\psi_0 = \int_0^{h_d - a} e^{As} ds B. \quad (9)$$

式(5)的状态空间模型如下:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(h_d) & \psi_1(h_d, a) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0(h_d, d) \\ I \end{bmatrix} u_k. \tag{10}$$

其中 u_{k-1} 为额外的状态变量.

式(10)采用下面的状态反馈控制:

$$u_k = -L(h_d, d) \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中 L 为系统的闭环反馈增益矩阵.

根据式(11),闭环时不变系统(10)可演变为

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h_d) & 1(h_d, d) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0(h_d, d) \\ I \end{bmatrix} L(h_d, d) \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

由式(12)得

$$cl = \begin{bmatrix} (h_d) & 1(h_d, d) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0(h_d, d) \\ I \end{bmatrix} L(h_d, d). \tag{13}$$

3.2 时变闭环系统动态特性及稳定性分析

在有抖动的情况下,采样周期 h_k 和延时 k 在每一个任务作业执行过程中发生变化,第 k 个周期的闭环矩阵由下式决定:

$$cl_k = \begin{bmatrix} (h_k) & 1(h_k, k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0(h_k, k) \\ I \end{bmatrix} L(h_d, d). \tag{14}$$

式(14)为一参数不确定系统,闭环反馈增益 L 在控制器设计时由 h_d, d 决定,在控制器运行过程中为一恒定值.采样周期 h_k 和延时 k 均为独立的随机变量.

cl_k 的乘积决定闭环系统的动态特性,离散系统方程演变为

$$x_k = cl_k \dots cl_2 cl_1 x_0, \tag{15}$$

其中 x_0 为离散系统状态变量初始值.

由于 h_k 和 k 分别在一定范围内变化,控制信号

$$u_k = -L(h_d, d) \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$$

的计算并没有跟随系统的动态特性,抖动会影响系统的控制性能和稳定性能.

对于一个已知的矩阵序列

$$\left\{ \begin{matrix} \\ \vdots \\ cl_k \\ \vdots \end{matrix} \right\}, \tag{16}$$

其稳定性测试等价于测试矩阵乘积的谱半径是否小于 $1^{[4]}$,即

$$\rho(cl_k \dots cl_2 cl_1) < 1. \tag{17}$$

采用式(17)规定的稳定判断条件要求事先预知每个任务作业在线运行参数 h_k, k ,在实际任务运

行过程中,由于未知因素存在,很难做到.其次大量的矩阵乘法运算也需较强的运算能力支持.

4 区间控制系统稳定性分析

实时调度系统在线运行参数是一些随机变量 (h_k, k) ,虽然这些参数很难预估,但在每个任务作业期间,其参数值是在一个有界范围内变化.下面对随机变量在一定范围内变化的区间系统稳定性进行分析,获得保守的稳定性判据.

4.1 区间代数相关知识

区间代数又称区间分析、区间计算.其基本运算是,对于实数域上的子集 $[a, b]$ 及 $[c, d]$,有

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] * [c, d] &= \\ &[\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] &= \\ &[\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)], \\ &\text{若 } 0 \notin [c, d]. \end{aligned}$$

4.2 区间模型

设控制任务的额定采样周期、额定触发延时和截止期分别为 h_d, d, d ,采样周期 h_k 和延时 k 在每一个任务作业执行过程中发生变化(见图1和图2),其可能的取值范围为

$$h_k \in \{ h_{\min}, \dots, h_{\max} \}, \tag{18}$$

$$h_{\min} = d + (h_d - d), h_{\max} = h_d + d - d, \tag{18}$$

$$k \in \{ \min, \dots, \max \}, \min = d, \max = d. \tag{19}$$

由式(18)和(19)可得 h_k, k 的区间取值范围为

$$h_k \in \{ h_{\min}, \dots, h_{\max} \} \quad h_k \in [h_{\min}, h_{\max}], \tag{20}$$

$$k \in \{ \min, \dots, \max \} \quad k \in [\min, \max]. \tag{21}$$

在式(14)中用区间数 $[h_{\min}, h_{\max}]$ 和 $[\min, \max]$ 替换随机变量 h_k, k ,采用数字区间分析法计算得到新的闭环区间矩阵模型 $[cl]$,该矩阵的每一个元素是一个区间值 $cl_{i,j} = [cl_{i,j}, \bar{cl}_{i,j}]$,如下所示:

$$cl_{i,j} = \min f([h_{\min}, h_{\max}], [\min, \max]),$$

$$\bar{cl}_{i,j} = \max f([h_{\min}, h_{\max}], [\min, \max]). \tag{22}$$

定义 $[cl]^k = [cl][cl] \dots [cl]$,新的系统动态特性可用区间法表示为

$$[x_{k+1}, \bar{x}_{k+1}] = [cl]^k x_0. \tag{23}$$

当区间矩阵 $[cl]$ 的无限乘积 $[cl]^k$ 趋于零时,式(23)所示的动态系统稳定.

4.3 稳定性分析

式(23)所示的区间系统并不等同于式(15)所示原系统的动态特性,但区间系统更具普遍性且覆盖原系统^[8],即区间系统中的某一动态特性一定与

原系统某时刻动态参数一致. 这为简化系统稳定性分析提供了依据.

由区间矩阵 [a] 构造另一对称的区间矩阵 [b], 其每个元素为

a_{i,j} = [- a_{i,j}, a_{i,j}], (24)

其中 a_{i,j} = max(abs(phi_{i,j}), abs(phi_{i,j})).

定义矩阵 A, 其每个元素 a_{i,j} 是区间矩阵 [a] 对应元素的上限值, 即

a_{i,j} = a_{i,j}. (25)

定义1 设 a_{i,j} 和 a_{i,j} 是区间矩阵 [A] 中各元素的最小最大值, b_{i,j} 和 b_{i,j} 是区间矩阵 [B] 中各元素的最小最大值. 当 forall i, j: a_{i,j} <= b_{i,j} and a_{i,j} <= b_{i,j}, 则称区间矩阵 [B] 覆盖区间矩阵 [A], 记为 [A] [B].

定理1 设 [A] 和 [B] 是两个区间矩阵, 且 [A] [B], 如果 [B] 稳定, 则被它所覆盖的 [A] 稳定.

采用区间代数运算法则计算结果易于扩张, 区间系统不稳定时原系统有可能稳定. 因此, 下面的稳定性测试是一个充分条件.

定理2 当矩阵 A 稳定时, 式(23) 定义的动态系统稳定.

证明 首先测试 [A] 的稳定性, 检测该区间矩阵的无限乘积是否趋于零. 定义 k 个区间矩阵 [A] 相乘为

[A]^k = [A] [A] ... [A]. (26)

文献[8] 已证明

[A]^k = [A] [A] ... [A] = [a^k, b^k]. (27)

由式(27), 如果 A 稳定, a^k 趋于零, 根据对称性, 区间矩阵 [- a^k, b^k] 亦趋于零, 意味着 [A] 是稳定的.

另由定义 1, [A] 覆盖 [a], 即 [a] [A], 根据定理 1, 如果 [A] 稳定, 则 [a] 一定稳定.

所以, 当矩阵 A 稳定时, 式(23) 定义的动态系统稳定.

定理3 当矩阵 A 的范数 ||A|| < 1, 矩阵 A 稳定.

证明 由矩阵分析理论[9] 可知, 当谱半径 rho(A) < 1 时, 矩阵序列 [A^k] 收敛于零矩阵. 由于任一矩阵的谱半径不大于该矩阵的任一种范数, 当 ||A|| < 1 时, rho(A) < 1 一定成立. 综上, 矩阵 A 稳定.

推论1 由定理 2 和定理 3 可得, 当矩阵 A 的范数 ||A|| < 1 时, 式(23) 定义的动态系统稳定.

5 实例仿真

一个简单的直流电动机模型为

dot{x} = [-1 0; 1 0] x + [1; 0] u,

y = [0 1] x.

为简单起见, 假定系统无触发延时, 采样周期可变, 其离散化系统状态方程为

x_{k+1} = [e^{-h_k} 0; 1 - e^{-h_k} 1] x_k + [1 - e^{-h_k}; h - 1 + e^{-h_k}] u_k,

y_k = [0 1] x_k.

为控制电机速度, 采用离散极点配置设计控制器算法.

设额定采样周期 h_d = 1.5 s, 采用文献[4] 的方法, 通过仿真求得系统运行 30 个周期的采样周期值为

h_{k(1:k:30)} = { 1.4, 1.5, 1.5, 1.6, 1.4, 1.5, 1.5, 1.6, 1.4, 1.5, 1.5, 1.6, 1.4, 1.5, 1.5, 1.6, 1.4, 1.5, 1.5, 1.6, 1.4, 1.5, 1.5, 1.6, 1.4, 1.5 }.

计算系统谱半径

(c_{l30} ... c_{l2} c_{l1}) = 1.542 5 x 10^{-9} < 1.

满足式(17) 稳定判断条件, 系统为稳定系统. 该方法要求知道每个任务作业属性, 这在实际过程中较难得到, 计算过程繁琐. 而且系统每次运行过程中的采样序列值是抖动变化的, 因此每次系统运行都要重新计算判断, 更进一步增加了计算的复杂性.

若已知实际采样周期变化范围为 h_k = [1.4, 1.6] s, 采用本文提出的区间代数分析法进行保守的稳定性分析. 基于 Matlab 平台[10], 由式(23) 求得区间闭环矩阵为

[a] = [[-2.222 3, -0.153 7; 0.303 4, 0.478 3]; [-0.342 5, -0.323 2]; [0.636 7, 0.741 8]].

由式(25) 得

= [0.222 2 0.342 4; 0.478 2 0.741 7].

因为 rho = 0.9724 < 1, 所以电机在规定采

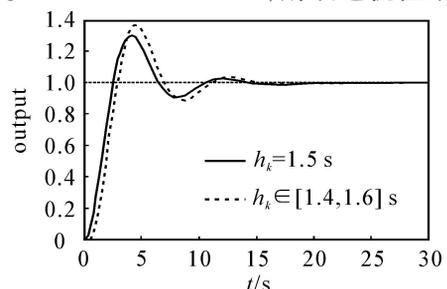


图4 电机的阶跃响应

样周期 $h_k \in [1.4, 1.6]$ s 内运行稳定. 图 4 所示为在 Truetime 仿真平台^[11] 下电机的阶跃响应.

6 结 论

本文讨论了嵌入式系统中抖动对系统稳定性的影响,对任务属性可变的控制系统进行稳定性分析.对抖动在一定范围内变化的闭环控制系统提出了稳定性判据,该判据基于区间代数分析方法,采用区间数描述不确定动态结构参数,将非确定性的稳定性分析问题完全转化为确定性问题进行求解.该方法避免了嵌入式系统抖动稳定性分析时要求任务作业参数预知及复杂的计算过程,通过对单个矩阵范数的判断得到一个保守的充分性系统稳定性判据.

参考文献(References)

- [1] Astrom K J, Wittenmark B. Computer controlled systems—Theory and design[M]. 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [2] Arzen K E, Cervin A, Eker J, et al. An introduction to control and scheduling co-design[C]. Proc of IEEE Conf on Decision and Control. Sydney: IEEE Press, 2000: 4865-4870.
- [3] Marti P, Fohler G, Ramamritham K, et al. Jitter compensation for real-time control systems[C]. Proc of the 22nd IEEE Real-Time Systems Symposium. London: IEEE Computer Society Press, 2001: 39-48.
- [4] Marti P, Villà R, Fuertes J M, et al. Stability of on-line compensated real-time scheduled control tasks[C]. Proc of IFAC Conf on New Technologies for Computer Control. Hong Kong, 2001.
- [5] Dogruel M, Umit Özgüner. Stability of a set of matrices: A control theoretic approach[C]. Proc of the 34th IEEE Conf on Decision and Control. New Orleans: IEEE Press, 1995: 1324-1329.
- [6] Velasco M, Marti P, Villà R, et al. A probabilistic approach to the stability analysis of real-time control systems [C]. Proc of 16th IFAC World Congress. Prague: Elsevier, 2005.
- [7] Alefeld G, Herzberger J. Introduction to interval computations[M]. New York: Academic Press, 1983.
- [8] Velasco M, Martí P, Villà R, et al. Stability of networked control systems with bounded sampling rates and time delays[C]. Proc of the 31th Annual Conf of the IEEE Industrial Electronics Society. Raleigh: IEEE Industrial Electronics Society, 2005: 2417-2422.
- [9] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computations[M]. 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [10] Rump S M. Intlab — Interval laboratory [M]. Hamburg: Institute for Reliable Computing, 2005.
- [11] Ohlin M, Henriksson D, Cervin A. TrueTime 1.4 reference manual [M]. Lund: Lund Institute of Technology, 2006.

(上接第 366 页)

- [62] 毕建东, 杨桂芳. 基于熵的决策树分枝合并算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1997, 29(2): 44-46.
(Bi Jian-dong, Yang Gui-fang. Algorithm for merging of branches in decision tree induction[J]. J of Harbin Institute of Technology, 1997, 29(2): 44-46.)
- [63] 李德光, 胡运权, 张明立. 运用马尔柯夫信源熵量化航天型号研制经验不确定性的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 7(21): 96-100.
(Li De-guang, Hu Yun-quan, Zhang Ming-li. Research on quantifying R and D experience uncertainty of space systems by applying Markov information source entropy [J]. Engineering Theory and Practice, 2001, 7(21): 96-100.)
- [64] 王红卫, 李琛, 刘会新. 马尔可夫决策过程复杂性的熵测度[J]. 控制与决策, 2004, 19(9): 983-988.
(Wang Hong-wei, Li Chen, Liu Hui-xin. Entropic measurements of complexity for Markov decision processes[J]. Control and Decision, 2004, 19(9): 983-988.)
- [65] 米传民, 刘思峰, 党耀国, 等. 熵权聚类决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(12): 1823-1825.
(Mi Chuan-min, Liu Si-feng, Dang Yao-guo, et al. Study on grey entropy weight clustering decision-making [J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(12): 1823-1825.)