第 23 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2008 年 4 月
Vol. 23 No. 4 Control and Decision Apr. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)04-0378-04

非线性受控系统状态方程的任意阶近似解

曹少中[1,2], 刘贺平[1], 涂序彦[1]
(1. 北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083; 2. 北京印刷学院 信息与机电工程学院, 北京 102600)

摘 要: 针对工作在理想状态附近的受控系统,通过对其非线性状态方程进行 Taylor 展开,使之变为无穷级数形式的常微分方程组;然后在线性状态方程组解的基础上采用常数变异法,使之变换成积分方程;最后采用逐次逼近法求得非线性状态方程的任意阶近似解, 并进一步讨论了系统状态的方均包络矩阵的转移规律.

关键词: Taylor 展开; 包络矩阵; Volterra 积分方程; 任意阶近似解
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Any order approximate solution of state equation for nonlinear controlled systems

CAO Shao-zhong[1,2], *LIU He-ping*[1], *TU Xu-yan*[1]
(1. School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China; 2. College of Information and Mechanical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China. Correspondent: CAO Shao-zhong, E-mail: cszh6502@163.com)

Abstract: By making of the Taylor expansion, the nonlinear state equation of controlled systems under ideal state is converted to a set of ordinary differential equations with infinite series expression. Based on the solution of linear state equation system, the integral equation of the nonlinear state equation is obtained by using constant variation method. Finally, any order approximate solution of the nonlinear state equation is given by using successive approximation method, and the transfer rules of mean square envelope matrix for the state of nonlinear systems is also discussed.

Key words: Taylor expansion; Matrix of envelope; Volterra's integral equation; Any order approximate solution

1 引 言

对于一个实际系统:第一,其实际工作状态不可能是确定的,总是工作在一个理想的状态附近;第二,总是存在各种非线性因素,其状态方程一般是非线性的.基于第一点,早期发展起来的经典控制论是建立在线性理论基础上的,但是随着控制论本身的发展和实际的需要,随后人们对非线性控制理论给予了越来越多的关注[1-8].

本文基于第一点的基本假设,通过对一般形式的非线性方程作 Taylor 展开,使之变换成方程右边是无穷级数式的非线性常微分方程;然后利用自由线性状态方程的线性解,通过常数变易法将其变换成第二类非线性 Volterra 积分方程,采用逐次逼近法求得任意阶近似解的解析表达式;最后,利用所求得的解,进一步研究了系统状态变量的均方包络矩阵的转移规律.

2 线性状态方程的解及包络矩阵转移方程

2.1 线性状态方程的解

设系统的运行状态可用一组状态变量来描述,写成向量形式为

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)]^{\mathrm{T}}. \qquad (1)$$

式中: $X(t)$ 为状态向量, $X(t) \in R^n$; $X_i(t)$ 为状态变量(标量), $i = 1, 2, \cdots, n$, n 为维数(有限正整数), t 为自变量时间; R^n 为 n 维状态空间.

设期望和设计的系统理想工作状态可用一组理想状态变量来描述,写成向量形式为

$$X_C = [X_{C1}, X_{C2}, \cdots, X_{Cn}]^{\mathrm{T}}. \qquad (2)$$

进行坐标平移变换,将 n 维状态空间的原点移到理想状态向量所对应的点上来,即令

$$x_i(t) = X_i(t) - X_{ci},$$
$$i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (3)$$

当系统处于控制变量作用下时,被控制对象状

收稿日期: 2006-12-21; **修回日期**: 2007-03-16.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60375038,60374032,60673101); 国家 863 计划项目(2006AA04Z110).
作者简介: 曹少中(1965—),男,河北保定人,副教授,博士后,从事智能控制、非线性系统控制等研究; 刘贺平(1951—),男,沈阳人,教授,博士生导师,从事自适应控制、预测控制等研究.

态的动态过程,由包含状态变量和控制变量的微分方程组来描述,其一般形式为非线性、变系数、一阶微分方程组,即

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_m, t),\quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

式中:$x_i(t)$ 为状态变量,$u_j(t)$ 为控制变量,f_i 为非线性函数,$\dot{x}_i(t) = \mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t$ 状态变量的一阶微分,t 为自变量(时间).

对于线性时变系统,其状态方程为线性变系数一阶常微分方程组,即

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{5}$$

式中:$x(t) = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 为状态向量,$u(t) = [u_1, u_2, \cdots, u_m]^{\mathrm{T}}$ 为控制向量,

$$A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

为对象矩阵(描述被控对象特性),

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2m}(t) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

为控制矩阵(描述控制机构特性).

线性状态方程(5) 的解为

$$x(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)U(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

式中:$x(0)$ 为初始条件;$R(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵,一般形式为

$$R(t) = I + \int_0^t A_1(t_1)\,\mathrm{d}t_1 + \int_0^t\int_0^t A(t_1)A(t_2)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 + \cdots + \int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^{t_{n-1}} A(t_1)\times A(t_2)\cdots A(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 + \cdots. \tag{7}$$

下面采用时变矩阵指数法求解出与式(7) 等价的简洁形式,用 $\mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}$ 左乘以方程(5) 并移项,有

$$\mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}\dot{x}(t) - \mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}A(t)x(t) = \mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}B(t)u(t).$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}x(t)\right] = \mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}\dot{x}(t) - \mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}A(t)x(t), \tag{8}$$

所以式(8) 可以写为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}x(t)\right] = \mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}B(t)u(t). \tag{9}$$

将式(9) 在 0 到 t 区间上积分,得到

$$\mathrm{e}^{-\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}x(t) = Ix(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int A(\tau')\mathrm{d}\tau'}B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

两边左乘以 $\mathrm{e}^{\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}$,则有

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}x(0) + \mathrm{e}^{\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int A(\tau')\mathrm{d}\tau'}B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t \mathrm{e}^{-\int A(\tau')\mathrm{d}\tau'}B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

即

$$R(t) = \mathrm{e}^{\int A(\tau)\mathrm{d}\tau}. \tag{10}$$

显然,当 A 与时间无关时,式(10) 变为通常的定常状态转移矩阵

$$R = \mathrm{e}^{At}. \tag{11}$$

2.2　包络矩阵的转移方程

现在讨论在线性近似下系统方均包络矩阵的转移,令

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1(t) & \cdots & x_1(t) \\ x_2(t) & x_2(t) & \cdots & x_2(t) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_n(t) & x_n(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

为 $n\times n$ 矩阵,则系统状态的方均包络矩阵为

$$\sigma(t) = \langle \tilde{x}(t)\cdot\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\rangle = \begin{bmatrix} \langle x_1(t)x_1(t)\rangle & \langle x_1(t)x_2(t)\rangle & \cdots & \langle x_1(t)x_n(t)\rangle \\ \langle x_2(t)x_1(t)\rangle & \langle x_2(t)x_2(t)\rangle & \cdots & \langle x_2(t)x_n(t)\rangle \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n(t)x_1(t)\rangle & \langle x_n(t)x_2(t)\rangle & \cdots & \langle x_n(t)x_n(t)\rangle \end{bmatrix}, \tag{13}$$

式中“$\langle\rangle$”为求统计平均值.为书写方便,令

$$G(t) = R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

于是线性状态方程(5) 的解式(6) 可改写为

$$x(t) = R(t)x(0) + G(t). \tag{15}$$

将式(15) 代入式(12),则有

$$\tilde{x}(t) = R(t)\tilde{x}(0) + \tilde{G}(t). \tag{16}$$

将式(16) 代入式(13),则得到在线性近似下系统方均包络矩阵转移方程为

$$\sigma(t) = \langle (R(t)\tilde{x}(0) + \tilde{G}(t))\cdot(R(t)\tilde{x}(0) + \tilde{G}(t))^{\mathrm{T}}\rangle.$$

注意到

$$\langle R(t)\tilde{x}(0)\cdot\tilde{G}^{\mathrm{T}}(t)\rangle = 0,$$
$$\langle \tilde{G}(t)\cdot(R(t)\tilde{x}(0))^{\mathrm{T}}\rangle = 0,$$

则有

$$\sigma(t) = \langle R(t)\tilde{x}(0) \cdot (R(t)\tilde{x}(0))^{\mathrm{T}}\rangle + \langle \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t)\rangle.$$

又因为

$$R(t)\tilde{x}(0) \cdot (R(t)\tilde{x}(0))^{\mathrm{T}} = R(t)\tilde{x}(0) \cdot \tilde{x}(0)R^{\mathrm{T}}(t),$$

$$\langle \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t)\rangle = \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t),$$

则上式变为

$$\sigma(t) = \langle \tilde{x}(t) \cdot \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\rangle = R(t)\langle \tilde{x}(0) \cdot \tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)\rangle R^{\mathrm{T}}(t) + \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t) = R(t)\sigma(0)R^{\mathrm{T}}(t) + \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t), \tag{17}$$

式中 $\sigma(0) = \langle \tilde{x}(0) \cdot \tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)\rangle$ 为初始状态方均包络矩阵.

当系统处于自由状态时, $\tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t) = 0$. 于是有

$$\sigma(t) = \langle \tilde{x}(t) \cdot \tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)\rangle = R(t)\sigma(0)R^{\mathrm{T}}(t). \tag{18}$$

比较式(17) 和(18),可以看出,系统处于被控制状态时,其状态变量的方均包络矩阵的增量为

$$\Delta\sigma(t) = \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t). \tag{19}$$

显然,对于一个有效的控制系统而言,该增量应小于零,即要求

$$\Delta\sigma(t) = \tilde{G}(t) \cdot \tilde{G}^{\mathrm{T}}(t) < 0;$$

否则,系统的工作状态就要失控,使之远离理想的稳定状态.

3 受控系统非线性状态方程的任意阶近似解

在非线性情况下,不失一般性,假定 $x_i(t)$ 与 $u_i(t)$ 之间藕和项是不可忽略的. 于是式(4) 的 Taylor 展开式可写为

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)u + \\ &\sum_{j_1=1}^{n+m}\sum_{j_2=2}^{n+m} a_{ij_1j_2}(t)y_{j_1}y_{j_2} + \\ &\sum_{j_1=1}^{n+m}\sum_{j_2=1}^{n+m}\sum_{j_3=1}^{n+m} a_{ij_1j_2j_3}(t)y_{j_1}y_{j_2}y_{j_3} + \cdots + \\ &\sum_{j_1=1}^{n+m}\sum_{j_2=1}^{n+m}\cdots\sum_{j_k=1}^{n+m} a_{ij_1j_2\cdots j_k}(t)y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_k} + \cdots, \\ &i = 1,2,\cdots,n.\end{aligned} \tag{20}$$

式中

$$y_{j_k} = \begin{cases} x_{j_k}, & j_k \leqslant n; \\ u_{j_k}, & n < j_k \leqslant n+m. \end{cases} \tag{21}$$

为了便于讨论,令

$$\begin{aligned}\Psi_i(y(t),t) = \Psi_i(x(t),u(t),t) = &\sum_{j_1=1}^{n+m}\sum_{j_2=1}^{n+m} a_{ij_1j_2}(t)y_{j_1}y_{j_2} + \\ &\sum_{j_1=1}^{n+m}\sum_{j_2=1}^{n+m}\sum_{j_3=1}^{n+m} a_{ij_1j_2j_3}(t)y_{j_1}y_{j_2}y_{j_3} + \cdots + \\ &\sum_{j_1=1}^{n+m}\sum_{j_2=1}^{n+m}\cdots\sum_{j_k=1}^{n+m} a_{ij_1j_2\cdots j_k}(t)y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_k} + \cdots, \\ &i = 1,2,\cdots,n.\end{aligned} \tag{22}$$

此式为高次项组成的列向量.

若将非线性微分方程(20) 写为矩阵形式,则有

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Psi(x(t),u(t),t), \tag{23}$$

式中 $\Psi = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \cdots \quad \Psi_n]^{\mathrm{T}}$.

为了求解非线性方程组(23),首先求解其齐次方程的解,然后采用常数变易法,求出与式(23) 等价的积分方程,最后采用逐次逼近法求解积分方程,从而得到式(23) 的任意阶近似解.

式(23) 的齐次方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{24}$$

其解为

$$x(t) = R(t)x(0). \tag{25}$$

式中 $R(t)$ 的表达式为式(7) 或(10),服从方程

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t). \tag{26}$$

采用常数变易法,设式(23) 的解为

$$x(t) = R(t)C(t), \tag{27}$$

式中 $C(t)$ 为待求函数列向量. 又根据 $R(t)$ 的初始条件 $R(0) = I$(单位矩阵),可知 $C(t)$ 的初始条件为 $C(0) = x(0)$.

将式(27) 代入式(23),有

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}C(t) + R(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)R(t)C(t) + B(t)u(t) + \Psi(x(t),u(t),t).$$

利用式(26),则上式变为

$$R(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = B(t)u(t) + \Psi(x(t),u(t),t). \tag{28}$$

将方程(28) 两边左乘以 $R^{-1}(t)$,并从 0 到 t 区间进行积分,可得 $C(t)$ 的表达式如下:

$$C(t) = x(0) + \int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x(\tau),u(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{29}$$

将式(29) 代入式(27),得到与微分方程(23) 等价的积分方程如下:

$$x(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau +$$

$$R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x(\tau),u(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{30}$$

方程(30)是第二类非线性 Volterra 积分方程,可用逐次逼近法求解[9,10]:零阶近似解

$$x(0) = Ix(0),$$

一阶近似解

$$x^1(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

二阶近似解

$$x^2(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x^1(\tau),u(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

三阶近似解

$$x^3(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x^2(\tau),u(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$\cdots$

任意 N 阶近似解

$$x^N(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x^{N-1}(\tau),u(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{31}$$

$\cdots$

显然式(31)是一个递推公式,只要求得线性方程的解,就可以根据式(31),通过逐次逼近给出任意 N 阶近似解. 式中的

$$R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x^{N-1}(\tau),u(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

为任意 N 阶近似下的非线性效应项. 由此看出,非线性效应将使系统的状态远离所期望的设计的理想工作状态,它将使系统的各种可能状态在状态空间占据更大的区域,其区域的形状与线性状态相比将发生畸变. 因此,为了保证一个受控系统工作在理想的工作状态附近,应在设计结构、元件选择及生产工艺上尽最大努力地将非线性效应降到最低限度.

若 $u(t) = 0$,则式(31)兑化为非线性自由状态下的结果为

$$x^N(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)\Psi(x^{N-1}(\tau),u(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

该结果首先由文献[9,10]给出.

若 $\Psi = 0$,则式(31)兑化为通常的在控制变量作用下的线性结果

$$x(t) = R(t)x(0) + R(t)\int_0^t R^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

4　结　　论

从线性状态方程的解出发,得到受控非线性系统线性近似下的方均包络矩阵转移方程,并讨论了系统的稳定性. 通过常数变易法,求出非线性状态方程的等价积分方程,采用逐次逼近法,严格导出了非线性状态方程的任意阶近似解的递推公式.

参考文献(References)

[1] Alberto Isidori. Nonlinear control systems[M]. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995.

[2] 洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(Hong Yi-guang, Cheng Dai-zhan. Analysis and control on nonlinear systems [M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[3] Liberzon D, Mores A S. Basic problems on stability and design of switched systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 34(10): 1914-1946.

[4] Hong Y, Wang J, Cheng D. Adaptive finite time stabilization of class of nonlinear systems [C]. IEEE CDC. Paradise Island: Springer, 2004: 207-212.

[5] Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems [J]. SIAM J Control Optimation, 2005, 43(7): 1253-1271.

[6] Panteley E, Loria A. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade [J]. System Control Letters, 1998, 33(2): 131-138.

[7] Aeyels D. A new asymptotic stability criterion for nonlinear time-variant differential equations [J]. IEEE Trans Automatic Control, 1998, 43(7): 968-990.

[8] Ronald M. Hirschorm. Generalized sliding-mode control for multi-input nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(9): 1410-1422.

[9] 刘纯亮, 谢羲. 加速器非线性动力系统 Volterra 积分方程任意阶近似解析解[J]. 核科学与工程, 1992, 12(2): 161-168.
(Liu Chun-liang, Xie Xi. Any order approximate analytical solution of the nonlinear Volterra's integral equation for accelerator dynamic systems[J]. Chinese J of Nuclear Science and Engineering, 1992, 12(2): 161-168.)

[10] Liu Chun-liang, Xie Xi, Chen Yin-bao. Any order approximate analytical solution of the nonlinear Volterra's integral equation for accelerator dynamic systems[J]. Chinese J Nuclear Physics, 1991, 13(3): 261-264.