

文章编号: 1001-0920(2008)04-0382-06

非线性系统的输入多采样率模糊优化控制

蒋林¹, 肖建¹, 黄景春^{1,2}, 周聪¹

(1. 西南交通大学 电气工程学院, 成都 610031; 2. 兰州交通大学 机电与动力工程学院, 兰州 730070)

摘要: 基于多采样率数字控制理论, 讨论了非线性连续被控对象和输入多采样率模糊控制器的设计问题. 提出用线性矩阵不等式凸优化技术构建非线性系统的输入多采样率 T-S 模糊模型, 并相应地研究了基于优化区域极点配置的 PDC 状态反馈控制. 通过解代数 Riccati 方程得到控制器的参数, 给出了优化数字控制器的设计算法和闭环系统的稳定性条件. 计算机仿真表明了所提出方法的有效性.

关键词: 非线性系统; T-S 模糊模型; 多采样率数字控制; LMI 优化技术; 优化区域极点配置

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Multirate input fuzzy optimal control for nonlinear systems

JIANGLin¹, XIAO Jian¹, HUANG Jing-chun^{1,2}, ZHOU Cong¹

(1. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. School of Mechatronics and Power Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China. Correspondent: JIANG Lin, E-mail: jlin57@163.com)

Abstract: Based on the multirate digital control theory, the problem of designing a multirate input fuzzy controller for a nonlinear continuous plant is discussed. The multirate input Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model is obtained by using a convex optimization subject to a set of linear matrix inequalities (LMIs). Then, the corresponding parallel distributed compensation (PDC) state feedback control based on optimal D-pole assignment is investigated and the control law is determined by solving an algebraic Riccati equation. An optimal controller design algorithm and stability condition of the closed system are derived. Computer simulation shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Nonlinear systems; T-S fuzzy model; Multirate digital control; LMI optimization; Optimal D-pole assignment

1 引言

随着计算机和现代电子技术的飞速发展, 数字控制器已广泛应用于航天器、机器人、混沌系统等复杂系统. 尤其是多采样率数字控制系统具有提高系统性能、适应多种复杂实际情况等优点, 在工业控制中得到了日益广泛的应用. 因此, 国内外许多学者^[1-3]对多采样率控制系统进行了大量的研究. 另一方面, 基于 T-S 模糊模型^[4]的非线性系统建模和控制, 已成为模糊控制领域中的一个重要研究方向^[3,5-8]. Hu 等^[3,7]基于 T-S 模糊模型研究了非线性系统的数字控制问题.

近十几年来, 许多学者^[9,10]关注区域极点配置 (D-极点配置) 问题, 并取得了一些成果. 但这些研究多局限于线性系统, 应用于非线性系统的研究成果还相对较少. 另外, 将多采样率控制应用于模糊系统

的研究也很少. 因此, 融合多采样率思想和区域极点配置, 研究非线性系统的模糊优化控制是具有理论意义和实用价值的.

本文以文献[2,8,9]为基础, 基于线性多采样率数字控制理论, 提出用 LMI 优化技术^[11]构建非线性系统的输入多采样率 T-S 模糊模型, 研究了优化区域极点配置的并行分布补充 (PDC) 控制, 通过解代数 Riccati 方程得到控制器的参数. 倒立摆仿真实例验证了本文所提方法的有效性.

2 输入多采样率模糊系统建模

考虑如图 1 所示的非线性系统和模糊数字控制器. 其中: Plant 为连续被控对象, C_{dF} 为输入多采样率模糊控制器, ZOH 为零阶保持器. 控制器 C_{dF} 输出 u_i 的采样周期为 T_{u_i} , 而系统输出各分量的采样周期

收稿日期: 2006-12-28; 修回日期: 2007-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60674057); 高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20060613003).

作者简介: 蒋林 (1974—), 男, 四川宣汉人, 博士生, 从事模糊控制、计算机控制等研究; 肖建 (1950—), 男, 湖南衡阳人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、鲁棒控制及计算机等研究.

均为 T_0 . 假定 T_{u_i} 和 T_0 之间满足 $N_i = T_0 / T_{u_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, N_i 为正整数. 记 $N = \text{LCM}(N_1, N_2, \dots, N_m)$, $\text{LCM}(\cdot)$ 表示最小公倍数. 称 $T = T_0 / N$ 为基本采样周期, T_0 为帧周期.

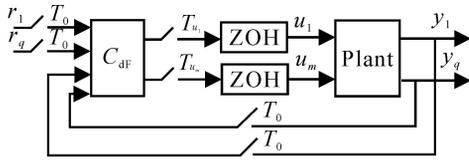


图 1 模糊输入多采样率数字控制系统

设由 T-S 模糊模型描述的非线性系统为
 $R_i: \text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i_1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{i_p},$

Then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{c_i} x(t) + B_{c_i} u(t), \\ y(t) = C_{c_i} x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

其中: R_i 是模糊规则, $i \in I_r = \{1, 2, \dots, r\}$; $z_j(t)$ 是第 j 个模糊前件变量, $j \in I_p = \{1, 2, \dots, p\}$; M_{ij} 是模糊集合, $(i, j) \in I_r \times I_p$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 分别为系统状态、输入和输出向量; $(A_{c_i}, B_{c_i}, C_{c_i})$ 为第 i 个子系统相容维数的矩阵. 模糊系统的全局输出为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \\ y(t) = C_c x(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$A_c = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i(z(t)) A_{c_i}, B_c = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i(z(t)) B_{c_i},$$

$$C_c = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i(z(t)) C_{c_i}, \quad \bar{w}_i(z(t)) = 1,$$

$$\bar{w}_i(z(t)) = w_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0,$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)),$$

$M_{ij}(z_j(t))$ 是前件变量 $z_j(t)$ 属于模糊集合 M_{ij} 的隶属度.

下面考虑系统(2)的离散化问题, 由于系统是时变非线性的, 不能直接应用线性时不变系统的离散化方法. 若基本采样周期 T 充分小, 则采用文献[8]的方法, 可得到该系统以 T 为采样周期的离散模型如下:

$$\begin{cases} x(kT + T) = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i(G_i x(kT) + H_i u(kT)), \\ y(kT) = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i(C_{c_i} x(kT)). \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$G_i = e^{A_{c_i} T}, \quad (4)$$

$$H_i = \int_0^T e^{A_{c_i} t} B_{c_i} dt. \quad (5)$$

矩阵 G_i 和 H_i 的具体计算方法见参考文献[8]. 这里, 简记 $\bar{w}_i = \bar{w}_i(z(kT))$, $\bar{w}_i = \bar{w}_i(z(kT_0))$. 为了获得多采样率数字控制系统, 先给出下面的假设.

假设 1 第 i 条模糊规则的模糊基函数 $\bar{w}_i(z(t))$ 在时间段 $t \in [kT_0, (k+1)T_0)$ 内用 $\bar{w}_i(z(kT_0))$ 来近似表示.

显然, 若帧周期 T_0 足够小, 假设 1 均能成立.

定理 1 若系统(2)的采样周期 T_0 满足假设 1, 则该系统的输入多采样率模糊控制系统模型为

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_N=1}^r \bar{w}_{i_1 \dots i_N} [G_{i_1 \dots i_N} x(kT_0) + H_{i_1 \dots i_N} u_E(kT_0)], \\ y(kT_0) = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i C_{c_i} x(kT_0). \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$G_{i_1 \dots i_N} = \prod_{l=1}^N G_{i_l}, H_{i_1 \dots i_N} = [H_{i_1 \dots i_N(j)}]_{1 \times m},$$

$$H_{i_1 \dots i_N(j)} = \int_0^{T_0} e^{(N-l_j)A_{c_i} t} B_{c_i} dt, \quad l_j = 1, 2, \dots, N_j, \quad \bar{w}_{i_1 \dots i_N} = \prod_{l=1}^N \bar{w}_{i_l},$$

$H_{i(j)}$ 是 H_i 的第 j 列, $G_{i_l} = G_{i_l}$, $G_{i_v} = G_{i_v}$, $l_j = N / N_j$, $l = 1, 2, \dots, N$, $v = 1, 2, \dots, l_j$, $\bar{w}_{i_1 \dots i_N} = \prod_{l=1}^N \bar{w}_{i_l}$, $\bar{w}_{i_l} = \bar{w}_{i_l}$, 指标集 $(i_1, i_2, \dots, i_N) \in I_r \times \dots \times I_r$.

证明 首先引入如下的输入扩展向量:

$$u_E(kT_0) = [u_1(kT_0) \dots u_1(kT_0 + (N_1 - 1)T_{u_1}), \dots, u_m(kT_0) \dots u_m(kT_0 + (N_m - 1)T_{u_m})]^T.$$

将线性系统多采样率控制理论推广到系统(2), 可得到以 T_0 为采样周期的多采样率控制系统模型

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = Gx(kT_0) + Hu_E(kT_0), \\ y(kT_0) = Cx(kT_0). \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$G = (e^{A_c T_0})^N, C = \sum_{i=1}^r \bar{w}_i C_{c_i}, H = [H_j]_{1 \times m},$$

$$H_j = [e^{(N-l_j)A_c T_0} B_j \dots e^{l_j A_c T_0} B_j]_{1 \times m},$$

$$l_j = N / N_j, B_j = \int_0^{T_{u_j}} e^{A_c t} B_{c_j} dt,$$

B_c^j 为 B_c 的第 j 列, 其表达形式参见文献[2]. 由于 A_c, B_c, C_c 的时变非线性, 实际计算变得复杂得多,

若 T_0 满足假设 1, 则它们将变为常矩阵, 可运用线性系统的处理方法来计算矩阵 G 和 H .

将式(4)和(5)代入(7), 有

$$G = (e^{A_c T})^N \left(\prod_{i=1}^r \bar{G}_i \right)^N = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^r \bar{G}_{i_1 \dots i_N} G_{i_1 \dots i_N}, \quad (8)$$

$$B_j = \int_0^{T_{u_j}} e^{A_c B^j} d = (e_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} T_{u_j} - I) \left(\prod_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} \right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^r \bar{B}_{c_i}^j \right) = (e_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} T_{u_j} - I) (e_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} T - I)^{-1} \times (e_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} T - I) \left(\prod_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} \right)^{-1} \left(\prod_{i=1}^r \bar{B}_{c_i}^j \right) [I + e_{i=1}^r \bar{A}_{c_i} T + \dots + e_{i=1}^r \bar{A}_{c_i}^{(l_j-1)} T] \left(\prod_{i=1}^r \bar{H}_{i(j)} \right) = \prod_{i_1=1}^r \dots \prod_{i_{l_j}=1}^r \bar{A}_{i_1 \dots i_{l_j}} [I + \prod_{v=1}^{l_j-1} \bar{G}_v] H_{i(j)}, H_j = [e^{(N-l_j)A_c T} B_j \dots e^{l_j A_c T} B_j \quad B_j] = \prod_{i_1=1}^r \dots \prod_{i_{N-l_j}=1}^r \bar{G}_{i_1 \dots i_{N-l_j}} \prod_{i_{l_j}=1}^{l_j} \bar{G}_{i_{l_j}} [I + \prod_{v=1}^{l_j-1} \bar{G}_v] H_{i(j)}. \quad (9)$$

显然, 式(8)和(9)可进一步描述为(6).

由于系统(6)相当于含有 r^N 条模糊规则, 规则数的增加将直接导致控制系统的分析与设计的困难. 为此, 利用系统等价原理和 LMI 优化技术^[11] 来减少模糊规则数, 最终有如下定理.

定理 2 如果存在充分小的 $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ 和常数矩阵 G_i, H_i , 满足如下优化问题:

$$\min_{G_i}, \text{ s. t. } \begin{bmatrix} -I & * \\ G_{i_1 \dots i_N} - G_{i_1 \dots i_N} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i_1, i_2, \dots, i_N \in I_r, \quad (10)$$

$$\min_{H_i}, \text{ s. t. } \begin{bmatrix} -I & * \\ H_{i_1 \dots i_N} - H_{i_1 \dots i_N} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i_1, i_2, \dots, i_N \in I_r, \quad (11)$$

则系统(6)可等价地转换为仅含有 r 条模糊规则的输入多采样率模糊控制系统模型

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = \prod_{i=1}^r \bar{G}_i [G_i x(kT_0) + H_i u_E(kT_0)], \\ y(kT_0) = \prod_{i=1}^r \bar{C}_{c_i} x(kT_0), \end{cases} \quad (12)$$

其中“*”表示矩阵对称位置元素的转置.

证明 由模糊基函数 $\prod_{i=1}^r \bar{G}_i = 1$ 的性质, 式(12)

可改写为

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = \prod_{i_1=1}^r \dots \prod_{i_N=1}^r \bar{G}_{i_1 \dots i_N} [G_{i_1 \dots i_N} x(kT_0) + H_{i_1 \dots i_N} u_E(kT_0)], \\ y(kT_0) = \prod_{i=1}^r \bar{C}_{c_i} x(kT_0). \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$G_{i_1 \dots i_N} = \prod_{l=1}^N G_{i_l}, H_{i_1 \dots i_N} = \prod_{l=1}^N H_{i_l},$$

$$G_{i_l} = G_i, H_{i_l} = H_i.$$

如果初始条件相同, 系统(6)和(13)的状态解也相等, 那么它们至少是在状态匹配意义下的等效系统. 此时, 其系统矩阵应该满足

$$G_{i_1 \dots i_N} - G_{i_1 \dots i_N} < \epsilon^2 I, \quad (14)$$

$$H_{i_1 \dots i_N} - H_{i_1 \dots i_N} < \delta^2 I. \quad (15)$$

直接求解上面的非线性方程组并不是一件十分容易的事. 为此, 引入矩阵 2-范数, 可将上述方程组的求解问题转换成如下的优化问题(其中 ϵ, δ 为充分小的正数):

$$(G_{i_1 \dots i_N} - G_{i_1 \dots i_N})^T (G_{i_1 \dots i_N} - G_{i_1 \dots i_N}) < \epsilon^2 I, \quad (16)$$

$$(H_{i_1 \dots i_N} - H_{i_1 \dots i_N})^T (H_{i_1 \dots i_N} - H_{i_1 \dots i_N}) < \delta^2 I. \quad (17)$$

利用 Schur 补性质, 式(16), (17)可分别等价地描述为(10), (11).

因此, 若存在充分小的正数 ϵ, δ , 使得式(10)和(11)成立, 则系统(6)和(13)是等效的, 再由系统(12)和(13)的等效性, 可知系统(6)和(12)是等价的.

注 1 令 $T_{u_1} = \dots = T_{u_m} = T_0$, 这对应于单采样率模糊控制, 并将其代入式(6), 可得到如下推论.

推论 1 若系统(2)的采样周期 T_0 满足假设 1, 则此系统的离散模型为

$$\begin{cases} x((k+1)T_0) = \prod_{i=1}^r \bar{G}_i (\bar{G}_i x(kT_0) + \bar{H}_i u(kT_0)), \\ y(kT_0) = \prod_{i=1}^r \bar{C}_{c_i} x(kT_0). \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{G}_i &= e^{A_c T_0}, \\ \bar{H}_i &= \int_0^{T_0} e^{A_c t} B_c dt. \end{aligned}$$

3 区域极点配置和优化控制器设计

本节讨论基于优化区域极点配置的多采样率模糊控制器镇定非线性系统,此问题描述如下.

问题 1 针对系统(1)的第 i 个子系统,设计输入多采样率模糊 PDC 状态反馈控制

$$R_i: \text{If } z_1(kT_0) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots z_p(kT_0) \text{ is } M_{ip},$$

$$\text{Then } u_E(kT_0) = K_i x(kT_0), \quad (19)$$

使得下面的二次型性能指标最小,且第 i 个子模型闭环系统极点均位于复平面的负半平面内:

$$J_i = \int_0^{\infty} [x(t)^T Q_i x(t) + u(t)^T R_i u(t)] dt. \quad (20)$$

其中: Q_i 为半正定矩阵, R_i 为正定矩阵.

3.1 区域极点配置

下面讨论离散系统 $x_{k+1} = G_i x_k + H_i u_k$ 的区域极点配置问题,首先引入如下引理.

引理 1^[9] 矩阵 G_i 的特征值均位于单位圆中圆盘 $D(r, r)$ 内的充分必要条件是矩阵方程

$$-G_i^H X - X G_i + G_i^H X G_i + (r^2 - r^2) X = -Q \quad (21)$$

存在正定解 X . 其中: Q 为正定矩阵,上标 H 表示共轭转置, $D(r, r)$ 是以 $(0, 0)$ 为圆心 r 为半径的圆.

设状态反馈 $u_k = K_i x_k$,由引理 1, 可得到闭环系统全部特征值都配置在圆盘 $D(r, r)$ 内的条件.

引理 2^[9] 闭环系统 $G_i + H_i K_i$ 的特征值均位于圆盘 $D(r, r)$ 内的充分必要条件是矩阵方程

$$-(G_i + H_i K_i)^H X - X(G_i + H_i K_i) + (G_i + H_i K_i)^H X(G_i + H_i K_i) + (r^2 - r^2) X = -Q \quad (22)$$

存在正定解 X .

3.2 优化控制器设计

根据引理 2,研究系统(12)第 i 个子模型的优化区域极点配置问题. 首先,以 T_0 为采样周期,将性能指标式(20)离散为

$$J_{iM} = \int_{kT_0}^{\infty} [x^T(kT_0) Q_{iM} x(kT_0) + 2x^T(kT_0) S_{iM} u_E(kT_0) + u_E^T(kT_0) R_{iM} u_E(kT_0)] dt. \quad (23)$$

其中

$$\phi(t) = e^{A_c t}, \quad \bar{\phi}(t) = \int_0^t \phi(\tau) d\tau,$$

$$N N = \sum_{i=1}^m N_i, S_{iM} = [M_{jk_j}]_{1 \times nN},$$

$$j = [\Phi(-T_{u_j}) \Phi(-2T_{u_j}) \dots \Phi(-T_0)],$$

$$Q_{iM} = \int_0^{T_0} \Phi^T(t) Q_i(t) \Phi(t) dt,$$

$M_{jk_j} = Q_{iM} \Phi(-k_j T_{u_j}) (T_{u_j}) B_{c_i}^j$, $B_{c_i}^j$ 为 B_{c_i} 的第 j 列向量. 不失一般性,设

$$R_i = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_m\},$$

$$R_{iM} = [N_{jk}]_{m \times m} + \text{diag}\{R_i^1, \dots, R_i^m\},$$

$$N_{jk} = (B_{c_i}^j)^T (T_{u_j})^T Q_{iM} (T_{u_k}) B_{c_i}^k,$$

$$R_i^j = \text{diag}\{T_{u_j} r_j, \dots, T_{u_j} r_j\},$$

$$1 \leq i \leq r, 1 \leq j, k \leq m, 1 \leq k_j \leq N_j.$$

注 2 令 $T_{u_1} = \dots = T_{u_m} = T_0$,代入式(23), 得到单采样率时离散性能指标

$$\bar{J}_i = \int_{kT_0=0}^{\infty} [x^T(kT_0) \bar{Q}_i x(kT_0) + 2x^T(kT_0) \bar{S}_i u(kT_0) + u^T(kT_0) \bar{R}_i u(kT_0)]. \quad (24)$$

其中

$$\phi(t) = e^{A_c t}, \quad \bar{\phi}(t) = \left(\int_0^t \phi(\tau) d\tau \right) B_{c_i},$$

$$\bar{Q}_i = \int_0^{T_0} \bar{\phi}^T(t) Q_i \bar{\phi}(t) dt,$$

$$\bar{S}_i = \int_0^{T_0} \bar{\phi}^T(t) Q_i(t) dt,$$

$$\bar{R}_i = T_0 R_i + \int_0^{T_0} \bar{\phi}^T(t) Q_i(t) dt.$$

这样,问题 1 可等价地转换成以下问题.

问题 2 确定数字控制律 $u_E(kT_0) = K_i x(kT_0)$,使得系统(12)第 i 个子模型的二次型性能指标式(23)最小,且闭环极点均在圆盘 $D(r, r)$ 内.

该问题可通过下面的定理求解.

定理 3 存在状态反馈控制律

$$u_E(kT_0) = -(r^2 R_{iM} + H_i^T X H_i)^{-1} (H_i^T X (G_i - I) + r^2 S_{iM}^T) x(kT_0), \quad (25)$$

使系统(12)闭环极点均位于 $D(r, r)$ 内,并满足性能指标(23)的最优控制. 其充要条件是 Riccati 方程

$$X = \frac{(G_i - I)^T}{r} X \frac{(G_i - I)}{r} - \frac{(G_i - I)^T}{r} X H_i (r^2 R_{iM} + H_i^T X H_i)^{-1} H_i^T X \frac{(G_i - I)}{r} + Q_{iM} \quad (26)$$

存在正定对称解 X . 其中

$$G_i = G_i - H_i R_{iM}^{-1} S_{iM}^T,$$

$$Q_{iM} = Q_{iM} - S_{iM} R_{iM}^{-1} S_{iM}^T.$$

证明类似于文献[9]中定理 2, 只需作适当修改.

注 3 令 $T_{u_1} = \dots = T_{u_m} = T_0$, 将式(18) 和 (24) 代入式(26) 中, 得到单采样率模糊优化控制.

推论 2 存在单采样率状态反馈控制

$$u(kT_0) = - (r^2 \bar{R}_i + \bar{H}_i^T X \bar{H}_i)^{-1} (\bar{H}_i^T X (\bar{G}_i - I) + r^2 \bar{S}_i^T) x(kT_0),$$

使系统(18) 闭环极点均位于 $D(\cdot, r)$ 内, 并满足性能指标(24) 的最优控制. 其充要条件是 Riccati 方程

$$X = \frac{(\bar{G}_i - I)^T}{r} X \frac{(\bar{G}_i - I)}{r} - \frac{(\bar{G}_i - I)^T}{r} X \bar{H}_i (r^2 \bar{R}_i + \bar{H}_i^T X \bar{H}_i)^{-1} \bar{H}_i^T X \frac{(\bar{G}_i - I)}{r} + \bar{Q}_i$$

存在正定对称解 X . 其中

$$\begin{aligned} \bar{G}_i &= G_i - \bar{H}_i \bar{R}_i^{-1} \bar{S}_i^T, \\ \bar{Q}_i &= Q_i - \bar{S}_i \bar{R}_i^{-1} \bar{S}_i^T. \end{aligned}$$

虽然, 前面得到的控制增益可镇定各子系统, 但它并不能保证模糊系统全局闭环稳定. 为此, 下面讨论非线性系统的闭环稳定问题.

将式(19) 代入(12), 得到闭环系统

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = \prod_{i=1}^r (G_i + H_i K_i) x(kT_0), \\ y(kT_0) = \prod_{i=1}^r C_i x(kT_0). \end{cases} \quad (27)$$

该系统是否稳定可由下面的定理来判断.

定理 4^[6] 闭环系统(27) 是全局渐近稳定的充要条件是存在对称矩阵 P 和 X_{ij} , 满足下面的 LMIs:

$$P > 0, \quad (28a)$$

$$ii P_{ii} - P + X_{ii} < 0, i = 1, \dots, r, \quad (28b)$$

$$ij P_{ij} - P + X_{ij} < 0, i < j = 1, \dots, r, \quad (28c)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1r} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{2r} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ X_{1r} & X_{2r} & \dots & X_{rr} \end{bmatrix} > 0. \quad (28d)$$

其中

$$ii = G_i + H_i K_i,$$

$$ij = (G_i + H_i K_j + G_j + H_j K_i)/2.$$

最终, 优化控制器设计可归纳为以下算法:

Step1: 选取 $T_0, T_{u_i}, i = 1, \dots, m$, 得到输入多采样率 T-S 模糊模型(12);

Step2: 设 $i := 1$, 给定 Q_i, R_i 和圆盘 $D(\cdot, r)$, 由定理 3 求取状态反馈矩阵 K_i ;

Step3: $i := i + 1$, 判断 $i < r$ 是否成立. 若成立转入 Step2, 否则转入 Step4;

Step4: 将矩阵 G_i, H_i, K_i 代入定理 4 的 LMIs, 如果存在可行解, 停止, 否则转入 Step5;

Step5: 减小采样周期或调整 Q_i, R_i 和 $D(\cdot, r)$, 重复上述过程, 直到定理 4 的 LMIs 存在可行解为止.

4 仿真实例

考虑小车上的倒立摆系统, 其动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g \sin x_1(t) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t))/2}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))} - \frac{au(t) \cos x_1(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))}. \end{cases}$$

其中: x_1 和 x_2 分别为摆杆与垂直方向的偏角和摆杆的角速度, u 为作用于小车上的力, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, M 为小车质量, m 是摆杆质量, $2l$ 为摆长, $a = 1/(m + M)$.

建立两规则 T-S 模糊模型, 按照本文提出方法将其离散, 得到输入多采样率模糊控制系统模型

$$R_1: \text{If } x_1(kT_0) \text{ is about } 0,$$

Then

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = G_1 x(kT_0) + H_1 u_E(kT_0), \\ y(kT_0) = C_1 x(kT_0), \end{cases}$$

$$R_2: \text{If } x_1(kT_0) \text{ is about } \pm \pi/2 (\pi/2 < x_1 < 3\pi/2),$$

Then

$$\begin{cases} x[(k+1)T_0] = G_2 x(kT_0) + H_2 u_E(kT_0), \\ y(kT_0) = C_2 x(kT_0), \end{cases}$$

其中 x_1 取高斯隶属度函数, 如图 2 所示. 这里取规则 2 中 $x_1 = \pm 88^\circ$. 仿真参数取: $m = 0.1 \text{ kg}, M = 1 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}, T_0 = 0.05 \text{ s}, T_{u_1} = T = 0.025 \text{ s}, x_0 = [30^\circ \ 0]^\top, Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_1 = R_2 = 0.1,$

$D(0.5, 0.5)$.

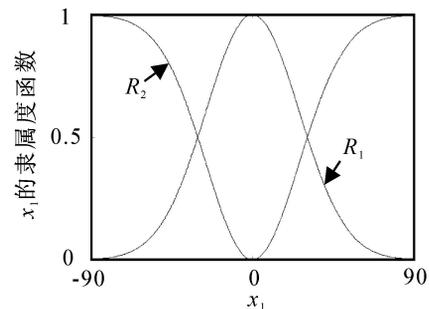


图 2 状态 x_1 的隶属度函数
由上述设计算法得到 PDC 多采样率数字控制

$$K_1 = \begin{bmatrix} -20.675 & -5.439 \\ -17.791 & -4.917 \end{bmatrix},$$

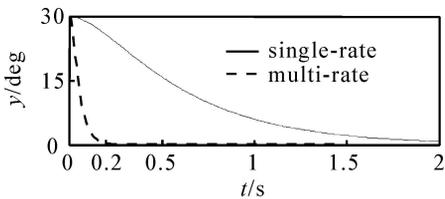
$$K_2 = \begin{bmatrix} -358.636 & -117.264 \\ -341.611 & -111.706 \end{bmatrix}.$$

令 $T_{u_1} = T_0$,其他仿真参数不变,由推论 1 和推论 2,可得到单采样率数字控制为

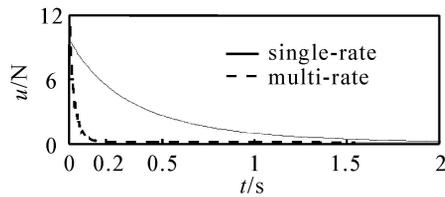
$$K_1 = [-18.464 \quad -5.130],$$

$$K_2 = [-309.334 \quad -101.135].$$

将得到的数字控制器作用于原非线性系统进行仿真,其系统输出和控制输入对时间的响应曲线如图 3 所示.显然,与单采样控制器相比,多采样率数字控制器只在控制量略微增加的情况下加快了系统的响应速度,快了近 $2\text{ s}/0.2\text{ s} = 10$ 倍.



(a) 输出曲线



(b) 控制量曲线

图 3 系统输出和控制量的响应曲线

5 结 论

本文研究了非线性系统的多采样率模糊控制问题.基于多采样率控制理论,利用 LMI 优化技术,得到了被控对象的输入多采样率 T-S 模糊模型.结合区域极点配置,研究了 PDC 模糊优化控制,通过解代数 Riccati 方程得到控制器的参数.仿真研究表明,系统实际输入量的增添加大了控制器设计的自由度,使系统性能得到了极大的改善.本文所提出方法拓展了非线性系统数字控制已有的研究成果.

参考文献(References)

[1] Araki M, Yamamoto K. Multivariable multirate

sampled-data systems: State-space description, transfer characteristics and nyquist criterion[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, 31(2):145-154.

[2] 肖建. 多采样率数字控制系统[M]. 北京:科学出版社, 2003.
(Xiao Jian. Multirate digital control systems [M]. Beijing: Science Press, 2003.)

[3] Hu Li-sheng, Huang Biao. Multirate robust digital control for fuzzy systems with periodic Lyapunov function[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2005, 13(4): 436-443.

[4] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.

[5] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1998, 6(2): 250-265.

[6] Kim E, Lee H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 523-534.

[7] Lee H J, Kim H, Joo Y H, et al. A new intelligent digital redesign for T-S fuzzy systems: Global approach [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2004, 12(2): 274-284.

[8] Kim D W, Park J B, Lee H J, et al. Discretisation of continuous-time T-S fuzzy system: Global approach[J]. IEE Proc Control Theory Application, 2006, 153(2): 237-246.

[9] Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(5): 423-427.

[10] 刘满, 井元伟, 张嗣瀛. 区域极点配置问题的研究方法[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 241-245.
(Liu Man, Jing Yuan-wei, Zhang Si-ying. Research approaches on pole assignment in specified region[J]. Control and Decision, 2005, 20(3): 241-245.)

[11] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.