第 23 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2008 年 5 月
Vol. 23 No. 5 Control and Decision May 2008

文章编号: 1001-0920(2008)05-0571-04

灰色随机线性时滞系统的渐近稳定性

苏春华[1,2], 刘思峰[1]
(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 信阳师范学院 数学与信息科学学院, 河南 信阳 464000)

摘 要:首先提出了灰色随机线性时滞系统及其渐近稳定性的概念;然后,利用矩阵理论和随机微分时滞方程解的渐近收敛定理及李雅普诺夫函数,研究了灰色随机线性时滞系统的渐近稳定性,得到了随机渐近稳定的几个充分性条件;最后,通过数值例子说明了所得结果在实际应用中的方便性和有效性.
关键词: 灰色; 随机线性时滞系统; 渐近稳定性; 李雅普诺夫函数; 区间灰矩阵
中图分类号: O231.1; O211.63 **文献标识码**: A

Asymptotic stability of grey stochastic linear delay systems

SU Chun-hua[1,2], *LIU Si-feng*[1]
(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China. Correspondent: SU Chun-hua, E-mail: chslg@tom.com)

Abstract: The concepts for grey stochastic linear delay systems and its asymptotic stability are proposed, and the asymptotic stability of grey stochastic linear delay systems is investigated by applying the theory of matrices and the asymptotic convergence theorem for stochastic differential delay equations and constructing the Lyapunov functions. Several sufficient conditions for stochastic asymptotic stabilities are obtained. Finally, a numerical example shows the convenience and effectiveness of the proposed sufficient conditions.
Key words: Grey; Stochastic linear delay systems; Asymptotic stability; Lyapunov function; Interval grey matrices

1 引 言

自从 1951 年伊藤引入随机积分以来,随机系统的稳定性理论得到了迅速发展,特别是在用李雅普诺夫方法研究随机系统的稳定性方面更是如此[1-3]. 近 10 多年来,有关不确定随机时滞系统的稳定性研究,已逐渐成为人们研究的热点,并取得了许多成果[4-9]. 但与确定性随机微分系统的研究相比,不确定随机时滞系统的稳定性研究还很不完善. 例如,对于时滞不确定随机系统的渐近稳定性问题,很少有相关的研究成果;而对于灰色随机时滞系统的渐近稳定性问题,甚至还没有任何结果. 因此,本文以文献[10]所提出的确定性随机微分时滞方程的定理为理论基础,研究灰色随机线性时滞系统的渐近稳定性问题.

2 系统描述

首先给出符号说明. 设 $h > 0$, $C([-h,0];R^n)$ 表示连续函数 $\phi:[-h,0]\to R^n$ 的全体. 令 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geq 0}, P)$ 表示一个具有 σ 流 $\{F_t\}_{t\geq 0}$ 满足通常条件(如右连续性和 F_0 包含所有 P 零测集)的完备概率空间. $C^2_{F_0}([-h,0];R^n)$ 表示 F_0 可测的取值于 $C([-h,0];R^n)$ 上的随机变量 $\xi=\{\xi(t):-h\leq t\leq 0\}$ 的全体,且 $\sup_{-h\leq t\leq 0} E|\xi(t)|^2<\infty$. $R_+=\{t:t\geq 0\}$, $C^{2,1}(R^n\times R_+;R_+)$ 表示定义在 $R^n\times R_+$ 上且除 $x=0$ 外,几乎处处关于 $x(x\in R^n)$ 二次连续可微和关于 $t(t\in R_+)$ 一次连续可微的非负函数 $V(x,t)$ 的类. $C(R^n\times R_+)$ 表示连续函数 $w:R^n\to R_+$ 的全体; $L^1(R_+;R_+)$ 表示满足 $\int_0^\infty \kappa(t)\,\mathrm{d}t<\infty$ 的函数 $\kappa:R_+\to R_+$ 的全体. 此外,用 A^{T} 表示矩阵(或向量) A 的转置; $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\mathrm{tr}(\cdot)$, $\|\cdot\|_2$ 和 $|\cdot|$ 分别表示矩阵的最大特征值,迹,2-范数和 R^n 上的 2-范数; $0\leq A$, $B\leq A$, $A\leq 0(<0)$, $A\leq B(<B)$ 依次表示矩阵 A 是非负矩阵, $0\leq A-B$, A 是半负定(负定)矩阵和 $A-$

收稿日期: 2007-02-26; **修回日期**: 2007-06-11.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037); 南京航空航天大学特聘教授科研创新基金项目(1009-26082).
作者简介: 苏春华(1965 —),男,河南上蔡人,博士生,从事系统工程和灰色系统理论的研究; 刘思峰(1955 —),男,河南驻马店人,教授,博士生导师,从事系统工程、灰色系统理论等研究.

$B\le 0(<0)$.

考虑 n 维随机线性时滞系统

$$\begin{cases} dx(t)= \\ [Ax(t)+Bx(t-h)]dt+ \\ \sum_{k=1}^{m}[C_k x(t)+D_k x(t-h)]dW_k(t), \\ x(t)=\xi(t),\ t\in[-h,0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中:h 为时滞常数;$x(t)\in R^n$;矩阵 A,B,C_k 和 D_k 均为 n 阶方阵;向量 $W(t)=[W_1(t),W_2(t),\cdots,W_m(t)]^{\mathrm T}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,F,\{F_t\}_{t\ge 0},P)$ 上的 m 维 Brown 运动,$W_k(t)\,(k=1,2,\cdots,m)$ 是一维 Brown 运动. 另外,在初始条件 $x(t)=\xi(t)\in C^2_{F_0}([-h,0];R^n)$ 下,方程(1) 的解记为 $x(t;\xi)$,并且相应于初始值 $\xi(t)=0$,平凡解 $x(t;0)\equiv 0$.

定义 1 如果系统(1) 的矩阵 A,B,C_k,D_k 中至少有一个是区间灰矩阵,则称此系统为区间灰色随机线性时滞系统.

为避免不必要的复杂运算和表示形式,本文研究 $m=1$ 时的灰色随机线性时滞系统,即

$$\begin{cases} dx(t)=[A(\otimes)x(t)+B(\otimes)x(t-h)]dt+ \\ \qquad [C(\otimes)x(t)+D(\otimes)x(t-h)]dW(t), \\ x(t)=\xi(t),\ t\in[-h,0]. \end{cases} \quad (2)$$

其中:区间灰矩阵 $A(\otimes),B(\otimes),C(\otimes),D(\otimes)$ 的上下界矩阵分别为:$\overline{A}$ 与 $\underline{A}$,$\overline{B}$ 与 $\underline{B}$,$\overline{C}$ 与 $\underline{C}$ 和 $\overline{D}$ 与 $\underline{D}$.

定义 2 如果对于区间灰矩阵 $A(\otimes),B(\otimes),C(\otimes),D(\otimes)$ 的任意白化矩阵 $A(\tilde{\otimes}),B(\tilde{\otimes}),C(\tilde{\otimes})$ 和 $D(\tilde{\otimes})$,都使白化后的系统(2) 是随机渐近稳定的,则称系统(2) 是随机渐近稳定的.

引理 1[4] 对于任意向量 $x,y\in R^n$ 及正实数 ε,有

$$2x^{\mathrm T}y\le \varepsilon x^{\mathrm T}x+\varepsilon^{-1}y^{\mathrm T}y.$$

引理 2 设 $A(\otimes)=(\otimes_{ij})_{n\times m}$ 为任一区间灰矩阵,其灰元素 $\otimes_{ij}\in[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$,则 $A(\otimes)$ 可表示为

$$A(\otimes)=\underline{A}+A_\gamma.$$

其中:$\underline{A}=(\underline{a}_{ij})_{n\times m}$,$A_\gamma=(g_{ij}\gamma_{ij})_{n\times m}$,$g_{ij}=\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}\ge 0$ 为白数,$\gamma_{ij}\in[0,1]$ 为灰数单位,而且 $0\le A_\gamma\le \overline{A}-\underline{A}$,$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$.

引理 3 对于系统(1),如果存在非负函数 $V\in C^{2,1}(R^n\times R_+;R_+)$,$\kappa\in L^1(R_+;R_+)$ 和 $w_1,w_2\in C(R^n;R_+)$,使得

$$\mathrm{L}V(x,y,t)\le \kappa(t)-w_1(x)+w_2(y). \quad (3)$$

其中:$(x,y,t)\in R^n\times R^n\times R_+$,$w_1(x)>w_2(x)$,$\forall x\ne 0$,而且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\inf\limits_{0\le t<\infty}V(x,t)=\infty$. 则对于任意初始条件 $\xi\in C^2_{F_0}([-h,0];R^n)$ 有

$$\lim_{t\to\infty}x(t;\xi)=0\quad \text{a.s.}$$

即系统(1) 是随机渐近稳定的.

$\mathrm{L}V$ 为 $R^n\times R^n\times R_+\to R$ 上的弱无穷小算子,即对于任意的 $V\in C^{2,1}(R^n\times R_+;R_+)$,有

$$\mathrm{L}V(x,y,t)= \\ V_t(x,t)+V_x(x,t)f(x,y,t)+ \\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{tr}[g_k^{\mathrm T}(x,y,t)V_{xx}(x,t)g_k(x,y,t)].$$

其中:$V_t(x,t)$,$V_x(x,t)$ 及 $V_{xx}(x,t)$ 分别是关于 t 和 x 的一阶和二阶偏导;$f(x,y,t)=Ax+By$;$g_k(x,y,t)=C_kx+D_ky$.

引理 3 的结论可由文献[10] 中的推论 3.1 得证.

3 主要结果

定理 1 对于系统(2),若存在正定对称矩阵 Q 和正常数 $\varepsilon_i\,(i=1,2,\cdots,6)$,满足 $M+N<0$,则对于任意的初始条件 $\xi\in C^2_{F_0}([-h,0];R^n)$ 有

$$\lim_{t\to\infty}x(t;\xi)=0\quad \text{a.s.} \quad (4)$$

即系统(2) 是随机渐近稳定的. 其中

$$M= \\ Q\underline{A}+\underline{A}^{\mathrm T}Q+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)Q+\varepsilon_1^{-1}\lambda_{\max}(Q)\times \\ \|\overline{A}-\underline{A}\|_2^2 I_n+(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)\underline{C}^{\mathrm T}Q\underline{C}+ \\ (1+\varepsilon_4^{-1})(1+\varepsilon_5)\lambda_{\max}(Q)\|\overline{C}-\underline{C}\|_2^2 I_n,$$

$$N= \\ \varepsilon_2^{-1}(1+\varepsilon_3^{-1})\lambda_{\max}(Q)\|\overline{B}-\underline{B}\|_2^2 I_n+\varepsilon_2^{-1}\times \\ (1+\varepsilon_3)\underline{B}^{\mathrm T}Q\underline{B}+(1+\varepsilon_5^{-1})(1+\varepsilon_6)\underline{D}^{\mathrm T}Q\underline{D}+ \\ (1+\varepsilon_5^{-1})(1+\varepsilon_6^{-1})\lambda_{\max}(Q)\|\overline{D}-\underline{D}\|_2^2 I_n,$$

这里 I_n 为单位矩阵.

证明 对任意给定的 $\xi\in C^2_{F_0}([-h,0];R^n)$,记方程(2) 的解 $x(t;\xi)=x(t)=x$,$x(t-h)=y$. 取 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm T}Qx$,Q 为正定对称矩阵. 则对于系统(2) 中的区间灰矩阵 $A(\otimes),B(\otimes),C(\otimes)$ 和 $D(\otimes)$ 的任意白化矩阵 $A(\tilde{\otimes}),B(\tilde{\otimes}),C(\tilde{\otimes})$ 和 $D(\tilde{\otimes})$,有

$$\mathrm{L}V(x,y,t)= \\ 2x^{\mathrm T}Q(A(\tilde{\otimes})x+B(\tilde{\otimes})y)+(C(\tilde{\otimes})x+ \\ D(\tilde{\otimes})y)^{\mathrm T}Q(C(\tilde{\otimes})x+D(\tilde{\otimes})y)= \\ 2x^{\mathrm T}QA(\tilde{\otimes})x+2x^{\mathrm T}QB(\tilde{\otimes})y+ \\ x^{\mathrm T}C^{\mathrm T}(\tilde{\otimes})QC(\tilde{\otimes})x+x^{\mathrm T}C^{\mathrm T}(\tilde{\otimes})QD(\tilde{\otimes})y+ \\ y^{\mathrm T}D^{\mathrm T}(\tilde{\otimes})QC(\tilde{\otimes})x+y^{\mathrm T}D^{\mathrm T}(\tilde{\otimes})QD(\tilde{\otimes})y.$$

而由引理 2 可知,$A(\tilde{\otimes})=\underline{A}+A_{\tilde{\gamma}}$,$B(\tilde{\otimes})=\underline{B}+B_{\tilde{\gamma}}$,$C(\tilde{\otimes})=\underline{C}+C_{\tilde{\gamma}}$,$D(\tilde{\otimes})=\underline{D}+D_{\tilde{\gamma}}$,再结合引

理1可得

$$2x^TQA(\widetilde{\otimes})x = x^T(Q\underline{A}+\underline{A}^TQ)x + 2x^TQA_{\tilde{\gamma}}x,$$

$$2x^TQA_{\tilde{\gamma}}x \le \varepsilon_1 x^TQx + \varepsilon_1^{-1}x^TA_{\tilde{\gamma}}^TQA_{\tilde{\gamma}}x,$$

$$2x^TQB(\widetilde{\otimes})y \le$$

$$\varepsilon_2 x^TQx + \varepsilon_2^{-1}y^TB^T(\widetilde{\otimes})QB(\widetilde{\otimes})y,$$

$$y^TB^T(\widetilde{\otimes})QB(\widetilde{\otimes})y =$$

$$y^T\underline{B}^TQ\underline{B}y + 2y^T\underline{B}^TQB_{\tilde{\gamma}}y + y^TB_{\tilde{\gamma}}^TQB_{\tilde{\gamma}}y,$$

$$2y^T\underline{B}^TQB_{\tilde{\gamma}}y \le \varepsilon_3 y^T\underline{B}^TQ\underline{B}y + \varepsilon_3^{-1}y^TB_{\tilde{\gamma}}^TQB_{\tilde{\gamma}}y,$$

$$x^TC^T(\widetilde{\otimes})QC(\widetilde{\otimes})x =$$

$$x^T\underline{C}^TQ\underline{C}x + 2x^T\underline{C}^TQC_{\tilde{\gamma}}x + x^TC_{\tilde{\gamma}}^TQC_{\tilde{\gamma}}x,$$

$$2x^T\underline{C}^TQC_{\tilde{\gamma}}x \le \varepsilon_4 x^T\underline{C}^TQ\underline{C}x + \varepsilon_4^{-1}x^TC_{\tilde{\gamma}}^TQC_{\tilde{\gamma}}x,$$

$$2x^TC^T(\widetilde{\otimes})QD(\widetilde{\otimes})y \le$$

$$\varepsilon_5 x^TC^T(\widetilde{\otimes})QC(\widetilde{\otimes})x + \varepsilon_5^{-1}y^TD^T(\widetilde{\otimes})QD(\widetilde{\otimes})y,$$

$$y^TD^T(\widetilde{\otimes})QD(\widetilde{\otimes})y =$$

$$y^T\underline{D}^TQ\underline{D}y + 2y^T\underline{D}QD_{\tilde{\gamma}}y + y^TD_{\tilde{\gamma}}^TQD_{\tilde{\gamma}}y,$$

$$2y^T\underline{D}^TQD_{\tilde{\gamma}}y \le \varepsilon_6 y^T\underline{D}^TQ\underline{D}y + \varepsilon_6^{-1}y^TD_{\tilde{\gamma}}^TQD_{\tilde{\gamma}}y.$$

又因为 $0 \le A_{\tilde{\gamma}}^TA_{\tilde{\gamma}} \le (\overline{A}-\underline{A})^T(\overline{A}-\underline{A})$，且 $A_{\tilde{\gamma}}^TA_{\tilde{\gamma}}$ 和 $(\overline{A}-\underline{A})^T(\overline{A}-\underline{A})$ 都是非负对称半正定矩阵，所以易证 $\|A_{\tilde{\gamma}}\|_2^2 \le \|\overline{A}-\underline{A}\|_2^2$，进而有

$$x^TA_{\tilde{\gamma}}^TQA_{\tilde{\gamma}}x \le \lambda_{\max}(Q)\|\overline{A}-\underline{A}\|_2^2x^Tx.$$

类似地有

$$y^TB_{\tilde{\gamma}}^TQB_{\tilde{\gamma}}y \le \lambda_{\max}(Q)\|\overline{B}-\underline{B}\|_2^2y^Ty,$$

$$x^TC_{\tilde{\gamma}}^TQC_{\tilde{\gamma}}x \le \lambda_{\max}(Q)\|\overline{C}-\underline{C}\|_2^2x^Tx,$$

$$y^TD_{\tilde{\gamma}}^TQD_{\tilde{\gamma}}y \le \lambda_{\max}(Q)\|\overline{D}-\underline{D}\|_2^2y^Ty.$$

将上述式子进行整理，得

$$\mathrm{L}V(x,y,t) \le x^TMx + y^TNy = -w_1(x) + w_2(y),$$

且易知 $w_1(x) > w_2(x) > 0, x \ne 0$; $\lim\limits_{|x|\to\infty}\inf\limits_{0\le t<\infty}V(x,t) = \infty$. 故由引理3可知系统(2)是随机渐近稳定的. □

在定理1的证明过程中，如果利用柯西不等式将 $x^TA_{\tilde{\gamma}}^TQA_{\gamma}x$ 变形为

$$x^TA_{\tilde{\gamma}}^TQA_{\tilde{\gamma}}x \le \lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(G_a^TG_a)x^Tx,$$

这里 $G_a = (g_{ij})_{n\times n} = \overline{A}-\underline{A}$. 而且，对其他项也作类似处理，则可得以下定理：

定理2　对于系统(2)，若存在正定对称矩阵 Q 及正常数 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,6)$，满足 $K+L<0$，则系统(2)是随机渐近稳定的. 其中

$$\begin{aligned}K = {}& Q\underline{A} + \underline{A}^TQ + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)Q + \\ & [\varepsilon_1^{-1}\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(G_a^TG_a) + \\ & (1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(\underline{C}^T\underline{C}) + \\ & (1+\varepsilon_4^{-1})(1+\varepsilon_5)\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(G_c^TG_c)]I_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L = {}& [\varepsilon_2^{-1}(1+\varepsilon_3^{-1})\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(G_b^TG_b) + \\ & \varepsilon_2^{-1}(1+\varepsilon_3)\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(\underline{B}^T\underline{B}) + \\ & (1+\varepsilon_5^{-1})(1+\varepsilon_6)\mathrm{tr}(\underline{D}^T\underline{D})\lambda_{\max}(Q) + \\ & (1+\varepsilon_5^{-1})(1+\varepsilon_6^{-1})\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(G_d^TG_d)]I_n.\end{aligned}$$

这里：I_n 为单位矩阵，$G_b = \overline{B}-\underline{B}$，$G_c = \overline{C}-\underline{C}$，$G_d = \overline{D}-\underline{D}$.

注1　定理2中的矩阵 G_a, G_b, G_c, G_d，实际上可称为系统(2)的绝对灰度矩阵(或扰动误差区间长度矩阵). 因此若系统(2)的绝对灰度矩阵满足定理2的条件，则系统(2)在概率意义下是鲁棒稳定的.

注2　定理2中的 $\mathrm{tr}(G_i^TG_i)(i=a,b,c,d)$，可称为系统(2)的绝对灰度的平方和，若

$$\overline{G_i} = \sqrt{\mathrm{tr}(G_iG_i)/n^2},\ i = a,b,c,d,$$

则称 $\overline{G_i}$ 为系统(2)的绝对灰度的平方平均数. 如果用 $n^2\overline{G_i}$ 替代定理2中的 $\mathrm{tr}(G_i^TG_i)$，并且系统(2)的绝对灰度的平方平均数满足定理2的条件，则系统(2)在概率意义下是鲁棒稳定的.

为给出下面的定理3，现设系统(2)中的区间灰矩阵 $B(\otimes) = (\otimes_{ij}^b)_{n\times n}$，$\otimes_{ij}^b \in [\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]$. 记 $m_{ij}^b = \max\{|\underline{b}_{ij}|, |\overline{b}_{ij}|\}$，$M_b = (m_{ij}^b)_{n\times n}$，则对于 $\otimes_{ij}^b$ 的任一白化值 $\widetilde{\otimes}_{ij}^b$，都有 $|\widetilde{\otimes}_{ij}^b| \le m_{ij}^b$；而且利用柯西不等式也可证明，对于任意的 $y\in R^n$ 和 n 阶正定矩阵 Q，都有

$$y^TB^T(\widetilde{\otimes})QB(\widetilde{\otimes})y \le \lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(M_b^TM_b)y^Ty. \qquad (5)$$

同样，与 $C(\otimes)$ 和 $D(\otimes)$ 分别相对应的类似于 M_b 的矩阵分别记为 M_c 和 M_d，而且它们也有类似于式(5)的不等式. 于是，仿照定理1的证明方法，可得以下定理：

定理3　对于系统(2)，若存在正定对称矩阵 Q 及正常数 $\varepsilon_i(i=1,2,3)$，满足

$$\begin{aligned}& Q\underline{A} + \underline{A}^TQ + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)Q + \\ & \varepsilon_1^{-1}\lambda_{\max}(Q)\|\overline{A}-\underline{A}\|_2^2I_n + \\ & [(1+\varepsilon_2)\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(M_c^TM_c) + \\ & \varepsilon_2^{-1}\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(M_b^TM_b) + \\ & (1+\varepsilon_3^{-1})\lambda_{\max}(Q)\mathrm{tr}(M_d^TM_d)]I_n < 0,\end{aligned}$$

则系统(2)是随机渐近稳定的.

注3　3个定理中的判据条件都是时滞独立的，不包含时滞信息，这会使判据条件有一定的保守性，但它们所包含的多个自由参数 ε_i 又会削弱其保守性. 同时，由于获取方法的差异，而使得它们之间又具有不同的保守性. 其一，定理2是在定理1的证明过程基础上对其中的不等式又进一步放大后得到的，所以它的判据比定理1的判据有较强的保守性；

其二,扰动误差区间的长度一般较小,所以,虽然定理 2 的判据中形如 $\mathrm{tr}(\underline{B}^{\mathrm{T}}\underline{B})$ 的一些值一般与定理 3 的判据中形如 $\mathrm{tr}(M_b^{\mathrm{T}}M_b)$ 的值差别不大,但定理2除了较定理 3 在其证明过程中有较多的不等式放大过程外,其判据中还有较多的正值项 $\mathrm{tr}(G_i^{\mathrm{T}}G_i)\ (i = a, b, c, d)$,因此,定理 2 的判据一般要比定理 3 的判据有较强的保守性;其三,虽然定理 3 和定理 1 的证明过程中都有两步不等式放大过程,但定理 3 的判据中却有较少的自由参数,而且其判据中形如 $\mathrm{tr}(M_b^{\mathrm{T}}M_b)$ 的一些值通常也较大,另外,定理 1 的判据中虽有较多的扰动误差矩阵的范数项,但一般较小. 所以定理 3 比定理 1 中的判据有较强的保守性.

上述分析结果在后面的实例中将得到验证.

注 4 就定理 1 中的判别矩阵 $M + N$ 而言,在实际应用中,当系统(2) 给定时,$M + N$ 的负定与否,主要取决于其中 ε_i 的选取问题(因为判别矩阵中的每项中都含有一个正定矩阵 Q,可忽略其影响),而此问题可看作是 $M + N$ 关于 ε_i 的多元非线性函数矩阵的负定问题. 因为该问题具有多元非线性特性,所以不易有效地获取一组 ε_i 值. 但可通过编程,让计算机搜索一组使判断矩阵 $M + N$ 负定且具有较快收敛性的 ε_i 值. 在 Matlab Editor/ Debugger 工具环境里,编制这样的程序是很容易的. 在后面的数值例子里面,其中的一组值就是按这种方式选取的.

4 数值例子

考虑一个二维的灰色伊藤随机线性时滞系统. 其中:$A(\otimes)$,$B(\otimes)$,$C(\otimes)$ 和 $D(\otimes)$ 的上下界矩阵分别为

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3.87 & 0.505 \\ 0.2765 & -3.76 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3.548 & 0.796 \\ 0.5615 & -3.42 \end{bmatrix};$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -0.738 & 0.215 \\ 0.236 & -0.667 \end{bmatrix},$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} -0.519 & 0.368 \\ 0.369 & -0.441 \end{bmatrix};$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0.386 & -0.113 \\ -0.103 & -0.325 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 0.568 & 0 \\ -0.091 & -0.149 \end{bmatrix};$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} -0.267 & -0.169 \\ 0.212 & -0.312 \end{bmatrix},$$

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} -0.14 & -0.064 \\ 0.328 & -0.192 \end{bmatrix}.$$

在 Matlab Editor/ Debugger 环境中编程后,再进行相关运算得到的有关数值结果如表 1 所示.

表 1 判据的有效性和保守性的数值分析表

定理中判别阵小于	ε_i = 1	ε_i = 0.5	ε_i = 0.1	优选随机值
定理 1	$-2.3139\,I_2$	$-1.4995\,I_2$	正定阵	$-2.5593\,I_2$
定理 2	非正负定阵	正定阵	正定阵	$-0.2248\,I_2$
定理 3	$-1.6835\,I_2$	$-0.9601\,I_2$	正定阵	$-1.8425\,I_2$

表 1 中的"优选随机值"是指按照注 4 中 $\varepsilon_i\ (i = 1,2,\cdots,6)$ 的选取思想方法,通过编程让计算机搜索筛选而获取的使判定矩阵收敛性较优的一组 ε_i 值. 如,使定理 1 的判别矩阵 $< -2.5593\,I_2$ 的一组 ε_i 优选随机值是 $\varepsilon = (0.6120, 0.9252, 0.6858, 0.6925, 0.8399, 0.8377)$. 由表 1 可知,由定理 1～定理 3 的判据均表明该系统是渐近稳定的,同时,也验证了注 3 对这 3 个判据的保守性强弱的分析结果是正确的.

5 结 论

作为对灰色随机线性时滞系统的渐近稳定性问题的初步探讨,本文给出了几个充分性判据. 该判据在实际应用中简单方便,只需借助区间灰矩阵的上下界矩阵并进行一些简单运算,便能利用该判据判断系统的渐近稳定性. 该特点及结论的正确性通过算例得到了验证.

参考文献(References)

[1] Has'minskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Holland: Sijthoff and Noordhoff, 1981.

[2] 胡宣达. 随机微分方程稳定性理论[M]. 南京: 南京大学出版社, 1986.
(Hu Xuan-da. The theory of stability of stochastic differential equations[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 1986.)

[3] Mao X. Stochastic differential equations and theirs applications[M]. London: Horwood, 1997.

[4] Mao X, Koroleva N, Rodkina A. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equatioons [J]. System Control Letters, 1998, 35(5): 325-336.

[5] Liao X X, Mao X. Exponential stability of stochastic delay interval systems [J]. System Control Letters, 2000, 7(2): 307-328.

[6] Mao X. Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions [J]. J of Matematical Analysis and Applications, 2001, 260(2): 325-340.

[7] Boukas E K, Liu Z K. Robust stability and stabilizability of Markov jumping linear uncertain systems with mode-dependent time delays [J]. J of Optimization Theory and Applications, 2001, 109(3): 587-600.

(下转第 580 页)

[3] Charles Perkins, Elizabeth Belding-Royer, Samir Das. Ad hoc on-demand distance vector (AODV) routing [R]. Internet Engineering Task Force (IETF), 2003.

[4] Clausen T, Jacquet P. Optimized link state routing protocol (OLSR)[R]. Internet Engineering Task Force (IETF), 2003.

[5] Gray R, Kotz D, Newport C, et al. Outdoor experimental comparision of four ad hoc routing algorithms [C]. ACM/IEEE Int Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Wireless and Mobile Systems. Venice, 2004: 220-229.

[6] Li Bangxiang, Wang Jun, Zeng Peng, et al. Wireless mesh routing architecture optimized for industry applications[C]. Int Conf on Communication Systems and Applications. Hong Kong, 2007: 21-23.

[7] Nasipuri, Das S. On-demand multipath routing for mobile ad hoc networks[C]. The 8th Int Conf on Computer Communications and Networks. Boston, 1999: 64-70.

[8] Marina M K, Das S R. On-demand multipath distance vector routing in ad hoc networks[C]. Proc of IEEE Int Conf on Network Protocols. Reverside, 2001:14-23.

[9] Ye Z, Krishnamurthy S V, Tripathi S K. A framework for reliable routing in mobile ad hoc networks[C]. The 22nd Annual Joint Conf of the IEEE Computer and Communications Societes. San Francisco, 2003: 270-280.

[10] Lee S J, Gerla M. AODV-BR: Backup routing in ad hoc networks[C]. Proc of IEEE WCNC. Chicago, 2000: 1311-1316.

[11] Ganesan D, Govindan R, Shenker S, et al. Highly-resilient, energy-efficient multipath routing in wireless sensor networks[J]. ACM Mobile Computing and Communications Review, 2001, 5(4): 11-24.

[12] 汪泉弟, 李彬, 刘青松. 无线传感器网络能量多路径路由研究[J]. 信息与控制, 2006, 35(2): 129-134. (Wang Quan-di, Li Bin, Liu Qing-song. Research on the multi-path routing schemes with energy-aware of wireless sensor networks[J]. Information and Control, 2006, 35(2):129-134.)

[13] Hong X, Gerla M, Hanbiao M, et a1. Load balance, energy aware communications for mars sensor networks [C]. Aerospace Conf Proc. Daytona Beach, 2002: 1109-1115.

[14] De Couto Dsj, Aguayo D, Chambers B A. Performance of multi-hop wireless networks: Shortest path is not enough[J]. Computer Communication Review, 2003, 33(1): 83-88.

[15] http://www.tinyos.net.

[16] Lou Wen-jing. An efficient N-to-1 multipath routing protocol in wireless sensor networks[C]. The 2nd IEEE Int Conf on Mobile Ad-hoc and Sensor Systems. Washington, 2005: 7-10.

[17] Douglas S J De Couto, Daniel Aguayo, John Bicket, et al. A high throughput path metric for multi-hop wireless routing[C]. Wireless Network in Proc ACM MobiCom 2003. 2003: 134-146.

[18] Alec Woo, Terence Tong, David E Culler. Taming the underlying challenges of reliable multihop routing in sensor networks[C]. The ACM Conf on Embedded Networked Sensor Systems 2003. Los Angeles, 2003: 14-27.

[19] Zhao J, Govindan R. Understanding packet delivery performance in dense wireless sensor networks[C]. The ACM Conf on Embedded Networked Sensor Systems 2003. Los Angeles, 2003: 1-13.

[20] Alec Woo, David E Culler. Evaluation of efficient link reliability estimators for low-power wireless networks [R]. Berkeley: Computer Science Division, 2003.

[21] http://www.xbow.com.

(上接第 574 页)

[8] Dong Y, Jian A F, Sang C W. Delay-dependent robust stability of stochastic uncertain systems with time delay and Markovian jump parameters[J]. Circuits Systems Signal Processing, 2003, 22(4): 351-365.

[9] Yuan C G, Mao X. Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching[J]. Automatica, 2004, 40(3): 343-354.

[10] Mao X. A note on the Lasalle-type theorems for stochastic differential delay equations [J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 268(1): 125-142.