文章编号: 1001-0920(2008) 05-0585-04

连续不确定模糊系统的静态输出反馈控制

杨晓光[1,2], 张庆灵[1], 李 丽[3], 刘晓东[3], 盛庆轩[3]
(1. 东北大学 系统科学研究所, 沈阳 110004; 2. 大连海事大学 数学系, 辽宁 大连 116026; 3. 大连理工大学 信息与控制研究中心, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 对于一类状态矩阵、输入矩阵和扰动输入矩阵中均含有不确定项的连续 T-S 模糊系统,研究其静态输出反馈控制问题. 用矩阵不等式的形式给出了该模糊系统可通过静态输出反馈控制稳定的充分条件,并将矩阵不等式的条件转化为迭代线性矩阵不等式,同时给出了相应的迭代算法. 最后用数值仿真例子说明了该算法的有效性和收敛性.

关键词: 连续 T-S 模糊系统; 静态输出反馈控制; 迭代线性矩阵不等式
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Static output feedback control for continuous uncertain fuzzy systems

YANG Xiao-guang[1,2], ZHANG Qing-ling[1], LI Li[3], LIU Xiao-dong[3], SHENG Qing-xuan[3]
(1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of Mathematics, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 3. Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China. Correspondent: YANG Xiao-guang, E-mail: xgyang57@163.com)

Abstract: The static output feedback control problem is addressed for a class of continuous T-S fuzzy systems that uncertain terms exist in state matrix, input matrix and disturb input matrix. Sufficient conditions for static output feedback control stability are obtained in the form of matrix inequality. An iterative linear matrix inequality (ILMI) algorithm is also given. Finally, a numerical simulation example is employed to illustrate the effectiveness and the convergence of the design methodologies.

Key words: Continuous T-S fuzzy systems; Static output feedback control; Iterative linear matrix inequality

1 引 言

近年来,应用模糊 T-S 模型方法研究非线性系统的控制器设计及其稳定性分析,已得到一些结果[1-3]. 文献[4,5]中已将静态输出反馈控制方法应用于模糊系统的鲁棒 H_∞控制问题. 静态输出反馈控制受到关注[6-8]在于它表示了实际中可实现的最简单的闭环控制,另外就是许多涉及合成动态控制器的问题可表达为其增广系统的静态输出反馈控制问题.

因为不确定性往往是不稳定的根源,所以本文主要针对一类状态矩阵、输入矩阵与扰动输入矩阵中均含有不确定项的连续 T-S 模糊系统,设计了静态输出反馈控制器,给出了该控制器存在的充分条件,并用矩阵不等式表示这个充分条件. 为了求解这些双线性矩阵不等式,提出了一个迭代线性矩阵不等式算法,并通过仿真实验验证了该设计方法的有效性.

2 问题陈述和预备知识

考虑如下由模糊 T-S 模型描述的连续非线性不确定系统:

系统的模糊规则 i 为

If $z_1(t)$ is F_{i1} and $z_2(t)$ is F_{i2} and $\cdots$ and $z_n(t)$ is F_{in}, Then

$$\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (M_i + \Delta M_i)w(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t),$$

$$z(t) = (C_{1i} + \Delta C_{1i})x(t) + (D_{1i} + \Delta D_{1i})u(t),$$

收稿日期: 2007-08-02; **修回日期**: 2007-10-12.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60575039).
作者简介: 杨晓光(1957—),女,吉林四平人,副教授,硕士,从事模糊控制和鲁棒控制的研究; 张庆灵(1956—),男,辽宁营口人,教授,博士生导师,从事模糊控制和广义系统的研究.

$$y(t) = C_2 x(t),\ i = 1,2,\cdots,r. \tag{1}$$

其中:F_{ij} 是模糊集合;$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是模糊前件变量;$x(t) \in R^n$ 是状态变量;$u(t) \in R^m$ 是系统的控制输入;$w(t) \in R^m$ 是系统的扰动;$z(t), y(t) \in R^l$ 是系统输出;$A_i \in R^{n\times n}, B_i \in R^{n\times n}$ 和 $C_{1i}, D_{1i} \in R^{l\times n}$ 分别是系统、输入和输出的矩阵;r 是模糊推理规则数;$\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta M_i, \Delta C_{1i}, \Delta D_{1i}$ 表示时变参数不确定性.

假设 1　这里考虑的参数不确定矩阵是模糊有界的,其形式如下:

$$\Delta A_i = H_{1i} F_i(t) E_{1i},\ \Delta B_i = H_{1i} F_i(t) E_{2i},$$
$$\Delta M_i = H_{1i} F_i(t) E_{3i},$$
$$\Delta C_{1i} = H_{2i} F_i(t) E_{1i},\ \Delta D_{1i} = H_{2i} F_i(t) E_{2i}. \tag{2}$$

其中:E_{1i}, E_{2i}, E_{3i} 是已知的适当维数的实常数矩阵;$F_i(t)$ 是由 Lebesgue 可测函数构成的未知矩阵,满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t) F_i(t) \leq I, i = 1,2,\cdots,r$,这里 I 是适当维数的单位矩阵.

对于给定的数对 $(x(t), u(t))$,由单点模糊化、乘积推理和平均加权反模糊化,可得到如下模糊系统的整个状态方程:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) [\boldsymbol{\Gamma}_i x(t) + \boldsymbol{\Theta}_i w(t) + \boldsymbol{\gamma}_i u(t)],$$
$$z(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) [\mathrm{C}_i x(t) + \mathrm{Q}_i u(t)],$$
$$y(t) = C_2 x(t). \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = A_i + \Delta A_i,$$
$$\boldsymbol{\Theta}_i = M_i + \Delta M_i,\ \boldsymbol{\gamma}_i = B_i + \Delta B_i,$$
$$\mathrm{C}_i = C_{1i} + \Delta C_{1i},\ \mathrm{Q}_i = D_{1i} + \Delta D_{1i}.$$

以下各式出现上述符号时的意义相同. $\prod_{j=1}^{n} F_{ij}(z_j(t))$ 是 $z_j(t)$ 关于模糊集 F_{ij} 的隶属函数,

$$\mu_i(z(t)) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) = 1,\ i = 1,2,\cdots,r.$$

引理 1[9]　对具有适当维数的常数矩阵 D, E 及对称常数矩阵 S,矩阵不等式

$$S + DFE + E^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} < 0$$

成立的充分必要条件是:存在 $\varepsilon > 0$ 满足下面的矩阵不等式:

$$S + [\varepsilon^{-1} E^{\mathrm{T}}\quad \varepsilon D] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} E \\ \varepsilon D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0,$$

其中 F 满足 $F^{\mathrm{T}} F \leq R$.

引理 2[9]　存在适当维数的正定矩阵 P 及适当维数的常数矩阵 D, E, A 及正数 ε 使矩阵不等式

$$(A + DF(t)E)^{\mathrm{T}} P^{-1} (A + DF(t)E) \leq A^{\mathrm{T}} (P - \varepsilon DD^{\mathrm{T}})^{-1} A + \varepsilon^{-1} E^{\mathrm{T}} E$$

成立,其中 F 满足 $F^{\mathrm{T}} F \leq I$.

3　基于静态输出反馈的控制器设计

考虑用如下的模糊控制律设计静态输出反馈控制器:

模糊控制规则 i 为

If $z_1(t)$ is F_{i1} and $z_2(t)$ is F_{i2} and $\cdots$ and $z_n(t)$ is F_{in},

Then $u(t) = K_i y(t),\ i = 1,2,\cdots,r.$　　(4)

整个输出反馈控制律为(下面用 μ_i 代替 $\mu_i(z(t))$)

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i K_i y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i K_i C_2 x(t). \tag{5}$$

将式(5) 代入(3) 得到如下的闭环系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j \{[\boldsymbol{\Gamma}_i + \boldsymbol{\gamma}_i K_j C_2] x(t) + \boldsymbol{\Theta}_i w(t)\},$$
$$z(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j [\mathrm{C}_i + \mathrm{Q}_i K_j C_2] x(t). \tag{6}$$

定理 1　如果存在正定的对称矩阵 P 及正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 满足如下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\Omega}_i & * & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Phi}_{ij} & -I & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Sigma}_{ij} & 0 & -I & * & * & * & * & * \\
H_{1i}^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & -I & * & * & * & * \\
H_{1i}^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * \\
\boldsymbol{\Xi}_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{1i} & * & * \\
\boldsymbol{\Psi}_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * \\
M_i^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{2i}
\end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

$$(-2)\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\Omega}_{ij} & * & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Pi}_{ij} & -I & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Lambda}_{ij} & 0 & -I & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{O}_{ij} & 0 & 0 & -I & * & * & * & * \\
O_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * \\
X_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{ij} & * & * \\
\boldsymbol{\Lambda}_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * \\
Z_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{ij}
\end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

其中

$$\Omega_i = A_i^{\mathrm{T}}P + PA_i - XB_iB_i^{\mathrm{T}}P - PB_iB_i^{\mathrm{T}}X + XB_iB_i^{\mathrm{T}}X,$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}[P(A_i + A_j) + (A_i + A_j)^{\mathrm{T}}P - XB_iB_i^{\mathrm{T}}P - PB_iB_i^{\mathrm{T}}X + XB_iB_i^{\mathrm{T}}X - XB_jB_j^{\mathrm{T}}P - PB_jB_j^{\mathrm{T}}X + XB_jB_j^{\mathrm{T}}X - P],$$

$$\Xi_{ij} = C_{1i} + D_{1i}K_jC_2,\ X_{ij} = \Xi_{ij} + \Xi_{ji},$$

$$\Phi_{ij} = B_i^{\mathrm{T}}P + K_jC_2,\ \Pi_{ij} = \Phi_{ij} + \Phi_{ji},$$

$$\Sigma_{ij} = E_{1i} + E_{2i}K_jC_2,\ \Lambda_{ij} = \Sigma_{ij} + \Sigma_{ji},$$

$$Z_{ij} = (M_i^{\mathrm{T}} + M_j^{\mathrm{T}})P,\ O_{ij} = (H_{1i}^{\mathrm{T}} + H_{1j}^{\mathrm{T}})P,$$

$$Q_{1i} = \varepsilon_2 H_{2i}H_{2i}^{\mathrm{T}} - I,\ Q_{2i} = \varepsilon_2 E_{3i}^{\mathrm{T}}E_{3i} - I,$$

$$H_{ij} = \frac{\varepsilon_2}{2}(H_{2i}H_{2i}^{\mathrm{T}} + H_{2j}H_{2j}^{\mathrm{T}}) - I,$$

$$E_{ij} = \frac{\varepsilon_1}{2}(E_{3i}E_{3i}^{\mathrm{T}} + E_{3j}E_{3j}^{\mathrm{T}}) - I,$$

$$i,j = 1,2,\cdots,r.$$

则模糊闭环系统(6) 是全局渐近稳定的.

证明　选取 Lyapunov 函数 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$，对 $V(x(t))$ 求导数得

$$\dot V(x(t)) = \dot x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \dot x(t)Px^{\mathrm{T}}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j x^{\mathrm{T}}(t)[(\Gamma_i + \gamma_iK_jC_2)^{\mathrm{T}} + w^{\mathrm{T}}(t)\Theta_i P]x(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j x^{\mathrm{T}}(t)P[(\Gamma_i + \gamma_iK_jC_2) + \Theta_i w(t)]x(t) \le$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j x^{\mathrm{T}}(t)[A_i^{\mathrm{T}}P + PA_i - PB_iB_i^{\mathrm{T}}P + \Phi_{ij}^{\mathrm{T}}\Phi_{ij}]x(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j x^{\mathrm{T}}(t)[\Sigma_{ij}^{\mathrm{T}}\Sigma_{ij} + (1+\varepsilon_1)PH_{1i}H_{1i}^{\mathrm{T}}P]x(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j \times \left\{\frac{1}{\varepsilon_1}w^{\mathrm{T}}(t)[E_{3i}^{\mathrm{T}}E_{3i}w(t) + M_i^{\mathrm{T}}Px(t)] + x^{\mathrm{T}}(t)PM_iw(t)\right\}. \tag{9}$$

由于式(9) 中 $-PB_iB_i^{\mathrm{T}}P$ 存在负号，导致式(9) 不能化简为线性矩阵不等式. 为了修正这些项，可采用设计辅助变量的方法. 因为对于任何具有相同维数的矩阵 X 和 P，总有 $(X-P)^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}(X-P) \ge 0$，所以可得

$$XBB^{\mathrm{T}}P + PBB^{\mathrm{T}}X - XBB^{\mathrm{T}}X \le PBB^{\mathrm{T}}P. \tag{10}$$

由引理 1 和引理 2 及式(10) 可知，式(9) 等价于下式：

$$\dot V(x(t)) \le \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j x^{\mathrm{T}}(t)[\Omega_i + \Phi_{ij}^{\mathrm{T}}\Phi_{ij} + \Sigma_{ij}^{\mathrm{T}}\Sigma_{ij} + (1+\varepsilon_1)PH_{1i}H_{1i}^{\mathrm{T}}P]x(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j\frac{1}{\varepsilon_1}w^{\mathrm{T}}(t)[E_{3i}^{\mathrm{T}}E_{3i}w(t) + M_i^{\mathrm{T}}Px(t)] + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}x^{\mathrm{T}}(t)PM_iw(t) < 0.$$

故模糊闭环系统(6) 是全局渐近稳定的. □

4　数值仿真

在定理 1 的基础上，得到如下迭代算法：

Step1：选取适当的正数 $\varepsilon > 0$，解矩阵不等式

$$A_i^{\mathrm{T}}P + PA_i - PB_iB_i^{\mathrm{T}}P < 0,\quad i = 1,2,\cdots,r,$$

求解公共的正定矩阵 P. 如果上式无解，则选择 $Q > 0$，求解如下代数 Riccati 方程：

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i - P_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i + Q < 0,\ i = 1,2,\cdots,r.$$

令矩阵 P 是矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_r$ 中迹数为最小的，并令 $l = 1, X_l = P$.

Step2：解如下关于 P_l, K_i, α_l 的优化问题：

$$\text{OP1: } \min \alpha_l,\ l = 1,2,\cdots,r,$$
$$\text{s.t. 式(7), (8)},$$

其中 α_l^* 表示 α_l 的最优值.

Step3：如果 $\alpha_l^* < 0$，则 $K_i(i = 1,2,\cdots,r)$ 是可使模糊系统稳定的静态输出反馈增益，则停止迭代；否则转 Step4.

Step4：解如下关于 P_l, K_i 的优化问题 $(\alpha_l = \alpha_l^*)$：

$$\text{OP2: } \min \operatorname{tr}\{P_l\},$$
$$\text{s.t. 式(7), (8)},$$

其中 P_l^* 表示 P_l 的最优解.

Step5：如果 $\|X_l - P_l^*\| \le \delta$，$\delta$ 表示一个误差限，则转 Step6；否则令 $l = l + 1$，$X_l = P_{l-1}^*$，返回 Step2.

Step6：若不能由本文所述的静态输出反馈控制的控制方法使该系统稳定，则停止迭代.

考虑如下的模糊系统：

规则 1：If $x_1(t)$ is F_1(极大)，Then

$$\dot x(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (M_1 + \Delta M_1)w(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t),$$
$$z(t) = (C_{11} + \Delta C_{11})x(t) + (D_{11} + \Delta D_{11})u(t),$$
$$y(t) = C_2x(t).$$

规则 2：If $x_2(t)$ is F_2(极小)，Then

$$\dot x(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (M_2 + \Delta M_2)w(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t),$$
$$z(t) =$$

$$(C_{12}+\Delta C_{12})x(t)+(D_{12}+\Delta D_{12})u(t),$$
$$y(t)=C_2x(t).$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 0.02\\ -0.1 & -0.3\end{bmatrix},$$
$$A_2=\begin{bmatrix}0 & 0.01\\ -0.1 & -0.3\end{bmatrix},$$
$$B_1=B_2=\begin{bmatrix}-0.1\\ 0.1\end{bmatrix},\ C_{11}=C_{12}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$C_2=[0\quad 1],\ H_{11}=H_{12}=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},$$
$$M_1=M_2=\begin{bmatrix}0\\ 0.04\end{bmatrix},\ H_{21}=H_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$D_{11}=D_{12}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\ E_{11}=E_{12}=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},$$
$$F_1(t)=F_2(t)=\begin{bmatrix}\sin t & 0\\ 0 & \cos t\end{bmatrix},$$
$$E_{21}=E_{22}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},\ E_{31}=E_{32}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}.$$

模糊隶属函数为

$$\mu_1(x(t))=\sin(0.2x(t)),$$
$$\mu_2(x(t))=1-\mu_1(x(t)).$$

经过 65 次迭代得

$$\alpha=-0.0079,\ P=\begin{bmatrix}11.3282 & 2.2129\\ 2.2129 & 7.4095\end{bmatrix},$$
$$K_1=-0.4941,\ K_2=-0.6198.$$

给定初始条件 $x^{\mathrm{T}}(0)=[2\quad 2]$,仿真时间为 250 s,引入静态输出反馈控制器后的闭环系统响应曲线如图 1 所示. 由图 1 可知,大约在 200 s 以后,该系统是稳定的. 所以,本文提出的静态输出反馈控制器对于该模糊系统的稳定性是有效的.

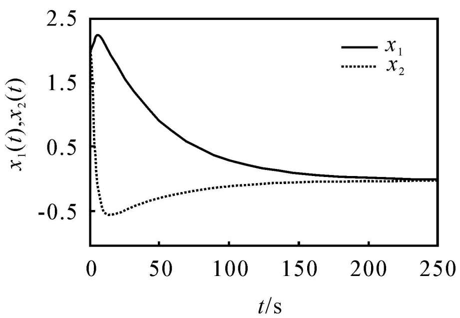

图 1 模糊系统的静态输出反馈控制响应曲线

5 结 论

本文针对一类状态矩阵、输入矩阵及扰动输入矩阵中均含有不确定项的连续 T-S 模糊系统,设计了静态输出反馈控制器,给出了该控制器存在的充分条件,并用矩阵不等式表示这个充分条件. 为了求解这些双线性矩阵不等式,提出了一个迭代线性矩阵不等式算法. 仿真结果表明,所提出的静态输出反馈控制器的设计方法是有效的.

参考文献(References)

[1] Tanaka K, Hori T, Wang H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(4): 582-589.

[2] Yang X, Liu X, Zhang Q, et al. Stability analysis for discrete T-S fuzzy systems[J]. Int J for Information and Systems Sciences, 2005, 1(3/4): 339-346.

[3] Lee J, Park C W, Suang H G, et al. Robust stabilization of uncertain nonlinear systems via fuzzy modeling and numerical optimization programming[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2005, 3(2): 225-235.

[4] Lo J C, Lin M L. Robust H_∞ nonlinear control via fuzzy static output feedback[J]. IEEE Trans on Circuits Systems, 2003, 50(11): 1494-1502.

[5] Huang D, Nguang S K. Robust H_∞ static output feedback of fuzzy systems: An ILMI approach[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2006, 36(1): 216-222.

[6] Dong J X, Yang G H. Static output feedback control synthesis for T-S discrete-time fuzzy systems[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2007, 5(3): 349-354.

[7] Prempain E, Postlethwaite I. Static output feedback stabilization with H_∞ performance for a class of plants[J]. System and Control Letter, 2001, 43(3): 159-166.

[8] Cao Y Y, Sun You-xian, James Lam. Simultaneous stabilization via static output feedback and state feedback[J]. IEEE Trans on SMC, 1999, 44(6): 1277-1282.

[9] Xie L. Output feedback control of systems with parameter uncertainties[J]. Int J Control, 1996, 63(4): 741-750.