

文章编号: 1001-0920(2008)05-0593-04

## 利用部分状态反馈的统一混沌系统的混沌同步

李文林

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

**摘要:** 通常混沌同步控制器的设计大都需要全部状态或多个输入, 对此利用 Lyapunov 函数和一些不等式技巧, 给出一种新的同步控制器设计方法. 该方法仅使用一个输入一个状态反馈, 或仅使用两个输入一个状态反馈设计 Lorenz 混沌系统和 Unified 混沌系统的同步控制器, 实现了二者全局指数混沌同步. 该控制器只需一个状态变量, 结构简单, 实现容易, 而且所给算法减小了参数选取的保守性. 算例仿真结果表明了所给方法的有效性.

**关键词:** 混沌同步; 统一混沌系统; 不等式; 指数稳定

**中图分类号:** O231.2; TP271.62      **文献标识码:** A

## Synchronization controlling of unified chaotic systems using partial states feedback

LI Wen-lin

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China. E-mail: hsdwlw@tom.com)

**Abstract:** Usually, all states of system or more input are used for design of chaos synchronization controller. Therefore, based on Lyapunov function and some inequalities techniques, two novel control schemes with one state feedback and one input or with one state feedback and two inputs are proposed to realize the globally exponential synchronization of Lorenz and unified chaotic systems. The controllers designed have simple structure and less conservation. The numerical simulation results show the effectiveness of the method.

**Key words:** Chaotic synchronization; Unified chaotic system; Inequality; Exponential stable

### 1 引言

自 1963 年 Lorenz 发现混沌吸引子以来, 混沌运动表现出来的奇特现象引起了人们极大的兴趣, 特别是混沌运动对初值的敏感性和长时间发展趋势的不可预测性, 在通信保密领域有着广泛的应用前景. 1990 年, Ott E 等人提出了 OGY 方法; 同年 Pecora L M 提出了混沌同步思想. 10 多年来, 混沌同步的研究得到了蓬勃发展, 该研究方向迅速成为混沌研究领域的重要热点<sup>[1]</sup>. 人们提出了多种混沌同步的思路和方法, 比如状态反馈方法<sup>[2,3]</sup>、变结构控制方法<sup>[4,5]</sup>、自适应控制方法<sup>[6,7]</sup>、观测器方法等, 多数方法取得了良好的控制效果. 但控制器设计大都需要全部状态或多个输入<sup>[4-8]</sup>, 这对于只有部分状态可测的混沌系统或只有一个输入端口的情况而言, 就遇到了物理实现上的麻烦, 虽然也可利用观测器解决, 但其计算、误差估计和物理实现都比较麻烦.

为克服上述缺点, 本文对统一混沌系统采用单输入单状态或两输入单状态设计控制器, 得到的同步控制器不但参数少, 结构简单, 实现容易, 而且通过不等式技巧的利用, 减小了参数选取的保守性.

### 2 问题描述

考虑 Unified 混沌系统的混沌同步问题

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (10 + 25)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35)x_1 + (29 - 1)x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - (8 + )x_3/3, \end{aligned} \quad (1)$$

其中参数  $\in [0, 1]$ .

设受控混沌系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (10 + 25)(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= (28 - 35)y_1 + (29 - 1)y_2 - y_1y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - (8 + )y_3/3. \end{aligned} \quad (2)$$

定义  $e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, 3$ , 得同步误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (10 + 25)(e_2 - e_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= (28 - 35)e_1 + (29 - 1)e_2 - \end{aligned}$$

收稿日期: 2007-03-11; 修回日期: 2007-06-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60643003); 河南自然科学基金项目(0611051200).

作者简介: 李文林(1949—), 男, 河南舞阳人, 教授, 博士, 从事变结构控制、模糊控制等研究.

$$\begin{aligned} & e_1 e_3 - x_1 e_3 - x_3 e_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= e_1 e_2 + x_2 e_1 + x_1 e_2 - (8 + \mu) e_3 / 3 + u_3. \end{aligned} \quad (3)$$

本文的目的是对 Unified 系统给出一种新的同步控制器设计方法:仅使用单个状态变量设计控制器来实现 Lorenz 系统和 Unified 系统的混沌同步,即实现  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

### 3 单输入单状态反馈同步控制器设计

为证明主要结论,先给出如下两个引理:

**引理 1** 1) 对任意  $\mu > 0$ , 有

$$2xy \leq x^2 + \mu^{-1} y^2;$$

2) 对任意实数  $x, y$ , 有

$$x + y \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

结论显然,证明略.

**引理 2** 设  $x$  满足以下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + y, \quad x(0) = x_0, \quad |y| \leq e^{-t}, \\ \mu &> 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

则  $x(t)$  指数趋于零.

**证明** 解不等式  $\dot{x} = -\mu x + y$  得

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\mu t} x(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} y(\tau) d\tau, \\ |x(t)| &\leq |x(0)| e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \tau} |y(\tau)| d\tau \\ &\leq |x(0)| e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \tau} e^{-\tau} d\tau \\ &\leq |x(0)| e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} (e^{\mu} - 1) \\ &\leq |x(0)| e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu} (e^{-t} - e^{-\mu}). \end{aligned}$$

因此  $x(t)$  指数趋于零.

**定理 1** 若  $\mu < 1/29$ , 用单输入且仅含状态  $e_2$  的控制器

$$u_1 = -(10 + 25\mu) e_2, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad (4)$$

可实现被控系统(2)与 Unified 系统(1)全局指数同步.

**证明** 将式(4)代入(3)的第1个方程,得

$$\dot{e}_1 = -(10 + 25\mu) e_1, \quad (5)$$

解方程(5),得

$$e_1(t) = e_1(0) e^{-(10+25\mu)t} = 0, \quad (6)$$

$e_1$  指数趋于零.

再证明  $e_2, e_3$  指数趋于零. 取函数

$$V = e_2^2 + e_3^2, \quad (7)$$

将  $V$  沿同步误差方程(3)求得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e_2 \dot{e}_2 + 2e_3 \dot{e}_3 = \\ &= -2(1 - 29\mu) e_2^2 - 2(8 + \mu) e_3^2 / 3 + \\ &+ 2x_2 e_1 e_3 + 2(28 - 35 - x_3) e_1 e_2. \end{aligned} \quad (8)$$

因为上式中的  $x_2, x_3$  是 Unified 混沌系统(1)的状态,从而有界,不妨设  $|x_i| \leq M_i, i = 2, 3$ .

由  $\mu < 1/29, 28 - 35 - x_3 > 0$ , 利用引理 1, 得

$$\begin{aligned} & 2(28 - 35 - x_3) e_1 e_2 + 2x_2 e_1 e_3 \\ & 2(|28 - 35 - x_3| + M_3) |e_1 e_2| + 2M_2 |e_1 e_3| = \\ & 2(28 - 35 + M_3) |e_1 e_2| + 2M_2 |e_1 e_3| \\ & (28 - 35 + M_3) (e_2^2 + \mu^{-1} e_1^2) + \\ & M_2 (e_3^2 + \mu^{-1} e_1^2). \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入(8),得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [2(1 - 29\mu) - (28 - 35 + M_3)] e_2^2 - \\ & [2(8 + \mu)/3 - M_2] e_3^2 + \\ & (28 - 35 + M_3 + M_2) \mu^{-1} e_1^2. \end{aligned} \quad (10)$$

再注意  $\mu < \frac{1}{29}, \frac{2(1 - 29\mu)}{28 - 35 + M_3} > 0$ , 特别选取

上式中的  $\mu$  满足

$$0 < \mu < \min\left\{\frac{2(8 + \mu)}{3M_2}, \frac{2(1 - 29\mu)}{28 - 35 + M_3}\right\}, \quad (11)$$

则有

$$\begin{aligned} 2(1 - 29\mu) - (28 - 35 + M_3) &= -\alpha < 0, \\ 2(8 + \mu)/3 - M_2 &= -\beta < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)代入(10),则有

$$\dot{V} = -V + \mu^{-1} e_1^2. \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= \min\{\alpha, \beta\} > 0, \\ \mu &= (28 - 35 + M_3 + M_2) \mu^{-1}. \end{aligned}$$

因为前面已证得  $e_1$  指数趋于零, 从而  $e_1^2$  指数趋于零. 对式(13)应用引理 2, 则  $V(t)$  指数趋于零. 于是  $e_2, e_3$  也指数趋于零.

**推论 1** 对 Lorenz 混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= 28x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - 8x_3 / 3. \end{aligned} \quad (14)$$

设被控系统

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 10(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= 28y_1 - y_2 - y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - 8y_3 / 3 + u_3. \end{aligned} \quad (15)$$

设计单输入且仅含单个状态的控制器

$$u_1 = -10e_2, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

可实现系统(15)与 Lorenz 系统(14)全局指数同步.

**证明**  $\mu < 1/29$ , 由定理 1, 结论成立, 若式

(1)和(2)中的  $\mu = 0$ , 正是 Lorenz 混沌系统(14)和(15).

如果将控制加到式(3)的第2个方程, 可得到以下结果:

**定理 2** 设计单输入且仅含状态  $e_2$  的控制器

$$u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = -k_2 e_2.$$

其中

$$k_2 > \frac{25 + 10 + (\sqrt{28 - 35} + M_3)}{2} + 29 - 1, \quad (16)$$

$$0 < \lambda < \min\left(\left(\frac{16+2}{3M_2}\right)^2, \left(\frac{20+50}{M_2}\right)^2\right), \quad (17)$$

$$0 < \lambda < \frac{2(10+25) - M_2^{1/2}}{25 + 10 + (28 - 35 + M_3)}. \quad (18)$$

对任意  $\lambda \in [0, 1]$ , 被控系统(2)与 Unified 混沌系统(1)全局指数同步。

证明 取满足式(16) ~ (18) 的一组  $k_2, \lambda, \dots$

定义 Lyapunov 函数  $V = e_1^2 + (e_2^2 + e_3^2)$ , 将  $V$  沿误差系统(3)求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -2(10+25)e_1^2 + 2(10+25)e_1e_2 + \\ & 2(28-35-x_3)e_1e_2 + 2x_2e_1e_3 - \\ & 2(1+k_2-29)e_2^2 - 2(8+\lambda)e_3^2/3 + \\ & -2(10+25)e_1^2 - 2(1+k_2-29)e_2^2 - \\ & 2(8+\lambda)e_3^2/3 + 2x_2e_1e_3 + \\ & 2[10+25 + (28-35-x_3)]e_1e_2. \end{aligned} \quad (19)$$

应用引理 1 的不等式 1) 可得

$$2[10+25 + (28-35-x_3)]e_1e_2 \leq [10+25 + (\sqrt{28-35} + M_3)](e_1^2 + e_2^2), \quad (20)$$

$$2x_2e_1e_3 \leq 2[M_2/|e_1|^{1/4} + |e_1|^{3/4} + |e_3|/M_2](\sqrt{e_1^2} + \sqrt{e_3^2}). \quad (21)$$

将式(20)和(21)代入(19), 得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & [2(10+25)(1-\lambda) - M_2\sqrt{\lambda} - \\ & (\sqrt{28-35} + M_3)]e_1^2 - \\ & [2(1+k_2-29) - (10+25 + \\ & (\sqrt{28-35} + M_3))^{-1}]e_2^2 - \\ & [2(8+\lambda)/3 - M\sqrt{\lambda}]e_3^2. \end{aligned} \quad (22)$$

由式(16) ~ (18) 可得

$$2(10+25)(1-\lambda) - M_2\sqrt{\lambda} - (\sqrt{28-35} + M_3) = \alpha_1 > 0, \quad (23)$$

$$2(1+k_2-29) - [10+25 + (28-35 + M_3)]^{-1} = \alpha_2 > 0, \quad (24)$$

$$2(8+\lambda)/3 - M\sqrt{\lambda} = \alpha_3 > 0. \quad (25)$$

将式(23) ~ (25) 代入(22) 得

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq -V, \quad \alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \\ V & \leq V(0)e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

因此, 被控系统(2)与 Unified 混沌系统(1)全局指数同步。

**推论 2** 设计单输入且仅含单个状态  $e_2$  的控制器

$$u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = -k_2 e_2.$$

其中

$$k_2 > \frac{10 + (28 + M_3)}{2} - 1,$$

$$0 < \lambda < \min\left(\frac{256}{9M_2^2}, \frac{400}{M_2^2}\right),$$

$$0 < \lambda < \frac{20 - M_2^{1/2}}{10 + (28 + M_3)}.$$

可实现系统(15)与 Lorenz 系统(14)全局指数同步。

#### 4 双输入单状态反馈同步控制器设计

前面得到的单输入单状态反馈, 虽然结构简单, 但反馈增益较大, 为减少反馈增益, 本文采用双输入单状态反馈来实现 Unified 系统混沌同步。

将控制加在式(3)的前两个方程, 此时误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 & = (10+25)(e_2 - e_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 & = (28-35)e_1 + (29-\lambda)e_2 - \\ & e_1e_3 - x_1e_3 - x_3e_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 & = e_1e_2 + x_2e_1 + \lambda e_2 - (8+\lambda)e_3/3. \end{aligned} \quad (26)$$

得到以下结论:

**定理 3** 设计双输入单状态反馈控制器

$$\begin{aligned} u_1 & = -(10+25)e_2, \\ u_2 & = -k_2 e_2, \quad u_3 = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

其中  $k_2 > 29 - 1$ , 可实现系统(2)与 Unified 混沌系统全局指数同步。

证明 将控制(27)代入误差方程(26), 得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) & = -(10+25)e_1, \\ e_1(t) & = e_1(0)e^{-(10+25)t} = 0, \end{aligned}$$

$e_1$  指数趋于零。

为证明  $e_2$  和  $e_3$  也指数趋于零, 取非负函数

$$V = e_2^2 + e_3^2,$$

将  $V$  沿误差方程(26)求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2e_2\dot{e}_2 + 2e_3\dot{e}_3 = \\ & 2(28-35-x_3)e_1e_2 + 2x_2e_1e_3 + \\ & 2(29-\lambda-k_2)e_2^2 - 2(8+\lambda)e_3^2/3 + \\ & -2(1+k_2-29)e_2^2 - 2(8+\lambda)e_3^2/3 + \\ & 2(\sqrt{28-35} + M_3)|e_1||e_2| + \\ & 2M_2|e_1||e_3|. \end{aligned} \quad (28)$$

因为  $k > 29 - 1$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -2e_2^2 - 2(8+\lambda)e_3^2/3 + 2[M_2/|e_3| + \\ & (\sqrt{28-35} + M_3)|e_2|]|e_1|, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$= \min\{(1+k_2-29), (8+\lambda)/3\} > 0.$$

由引理 1 中的 2) 可得

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{28-35} + M_3)|e_2| + 2M_2|e_3| \\ 2\sqrt{e_2^2 + e_3^2} = 2\sqrt{V}, \end{aligned} \quad (30)$$

将式(30)的代入(29), 得

$$\dot{V} = -2V + 2\sqrt{V}|e_1|, \quad (31)$$

将式(31)的两端除  $2\sqrt{V}$ , 得

$$\frac{d\sqrt{V}}{dt} = -\sqrt{V} + |e_1|.$$

因为已证得  $e_1$  指数趋于零, 利用引理 2,  $\sqrt{V}$  指数趋于零, 从而  $e_2, e_3$  也指数趋于零. 受控系统与 Unified 系统全局指数同步.

### 5 仿真例子

考虑 Lorenz 系统(15), 按定理 1 设计控制器,

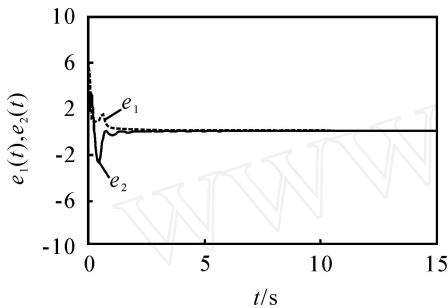
$u_1 = -10e_2, u_2 = u_3 = 0$ , 并取初值

$$x_1(0) = 3, x_2(0) = 5, x_3(0) = 8,$$

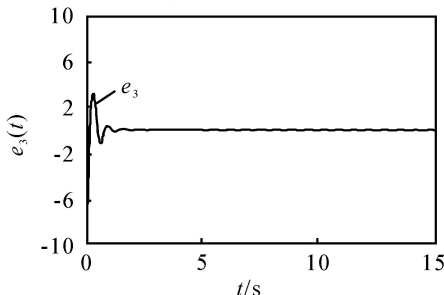
$$y_1(0) = 10, e_2(0) = 4, y_3(0) = 1,$$

$$e_1(0) = 7, e_2(0) = -1, e_3(0) = -7.$$

同步误差仿真结果如图 1 所示.



(a)  $e_1$ 和 $e_2$ 曲线



(b)  $e_3$ 曲线

图 1 单输入单状态反馈下 Lorenz 系统的同步误差曲线

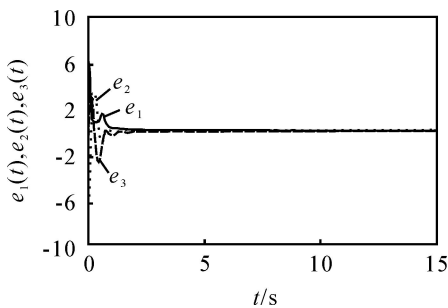


图 2 双输入单状态反馈下 Lorenz 系统的同步误差曲线

按照定理 3 设计双输入单状态控制器

$$u_1 = -10e_2, u_2 = -3e_2,$$

并取初始条件

$$x_1(0) = 3, x_2(0) = 5, x_3(0) = 8,$$

$$y_1(0) = 5, y_2(0) = 6, y_3(0) = 4,$$

$$e_1(0) = 2, e_2(0) = 1, e_3(0) = -4.$$

同步误差仿真结果如图 2 所示.

从仿真图可看出, 本文设计的控制器得到了满意的同步效果.

### 6 结 论

本文利用不等式技巧, 给出了仅使用单输入单状态反馈或双输入单状态反馈实现 Unified 系统混沌同步的控制器设计方法, 所设计的同步控制器, 具有参数少, 结构简单, 保守性小等优点.

### 参考文献(References)

- [1] 尹逊和, 蔡晓, 赵栋. 工程混沌及混沌应用的研究现状与展望[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(12): 71-76.  
(Yin Xun-he, Cai Xiao, Zhao Dong. Prospect and review on engineering chaos and application of chaos[J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(12): 71-76.)
- [2] Jiang G P, Zheng W X. An LMI criterion for linear state-feedback based chaos synchronization of a class of chaotic systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26: 50-55.
- [3] 陶朝海, 陆君安, 吕金虎. 统一混沌系统的反馈同步[J]. 物理学报, 2002, 51(7): 1497.  
(Tao Chao-hai, Lu Jun-an, Lv Jin-hu. The feedback synchronization of a unified chaotic systems[J]. Chinese Physics, 2002, 51(7): 1497.)
- [4] Shahram Etemadi, Aria Alasty, Hassan Salarieh. Synchronization of chaotic systems with uncertainties via variable structure control chaos [J]. Physics Letters, 2006, 357: 17-21.
- [5] Jamal M Nazzal, Ammar N Natsheh. Chaos control using active sliding mode theory [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 33: 695-702.
- [6] Mohammad Haeri, Mohammad Saleh Tavazoei, Majid Reza Naseh. Synchronization of uncertain chaotic systems using active sliding mode control [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 3: 1230-1239.
- [7] Xiao Jiang-wen, Yu Yi. Coupled-adaptive synchronization for Chen chaotic systems with different parameters[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 33: 908-913.
- [8] Ju H Park. Chaos synchronization between two different chaotic dynamical systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27: 549-554.