第 23 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2008 年 5 月
Vol. 23 No. 5 Control and Decision May 2008

文章编号: 1001-0920(2008)05-0507-04

基于方案偏好和部分权重信息的模糊多属性决策方法

龚 艳 冰
(河海大学 商学院, 江苏 常州 213022)

摘 要: 研究了只有部分权重信息且决策者对方案的偏好信息以三角模糊数互反判断矩阵形式给出的模糊多属性决策问题. 首先为得到属性权重,给出一种结合主观模糊偏好信息和客观决策信息的极小化极大偏差模型;然后,运用加性加权法求出各方案的模糊综合属性值, 并利用已有的三角模糊数排序公式求得决策方案的排序;最后,通过算例说明了该方法的可行性和有效性.

关键词: 互反判断矩阵; 三角模糊数; 排序
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Method for fuzzy multi-attribute decision making with preference on alternatives and partial weights information

GONG Yan-bing
(Business School, Hohai University, Changzhou 213022, China. E-mail: yanbg79@163.com)

Abstract: The fuzzy multi-attribute decision making (FMADM) problems are investigated, in which the information about attribute weights is known partly and the decision maker has preference information on alternatives in the form of triangular fuzzy numbers reciprocal judgment matrix. A minimizing the maximum difference model is introduced to assess the weights of attributes in the FMADM problem, which integrates subjective fuzzy preference relations and objective information. The additive weighting method is used to obtain the fuzzy overall values of alternatives. By using the priority formula of triangular fuzzy numbers, the decision alternatives are then ranked. Finally, a numerical example is given to show the feasibility and effectiveness of the developed method.

Key words: Reciprocal judgment matrix; Triangular fuzzy number; Priority

1 引 言

由于客观事物的不确定性及人类思维的模糊性,近年来,有关模糊决策理论的研究已引起人们的高度重视,并取得了丰硕成果[1,2]. 在决策过程中,决策者(专家)往往需对决策方案进行两两比较,并构造判断矩阵,其中互反判断矩阵是一类常见的判断矩阵形式. 由于判断的不确定性,当人们构造互反判断矩阵时,得到的判断值有时不是确定的数值点,而是以三角模糊数等模糊形式给出的. 因此,如何处理这类问题,是一个具有重要实际应用价值的研究课题. 目前,有关这类问题的研究才刚刚开始,主要的方法都是基于三角模糊数互补判断矩阵的主观方法[3-5],而研究方案偏好为三角模糊互反判断矩阵与客观决策矩阵结合的综合模糊决策方法还比较少[6]. 为此, 本文首先回顾了三角模糊数互补判断矩阵的概念;然后,将文献[7,8]的矩阵特征向量思想引入三角模糊数互补判断矩阵中,研究三角模糊数互反一致性判断矩阵和权重向量之间的类似特征向量关系,建立了一个极小化极大偏差模型,得到属性的权重向量,并利用简单的加权集结方法和已有的三角模糊数排序公式,得到所有方案的排序. 本文方法因为包含了主观和客观信息,所以要优于现有的主观决策方法.

2 预备知识

考虑任意两个三角模糊数 $\tilde{a} = (a_l, a_m, a_u)$, $\tilde{b} = (b_l, b_m, b_u)$, 则模糊数运算规则如下[9]:

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a_l, a_m, a_u) \oplus (b_l, b_m, b_u) = (a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u),$$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = (a_l, a_m, a_u) \otimes (b_l, b_m, b_u) = (a_l b_l, a_m b_m, a_u b_u),$$

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \left(\frac{a_l}{b_u}, \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_u}{b_l}\right).$$

收稿日期: 2007-03-23; **修回日期**: 2007-08-13.
基金项目: 江苏省建设厅项目(JS200501).
作者简介: 龚艳冰(1979—),男,江苏靖江人,讲师,博士,从事系统工程、系统决策与优化的研究.

定义 1[10] 设三角模糊判断矩阵 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$，其中：$\tilde{b}_{ij} = (b_{lij}, b_{mij}, b_{uij})$，$\tilde{b}_{ji} = (b_{lji}, b_{mji}, b_{uji})$. 对于 $\forall i, j \in N$ 如果满足：

1) $\forall i \in N$, $\tilde{b}_{ii} = (1,1,1)$；

2) $1/9 \leq b_{lij} \leq b_{mij} \leq b_{uij} \leq 9$；

3) $\tilde{b}_{ij} = 1/\tilde{b}_{ji} = (1/b_{uji}, 1/b_{mji}, 1/b_{lji})$.

则称矩阵 $\tilde{B}$ 是三角模糊数互反判断矩阵.

定义 2[10] 若三角模糊互反判断矩阵 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量为 $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $\tilde{v}_i = (v_{li}, v_{mi}, v_{ui})$ 也为三角模糊数. 如果满足 $\tilde{b}_{ij} = \tilde{v}_i/\tilde{v}_j$, $\forall i, j \in N$，则称矩阵 $\tilde{B}$ 是完全一致性三角模糊数互反判断矩阵.

当 $\tilde{B}$ 是一致性三角模糊数互反判断矩阵时，有 $\tilde{b}_{ij} = \tilde{v}_i/\tilde{v}_j$, $\forall i, j \in N$，即

$$(b_{lij}, b_{mij}, b_{uij}) = \frac{(v_{li}, v_{mi}, v_{ui})}{(v_{lj}, v_{mj}, v_{uj})} = \left(\frac{v_{li}}{v_{uj}}, \frac{v_{mi}}{v_{mj}}, \frac{v_{ui}}{v_{lj}}\right),$$

也即

$$b_{lij} = \frac{v_{li}}{v_{uj}},\ b_{mij} = \frac{v_{mi}}{v_{mj}},\ b_{uij} = \frac{v_{ui}}{v_{lj}}. \tag{1}$$

考虑一个具有 n 个方案 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 s 个属性 $(r_1, r_2, \cdots, r_s)$ 的 FMADM 问题，设规范化三角模糊数决策矩阵为 $\tilde{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{n\times s}$，其中 $\tilde{z}_{ij} = (z_{lij}, z_{mij}, z_{uij})$ 为三角模糊数. 相对于属性集的权重向量为 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_s)^{\mathrm{T}}$，且满足 $\sum_{i=1}^{s} w_i = 1$. H 为已知的部分权重信息确定的属性可能权重集合，$W \in H$，若权重向量已知，则利用简单的加权集结方法，方案 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的综合评估值可表示为

$$\tilde{d}_i = (d_{li}, d_{mi}, d_{ui}) = \sum_{j=1}^{s} \tilde{z}_{ij} w_j = \left(\sum_{j=1}^{s} z_{lij} w_j, \sum_{j=1}^{s} z_{mij} w_j, \sum_{j=1}^{s} z_{uij} w_j\right). \tag{2}$$

其中

$$d_{li} = \sum_{j=1}^{s} z_{lij} w_j,\ d_{mi} = \sum_{j=1}^{s} z_{mij} w_j,$$

$$d_{ui} = \sum_{j=1}^{s} z_{uij} w_j,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

或用矩阵表示为

$$D_l = Z_l W,\ D_m = Z_m W,\ D_u = Z_u W. \tag{3}$$

其中

$$D_l = (d_{l1}, d_{l2}, \cdots, d_{ln})^{\mathrm{T}},$$

$$D_m = (d_{m1}, d_{m2}, \cdots, d_{mn})^{\mathrm{T}},$$

$$D_u = (d_{u1}, d_{u2}, \cdots, d_{un})^{\mathrm{T}},$$

$$Z_l = (z_{lij})_{n\times s},\ Z_m = (z_{mij})_{n\times s},\ Z_u = (z_{uij})_{n\times s}.$$

当属性权重已知时，由各方案综合属性值的大小可确定方案的优劣；否则，就不能直接由式(3) 确定综合属性值. 本文将主要研究属性权重部分已知，且方案的偏好信息为三角模糊数互反判断矩阵形式的多属性决策问题.

3 主要结果

设模糊多属性决策方案 $\tilde{d}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的两两比较偏好信息为三角数模糊数互反判断矩阵 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$，则有下列定理成立.

定理 1 设三角模糊数互反判断矩阵 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$ 的权重向量为 $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \cdots, \tilde{d}_n)^{\mathrm{T}}$，则当 $\tilde{B}$ 是一致性三角模糊数互反判断矩阵时，有

$$\frac{d_{li}}{d_{lj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_{ukj}}{\sum_{k=1}^{n} b_{uki}},\ \frac{d_{mi}}{d_{mj}} = b_{mij},$$

$$\frac{d_{ui}}{d_{uj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_{lkj}}{\sum_{k=1}^{n} b_{lki}},\ i, j \in N. \tag{4}$$

证明 若 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$ 是一致性三角模糊数互反偏好矩阵，则由式(1) 可知

$$b_{lij} = d_{li}/d_{uj},\ b_{mij} = d_{mi}/d_{mj},$$

$$b_{uij} = d_{ui}/d_{lj},\ i, j \in N. \tag{5}$$

显然式(4) 中间的等式成立，且由式(5) 可得

$$b_{lij} d_{uj} = d_{li},\ d_{uj} = d_{li}/b_{lij},$$

$$d_{lj} b_{uij} = d_{ui},\ d_{lj} = d_{ui}/b_{uij},\ i, j \in N. \tag{6}$$

对式(6) 左右两边求和可得

$$d_{uj} \sum_{k=1}^{n} b_{lkj} = \sum_{k=1}^{n} d_{lk} = \sum_{s=1}^{n} d_{ls} = d_{ui} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{b_{uis}},$$

$$d_{lj} \sum_{k=1}^{n} b_{ukj} = \sum_{k=1}^{n} d_{uk} = \sum_{s=1}^{n} d_{us} = d_{li} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{b_{lis}}.$$

由上式和三角模糊数互反判断矩阵的定义可得

$$\frac{d_{li}}{d_{lj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_{ukj}}{\sum_{s=1}^{n} (1/b_{lis})} = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_{ukj}}{\sum_{k=1}^{n} b_{uki}},$$

$$\frac{d_{ui}}{d_{uj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_{lkj}}{\sum_{s=1}^{n} (1/b_{uis})} = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_{lkj}}{\sum_{k=1}^{n} b_{lki}},\ i, j \in N. \qquad \square$$

令

$$P_l = (p_{lij})_{n\times n},\ P_m = (p_{mij})_{n\times n},\ P_u = (p_{uij})_{n\times n}.$$

其中

$$p_{lij} = \sum_{k=1}^{n} b_{lkj} \Big/ \sum_{k=1}^{n} b_{lki},\ p_{mij} = b_{mij},$$

$$p_{uij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ukj} \Big/ \sum_{k=1}^{n} b_{uki},\ i, j \in N.$$

则由定理 1 和文献[7,8] 的特征向量方法可知，若矩阵 $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$ 是三角模糊数互反一致性判断矩阵，

则下列等式成立:

$$P_u D_l = n D_l,\ P_m D_m = n D_m,\ P_l D_u = n D_u. \quad (7)$$

将客观决策矩阵(3) 代入式(7) 可得

$$P_u Z_l W = n Z_l W,\ P_m Z_m W = n Z_m W,$$
$$P_l Z_u W = n Z_u W. \quad (8)$$

然而,由于客观事物的复杂性及决策者知识水平的影响,在实际决策时决策者所给出的方案偏好三角模糊数互反判断矩阵并非总是一致的,即式(7) 或(8) 不总是成立,为此,引入以下偏差向量:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (P_u Z_l - n Z_l) W,\ \boldsymbol{\eta} = (P_l Z_u - n Z_u) W,$$
$$\boldsymbol{\xi} = (P_m Z_m - n Z_m) W. \quad (9)$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}.$$

显然,为了得到合理的权重向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_s)^{\mathrm{T}}$,上述基于主观信息和客观信息的偏差向量,即式(9) 越小越好. 为此,建立以下极小化极大偏差模型:

$$\min\left(\max_{1 \le i \le n} |\varepsilon_i| + \max_{1 \le j \le n} |\xi_j| + \max_{1 \le k \le n} |\eta_k|\right),$$
$$\text{s.t. } W \in H. \quad (10)$$

为了求解该模型,令

$$\rho_1 = \max_{1 \le i \le n} |\varepsilon_i|,\ \rho_2 = \max_{1 \le j \le n} |\xi_j|,$$
$$\rho_3 = \max_{1 \le k \le n} |\eta_k|, \quad (11)$$

则有

$$|(P_u Z_l - n Z_l) W| \le \rho_1 e,$$
$$|(P_m Z_m - n Z_m) W| \le \rho_2 e,$$
$$|(P_l Z_u - n Z_u) W| \le \rho_3 e. \quad (12)$$

因此,模型(10) 可转化为以下线性规划模型:

$$\begin{aligned}
&\min (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3),\\
&\text{s.t. } (P_u Z_l - n Z_l) W - \rho_1 e \le 0,\\
&\quad -(P_u Z_l - n Z_l) W - \rho_1 e \le 0,\\
&\quad (P_m Z_m - n Z_m) W - \rho_2 e \le 0,\\
&\quad -(P_m Z_m - n Z_m) W - \rho_2 e \le 0,\\
&\quad (P_l Z_u - n Z_u) W - \rho_3 e \le 0,\\
&\quad -(P_l Z_u - n Z_u) W - \rho_3 e \le 0,\\
&\quad W \in H.
\end{aligned} \quad (13)$$

利用 Matlab 6.5 线性规划工具箱编程,即可得到上述模型属性的最优权重向量 $W^* = (w_1^*, w_2^*, \cdots, w_s^*)^{\mathrm{T}}$. 将其代入式(2) 即可得到方案的综合评估值 $\tilde{d}_i (i \in N)$,但由于 $\tilde{d}_i$ 仍然是三角模糊数,不便于直接对方案进行排序. 目前关于模糊数排序的方法很多,但还没有一种公认的模糊数排序方法. 一种简单且有效的方法是利用文献[11] 中给出的计算三角模糊数 $\tilde{d}_i (i \in N)$ 的期望值公式,即

$$E(\tilde{d}_i) = \frac{1}{6}(d_{li} + 4 d_{mi} + d_{ui}),\ i \in N. \quad (14)$$

由 $E(\tilde{d}_i) (i \in N)$ 值的大小可得到相应的方案排序. 若出现 $E(\tilde{d}_i) = E(\tilde{d}_j)$,可先计算它们的方差,再通过比较方差的大小对模糊数进行排序[11].

4　实例分析

为了说明本文方法的有效性,对文献[6] 的实例进行分析. 设对于某一多属性决策问题,有 4 个备选方案 x_1, x_2, x_3, x_4,6 个属性 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$. 已知属性权重信息为

$$\begin{aligned}
H = \{&0.15 \le w_1 \le 0.18, 0.16 \le w_2 \le 0.17,\\
&0.17 \le w_3 \le 0.18, 0.14 \le w_4 \le 0.19,\\
&0.13 \le w_5 \le 0.16, 0.16 \le w_6 \le 0.20,\\
&\sum_{i=1}^{6} w_i = 1\}.
\end{aligned}$$

专家给出规范化决策矩阵如下:

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix}
(0.389, 0.529, 0.719) & (0.398, 0.471, 0.561) & (0.348, 0.408, 0.459) & (0.460, 0.536, 0.637) & (0.433, 0.497, 0.571) & (0.367, 0.468, 0.595)\\
(0.416, 0.551, 0.656) & (0.363, 0.439, 0.521) & (0.487, 0.543, 0.599) & (0.412, 0.496, 0.637) & (0.448, 0.497, 0.595) & (0.490, 0.569, 0.649)\\
(0.402, 0.471, 0.604) & (0.494, 0.573, 0.663) & (0.406, 0.466, 0.530) & (0.478, 0.558, 0.610) & (0.382, 0.407, 0.446) & (0.356, 0.451, 0.529)\\
(0.333, 0.441, 0.604) & (0.426, 0.507, 0.608) & (0.507, 0.567, 0.656) & (0.342, 0.394, 0.438) & (0.541, 0.584, 0.680) & (0.420, 0.504, 0.649)
\end{bmatrix}.$$

且专家对方案有一定的主观偏好,并通过对方案进行两两比较构造三角模糊互反判断矩阵,即

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix}
(1,1,1) & \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) & (2,3,5) & (1,2,4)\\
(4,5,7) & (1,1,1) & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right) & \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right)\\
\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & (1,2,3) & (1,1,1) & (3,4,5)\\
\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) & \left(\frac{1}{3}, 1, 3\right) & \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) & (1,1,1)
\end{bmatrix}.$$

则由 Matlab 6.5 优化工具箱求解极小化极大模型(13) 可得属性的最优权重向量

$$W^* = (0.18, 0.17, 0.17, 0.19, 0.13, 0.16)^{\mathrm{T}}.$$

将其代入式(2),求得各方案的模糊综合属性值为

$$\tilde{d}_1 = (0.399\,2,\ 0.486\,0,\ 0.593\,3),$$
$$\tilde{d}_2 = (0.434\,3,\ 0.516\,0,\ 0.610\,7),$$
$$\tilde{d}_3 = (0.422\,8,\ 0.492\,7,\ 0.570\,0),$$
$$\tilde{d}_4 = (0.421\,1,\ 0.493\,4,\ 0.599\,1).$$

由期望值公式(14) 可得三角模糊数 $\tilde{d}_i (i = 1, 2, 3,$

4) 的期望值为

$$E(\tilde{d}_1) = 0.4894,\ E(\tilde{d}_2) = 0.5182,$$
$$E(\tilde{d}_3) = 0.4939,\ E(\tilde{d}_4) = 0.4990.$$

显然,有 $E(\tilde{d}_2) > E(\tilde{d}_4) > E(\tilde{d}_3) > E(\tilde{d}_1)$,因此,相应方案的优先次序为 $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$,故最优方案为 x_2. 该结果与文献[6]的结果相同,而本文方法要比文献[6]的方法简单. 因为本文的最优权重模型只有9个未知自变量,而文献[6]需求解含有54个未知自变量的优化模型.

5 结 论

本文进一步研究了只有部分权重信息且决策者对方案的偏好信息以三角模糊数互反判断矩阵形式给出的模糊多属性决策问题. 本文建立了一个基于主观偏好信息和客观决策信息的极小化极大偏差模型. 通过求解线性规划问题得到属性的权重向量,并利用简单的加权集结方法,得到了方案的排序. 本文方法包含了主观和客观信息,因此,要优于现有的主观模糊决策方法. 同时,该方法也可用于多人多属性的模糊多属性决策问题.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer, 1992.

[3] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵的一种排序方法[J]. 模糊系统与数学, 2002,16(1): 47-50.
(Xu Ze-shui. A method for priorities of triangular fuzzy number complementary judgment matrices[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16(1): 47-50.)

[4] 姜艳萍, 樊治平. 三角模糊数互补判断矩阵排序的一种实用方法[J]. 系统工程, 2002, 20(2): 89-92.
(Jiang Yan-ping, Fan Zhi-ping. A practical ranking method for reciprocal judgment matrix with triangular fuzzy numbers[J]. Systems Engineering, 2002, 20(2): 89-92.)

[5] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵排序方法研究[J]. 系统工程学报, 2004,19(1): 85-88.
(Xu Ze-shui. On priority method of triangular fuzzy number complementary judgment matrix[J]. J of System Engineering, 2004,19(1): 85-88.)

[6] 徐泽水, 赵华. 偏好信息为模糊互反判断矩阵的模糊多属性决策法[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(4): 115-121.
(Xu Ze-shui, Zhao Hua. A method for fuzzy multi-attribute decision making with preference information in the form of fuzzy reciprocal judgment matrix[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(4): 115-121.)

[7] Lipovetsky, Michael Conklin M. Robust estimation of priorities in the AHP[J]. European J of Operational Research, 2002, 137(1): 110-122.

[8] Wang Ying-ming, Parkand. Multiple attribute decision making based on fuzzy preference infor mation on alternatives: Ranking and weighting[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(3): 331-346.

[9] Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. A fuzzy extension of Saaty's priority theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11(3): 229-241.

[10] 王玮, 张玉芝. 模糊AHP的权重向量求解方法研究[J]. 控制与决策, 2006, 21(2): 184-188.
(Wang Wei, Zhang Yu-zhi. Method of obtaining eigenvector for a fuzzy AHP[J]. Control and Decision, 2006, 21(2): 184-188.)

[11] Christer Carlsson, Robert Fuller. On posibilistic mean value and variance of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 315-326.

(上接第506页)

[6] 舒伟仁, 张庆灵. 不确定时滞广义系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 629 - 633.
(Shu Wei-ren, Zhang Qing-ling. Robust and non-fragile H_∞ control for uncertain singular systems with time-delay in state[J]. Control and Decision, 2005, 20(6): 629-633.)

[7] Yang G H, Wang J L. Robust non-fragile kalman filtering for uncertain linear systems with estimation gain uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatatic Control, 2001, 46(2): 343-348.

[8] Yang G H, Che W W. Non-fragile H_∞ filter design with additive gain variations[C]. Proc of the 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego: IEEE, 2006: 4775-4780.

[9] Xie L, Fu M, de Souza C E. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. IEEE Trans on Automation Control, 1992, 37(8): 1253-1256.

[10] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[11] Yang F, Wang Z, Hung Y S, et al. Mixed H_2/H_∞ filtering for uncertain systems with regional pole assignment[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(2): 438-448.