

文章编号: 1001-0920(2008)05-0515-05

基于 Laguerre 模型的预测函数控制及其稳定性分析

许鸣珠, 刘贺平, 王允建

(北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083)

摘要: 基于 Laguerre 模型设计了一种自适应预测函数控制器. 通过对闭环系统状态方程的稳定性分析, 依据 Lyapunov 稳定性定理和奇异值理论得到控制系统稳定的必要条件. 提出一种衰减因子校正方法, 并使用遗传算法在线寻优调节衰减因子, 以提高控制品质. 仿真研究表明该控制算法稳定性强、在线计算量小.

关键词: Laguerre 函数; Lyapunov 稳定性; 预测函数控制; 遗传算法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Stability analysis for predictive functional control based on Laguerre model

XU Ming-zhu, LIU He-ping, WANG Yun-jian

(Information Engineering School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China.

Correspondent: XU Ming-zhu, E-mail: mingzhu_xu@tom.com)

Abstract: An adaptive predictive functional control algorithm based on Laguerre model is designed. Performance of the closed-loop system is discussed, and robust stability condition is given based on Lyapunov stability theory. A parameter adjusting method is introduced. Genetic algorithm is applied to reduce online computation significantly and present strong robustness to parameters perturbation. Simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: Laguerre function; Lyapunov stability; Predictive functional control; Genetic algorithm

1 引言

自从 Richalet 和 Kuntze^[1,2] 提出预测函数控制方法(PFC)以来, PFC 以其算法简单、计算量小、跟踪快速准确等特点吸引了众多学者并成为研究的热点. 目前已出现了很多有关 PFC 算法的文献, 但它们大多要求控制对象的模型已知. 当模型结构或参数发生较大变化时, 控制效果会变差, 甚至导致系统失控. 而工业现场实际生产过程的数学模型往往难以确切知道, 工作条件改变和环境的变化常常会造成被控对象特性的不确定. 为了解决上述矛盾, 更好地适应实际生产需要, 许多学者进行了针对性研究. 文献[3]研究了系统模型结构已知, 参数变化的情况. 文献[4,5]基于神经网络研究了在模型未知的情况下, 被控对象的预测控制问题. 但神经网络训练和在线学习非常繁琐, 实际中很难应用. 本文利用 Laguerre 模型的优点, 提出一种新的预测函数控制算法.

Laguerre 函数逼近模型具有以下优点^[5]: 1) 模型包含了系统时滞和阶次的信息, 实现控制方案时, 不需事先知道系统的确定模型; 2) 该模型表征系统特性的参数少, 而且在改变模型阶次时低阶系数不用重复辨识, 在线计算量小. 正是这些优点使得 Laguerre 模型能很方便地应用于系统控制中, 由此出现了多种基于 Laguerre 模型的控制算法, 如: 自适应控制、预测控制、多模型控制等^[6-10].

本文算法是在 Laguerre 模型的基础上, 依据状态反馈的思想, 利用 Lyapunov 稳定性定理和奇异值理论推导出保证闭环控制系统稳定的条件. 为进一步提高控制性能, 引入遗传算法寻优的自适应控制策略, 通过衰减因子的在线调节, 当系统发生突变时能在保证闭环系统稳定的前提下, 提高控制品质. 仿真实验表明, 该算法控制精度较高, 当模型结构和参数变化较大时, 仍能实现稳定控制, 并且跟踪速度较快.

收稿日期: 2007-01-26; 修回日期: 2007-05-11.

基金项目: 北京市教委重点学科共建基金项目(00002268).

作者简介: 许鸣珠(1967—), 女, 石家庄人, 高级工程师, 博士, 从事预测控制、智能控制的研究; 刘贺平(1951—), 男, 沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、预测控制等研究.

2 Laguerre 模型^[5]

Laguerre 函数是平方可积函数空间 $L_2(0, \infty)$ 上的一组正交基, 定义为

$$\phi_i(t) = \sqrt{2p} \frac{e^{pt}}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} (t^{i-1} \cdot e^{-2pt}),$$

$$i = 1, 2, \dots$$

其 Laplace 变换为如下有理传递函数:

$$\phi_i(s) = \sqrt{2p} \frac{(s-p)^{i-1}}{(s+p)^i}.$$

如果取 N 阶 Laguerre 级数来近似系统, 则可表示为

$$Y(s) = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i(s) U(s).$$

对 Laguerre 网络离散化后, 系统模型可简化表示为如下状态方程的形式:

$$\begin{aligned} L(k+1) &= AL(k) + Bu(k), \\ y(k) &= CL(k). \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-a}{T} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{(-1)^{N-1} \frac{N-2}{2} a}{T^{N-1}} & \dots & \frac{-a}{T} & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = [\frac{1}{4} \quad (-2/T) \quad \dots \quad (-2/T)^{N-1} \quad \frac{1}{4}],$$

$$a = 1 - 2 + 3 - \dots, \quad 1 = \exp(-pT),$$

$$2 = T + \frac{2}{p} (\exp(-pT) - 1),$$

$$3 = -T \exp(-pT) - \frac{2}{p} (\exp(-pT) - 1),$$

$$4 = \sqrt{2p} \frac{(1-1)}{p},$$

$$L(k) = [l_1(k) \quad l_2(k) \quad \dots \quad l_N(k)]^T,$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N].$$

这里: N 是 Laguerre 函数逼近的阶数; Laguerre 模型的参数 p 不敏感, 一般可由先验知识选一个固定的值; T 是采样时间周期. 如果 (N, p, T) 确定, 上述各参数可离线计算得到. 从式 (1) 中可看出, Laguerre 模型与所表征对象的直接联系只有系数向量 C , 由于 $L(k)$ 可由式 (1) 通过 $u(k)$ 计算得到, 则系数 C 可方便地应用式 (2) 带遗忘因子最小二乘辨识算法在线获得.

对于系统 (1), 给出如下假设^[5]:

假设 1 参数 C 有界, 系统 (1) 稳定.

假设 2 Laguerre 模型能准确逼近系统真实模型, 且状态方程 (1) 是能观和能控的.

$$\begin{aligned} C(k) &= C(k-1) + \{ M(k) [y(k) - \\ & C(k-1) L(k-1)] \}^T, \end{aligned}$$

$$M(k) = \frac{P(k-1)L(k-1)}{+L^T(k-1)P(k-1)L(k-1)},$$

$$P(k) = \frac{1}{[P(k-1) - M(k)L^T(k)P(k-1)]}. \quad (2)$$

3 基于 Laguerre 模型的预测函数控制

预测函数控制的特点在于将输入结构化, 认为每一时刻的控制输入 u 是事先选定的基函数 u_{bj} 的线性组合, 即

$$u(k+i) = \sum_{j=1}^{n_b} \mu_j(k) u_{bj}(i). \quad (3)$$

其中: $u_{bj}(i)$ 是基函数在第 $k+i$ 采样周期的取值, n_b 是基函数个数, $\mu_j(k)$ 是对应基函数的线性加权系数. PFC 中基函数的选择依赖于设定值和对象本身的性质, 通常可取阶跃、斜坡、指数函数等. 对于一般对象取两个基函数 (阶跃和斜坡函数) 来构造控制量均能满足要求.

$$u(k+i) = \mu_1(k) + \mu_2(k) \times i. \quad (4)$$

利用线性状态反馈预测理论, 可从式 (1) 和 (4) 得出未来 $k+i$ 时刻的系统模型预测输出, 即

$$\begin{aligned} y_m(k+i) &= \\ & CA^i L(k) + C[A^{i-1} + A^{i-2} + \dots + I] B \mu_1(k) + \\ & C[A^{i-2} + 2A^{i-3} + \dots + (i-1)I] B \mu_2(k). \end{aligned} \quad (5)$$

PFC 是一种闭环控制算法, 在实际情况下, 由于二次噪声、系统时变等原因而引起模型预测输出与对象输出之间存在一定的预测误差. 将预测误差通过一个预估器, 对未来优化时域中的误差加以补偿, 可提高控制精度. 可取未来预测误差为

$$e(k+i) = y(k) - y_m(k), \quad (6)$$

其中 $y(k)$ 和 $y_m(k)$ 为 k 时刻的系统输出与模型输出.

PFC 采用二次型性能指标计算未来控制量 $u(k)$, 即

$$J = \sum_{i=H_1}^{H_2} [y_m(k+i) + e(k+i) - y_r(k+i)]^2. \quad (7)$$

其中: $[H_1, H_2]$ 是优化时域; $y_r(k+i)$ 是参考轨迹, 一般取如下形式:

$$y_r(k+i) = w(k+i) - \exp(-i/T_s) [w(k) - y(k)]. \quad (8)$$

这里: $\exp(-i/T_s)$ 是采样周期, T_s 是参考轨迹响应时间, $w(k)$ 是设定值, $y(k)$ 是过程输出.

为了由式 (7) 得到未知参数 $\mu_1(k)$ 和 $\mu_2(k)$, 只需利用优化时域中的两个点 H_1 和 H_2 , 则式 (7) 改写为

$$J = [y_m(k+H_1) + e(k+H_1) - y_r(k+H_1)]^2 +$$

$$[y_m(k + H_2) + e(k + H_2) - y_r(k + H_2)]^2. \quad (9)$$

利用式(5), (6), (8) 和(9) 可得

$$J = [X_1(k) + M_{11}\mu_1(k) + M_{12}\mu_2(k)]^2 + [X_2(k) + M_{21}\mu_1(k) + M_{22}\mu_2(k)]^2. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} X_1(k) &= CA^{H_1}L(k) + e(k + H_1) - y_r(k + H_1), \\ X_2(k) &= CA^{H_2}L(k) + e(k + H_2) - y_r(k + H_2), \\ M_{11} &= C(A^{H_1-1} + A^{H_1-2} + \dots + I)B, \\ M_{12} &= C[A^{H_1-2} + 2A^{H_1-3} + \dots + (H_1 - 1)I]B, \\ M_{21} &= C(A^{H_2-1} + A^{H_2-2} + \dots + I)B, \\ M_{22} &= C[A^{H_2-2} + 2A^{H_2-3} + \dots + (H_2 - 1)I]B. \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial J}{\partial \mu_1(k)} = 0, \frac{\partial J}{\partial \mu_2(k)} = 0$, 可得

$$\mu_1(k) = S_y y(k) + S_l L(k) + S_w w(k). \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} S_y &= Q(Q_3 M_{12} - Q_2 M_{11})(1 - A^{H_1}) + Q(Q_3 M_{22} - Q_2 M_{21})(1 - A^{H_2}), \\ S_l &= Q(Q_3 M_{12} - Q_2 M_{11})C(A^{H_1} - I) + Q(Q_3 M_{22} - Q_2 M_{21})C(A^{H_2} - I), \\ S_w &= -S_y. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_{11}^2 + M_{21}^2, \quad Q_2 = M_{12}^2 + M_{22}^2, \\ Q_3 &= M_{11}M_{12} + M_{21}M_{22}, \quad Q = 1/(Q_1 Q_2 - Q_3^2). \end{aligned}$$

则当前控制量

$$u(k) = \mu_1(k) = S_y y(k) + S_l L(k) + S_w w(k). \quad (12)$$

从式(11) 可知, 加权系数 $\mu_1(k)$ 存在的条件是 Q 存在, 因此在选择控制器参数 H_1 和 H_2 时, 应保证此条件满足. 一般而言, H_1 应大于模型的未知时滞数, H_2 应大到对象的动态特性能充分表现出来.

4 控制系统稳定性分析及算法改进

由假设 2, 式(12) 和系统状态方程(1) 可得如下闭环控制系统的状态空间方程:

$$L(k + 1) = A_c L(k) + B S_w w(k), \quad (13)$$

其中 $A_c = A + B S_l + B S_y C$. 由假设 1 可知, 参数 C 是有界的, 模型选定之后 A 和 B 是确定的. 由式(11) 和(12) 可知, S_l, S_w 和 S_y 是有界的, $w(k)$ 设定值也是有界的. 根据离散时间系统 Lyapunov 稳定性定理可知, 闭环控制系统的稳定性由 A_c 决定, 当 A_c 的全部特征值 $\lambda_i(A_c)$ 的幅值均小于 1 时系统是稳定的, 可用下式表示:

$$|\lambda_i(A_c)| < 1. \quad (14)$$

根据矩阵奇异值理论, 有如下性质成立:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A) &= \min_i |\lambda_i(A)|, \quad \sigma_{\max}(A) = \max_i |\lambda_i(A)|, \\ \sigma_{\min}(A_1 + A_2) &= \sigma_{\min}(A_1) + \sigma_{\min}(A_2), \end{aligned}$$

$$\sigma_{\min}(A) = \min_i |\lambda_i(A)|. \quad (15)$$

其中 $\sigma_{\min}(A)$ 表示矩阵 A 的最小奇异值, $\sigma_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大奇异值, $|\lambda_i(A)|$ 表示矩阵 A 的特征值的模, 是标量. 由式(14) 和(15) 可知, 下式成立时闭环系统是稳定的:

$$\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B S_l) + \sigma_{\min}(B S_y C) < 1. \quad (16)$$

在实际工程应用中, 为了在线调整方便灵活, 使状态反馈预测控制算法有较强的鲁棒性, 提高对生产过程变化的适应能力, 按状态反馈预测控制计算出的控制率先乘一个相应的衰减系数 再送出^[11], 使预测控制器送出的控制作用适当减小, 通常取 $0 < \alpha < 1$. 对此本文提出了补偿算法, 给控制率增加一个自适应的衰减因子 来保证闭环控制系统稳定, 即通过衰减因子的在线调整使系统满足稳定性条件. 当系统稳定运行时 α 取 1, 控制率保持原来的计算值以保证系统输出能快速跟随设定值; 当系统发生突变时 α 取小于 1 的值, 以抑制系统突变. 此时控制率为

$$u(k) = \alpha (S_y y(k) + S_l L(k) + S_w w(k)). \quad (17)$$

闭环控制系统的状态方程相应变为

$$L(k + 1) = A_f L(k) + B S_w w(k), \quad (18)$$

其中 $A_f = A + B S_l + B S_y C$. 则系统稳定的条件为

$$\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B S_l) + \sigma_{\min}(B S_y C) < 1. \quad (19)$$

依据矩阵奇异值性质, 对式(19) 进行变换得到衰减因子 α 的计算公式, 即

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B S_l) + \sigma_{\min}(B S_y C) &< 1, \\ \alpha &< \frac{1 - \sigma_{\min}(A)}{\sigma_{\min}(B S_l) + \sigma_{\min}(B S_y C)}. \end{aligned} \quad (20)$$

由式(20) 和(11) 可知, 当控制器参数选定之后, 只与表征对象模型变化的 C 有关. 当系统模型发生变化造成系统失稳时, 可通过调整参数 α 使系统满足稳定性条件.

5 改进自适应补偿算法的实现

式(14) ~ (20) 根据矩阵奇异值理论进行的推导实际上缩小了系统稳定的范围, 条件趋于保守, 有可能将一些可以稳定的情况排除在外了. 为了兼顾稳定性和控制性能, 本文采用遗传算法寻优的方法, 直接根据 $|\lambda_i(A_f)| < 1$ 在线寻找匹配的 α 值, 实现系统的自适应控制. 遗传算法是模拟遗传选择和自然淘汰的生物进化过程的计算模型, 是一种新的全局优化搜索算法, 具有简单通用、鲁棒性强、适于并行处理等优点.

本文的仿真就是利用遗传算法在每一采样周期计算最优的 α 值. 寻优的目标是保证 A_f 最大特征值的模小于 1 的情况下, 在 $0 < \alpha < 1$ 范围内找到一个

较大的，既保证系统稳定又满足控制要求。

具体算法步骤如下：

Step1：建立初始种群。任意生成一个元素都在 $(0, 1)$ 之内的 20×2 矩阵 X_0 作为初始种群， X_0 的第 1 列存放衰减因子， X_0 的第 2 列存放相应的适应度函数，表示与对应的 A_f 最大特征值的模。

Step2：计算产生新种群 X_1 。根据上一代种群矩阵中的，计算相应的适应度函数。结果在 $(0, 1)$ 之内就保留下来；反之，则将任意给定一个 $(0, 1)$ 之间的值，重新计算。比较适应度函数，将最大的一行记录下来，形成最优记录。

Step3：种群复制。从 X_1 中任选两行，比较衰减因子，将较大的行记录下来，得到新种群 X_2 。

Step4：种群交叉。依次计算种群中第 i 行和第 $i + 10$ 行值的和与差，在 $(0, 1)$ 之内就保留下来；反之，则任意给定一个 $(0, 1)$ 之间的值，得到新种群 X_3 。

Step5：种群变异。如果满足变异条件，则给第 i 行的加上一个 $(0, 1)$ 之间的随机值，结果在 $(0, 1)$ 之内就保留下来；反之，则任意给定一个 $(0, 1)$ 之间的值，得到新种群 X_4 。

Step6：如果达到设定的循环次数，结束程序，将得到的最优记录用于控制率的计算；否则，返回 Step2 进行下一代遗传优化计算。

本文所讨论的问题比较简单，在上述计算中种群选择 20 个染色体，经过 50 代遗传就能得到优化的值。下面的仿真实验将证明，本文设计的遗传优化算法无论是速度还是精度都能满足稳定控制的要求，并能很好地完成在线寻找值的任务。

6 仿真实验

为了验证算法的有效性，本文进行了大量的仿真实验。当模型变化较小时，普通 Laguerre PFC 和本文所提优化 Laguerre PFC 算法均能实现自适应控制，得到满意的控制结果。

考虑离散型系统

$$G_1(z) = \frac{0.3z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} + 0.32z^{-2}},$$

$$G_2(z) = \frac{0.1z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - 0.6z^{-1} - 0.009z^{-2} + 0.15z^{-3} - 0.1z^{-4}},$$

$$G_3(z) = \frac{0.3z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 - 0.72z^{-1} + 0.7z^{-2}}.$$

初始模型 G_1 是一个带 1 步时延的 2 阶系统，假设在第 1 000 个采样周期后，系统跳变为 4 阶模型 G_2 ，在第 2 000 个采样周期后系统跳变为 2 阶模型 G_3 ，模型的结构和参数发生了较大变化。控制器参数取 H_1

$= 4, H_2 = 12, N = 7, p = 1.1$ ，遗忘因子 $= 0.99$ ，设定值为 1。

图 1 为普通 Laguerre PFC 方法的仿真结果。其中： y 是系统输出曲线， u 是对应的调节曲线， C 是系统参数辨识曲线。从图中可知，当模型突变时系统输出 y 和控制量 u 均发生了较大变化，实际值在 $(-60, 30)$ 之间波动，远远偏离了设定值轨线，闭环系统失稳，无法保持正常工作状态。

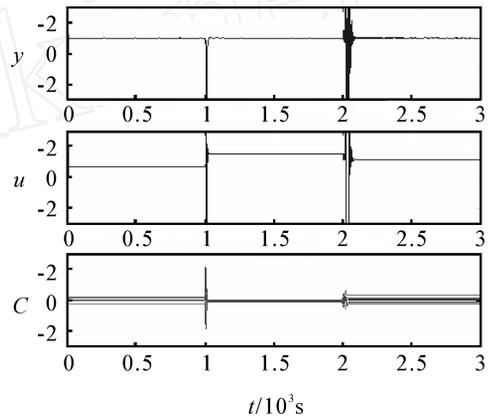


图 1 普通 Laguerre PFC 方法在模型突变时的控制

图 2 为本文方法在同样情况下的仿真曲线。其中： β 是系统调节过程中得到的衰减因子的变化情况； y, u, C 与图 1 意义相同。对比图 1 和图 2 可以发现，在第 1 000 和第 2 000 个采样周期发生模型跳变时，由于模型变化太大，辨识参数、控制量及衰减因子都随之进行了较大调整，以保证闭环系统的稳定性。当模型突变时，本文方法能明显地改善闭环控制系统性能。另外，在投运初期因系统模型参数辨识不够准确而造成的系统波动，衰减因子也有一定的调节作用。

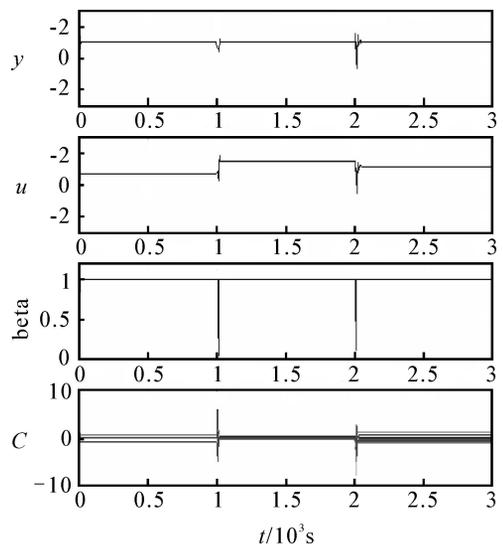


图 2 本文方法在模型突变时的自适应控制

7 结 论

本文提出的基于 Laguerre 模型的稳定自适应

预测函数控制算法, 在实现控制方案时, 不需事先知道系统模型的结构和参数, 在线计算量小, 能根据对象的变化自动辨识模型, 调整控制规律, 实现自适应控制. 本文给出了保证闭环系统稳定的条件, 依据该条件提出的遗传优化参数补偿方案, 扩大了该控制算法的适用范围, 提高了控制品质. 仿真实验表明, 本文所提方法适用范围广, 鲁棒性强.

参考文献(References)

- [1] Richalet J, Arber C. Predictive functional control: Application to fast and accurate robots[C]. Proc of the 10th IFAC World Congress. Munich, 1987: 251-258.
- [2] Kuntze H B, Jacubasch A. On the application of a new method for fast and robust[C]. 1988 IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Leqacv, 1988: 1574-1580.
- [3] 张泉灵, 王树青. 基于 ARMAX 模型自适应预测函数控制[J]. 信息与控制, 2000, 29(5): 431-436.
(Zhang Quan-ling, Wang Shu-qing. Adaptive predictive function control based on ARMAX model [J]. Information and Control, 2000, 29(5): 431-436.)
- [4] 张泉灵, 王树青. 基于神经网络的非线性预测函数控制[J]. 浙江大学学报, 2001, 35(5): 497-500.
(Zhang Quan-ling, Wang Shu-qing. Nonlinear predictive function control based on neural network [J]. J of Zhejiang University, 2001, 35(5): 497-500.)
- [5] 刘贺平, 张兰玲, 孙一康. 基于多层局部回归神经网络的多变量非线性系统预测控制[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(2): 298-300.
(Liu He-ping, Zhang Lan-ling, Sun Yi-kang. Predictive control of multivariable nonlinear system based on multilayer local recurrent neural networks [J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(2): 298-300.)
- [6] Christos C, Zerovos, Dumout G A. Deterministic adaptive control based on Laguerre series representation [J]. Int J Control, 1988, 48(6): 2333-2359.
- [7] Vivas A, Pognet P, Pierrot F. Predictive functional control for a parallel robot[C]. Int Conf on Intelligent Robots and Systems. Las Vegas, 2003, 3: 2785-2790.
- [8] 李嗣福, 刘勇. 一种基于 Laguerre 函数模型的预测控制算法[J]. 中国科技大学学报, 1999, 29(3): 281-288.
(Li Si-fu, Liu Yong. An adaptive predictive control algorithm based on the Laguerre function approximate model [J]. J of China University of Science and Technology, 1999, 29(3): 281-288.)
- [9] Zhang Quan-ling. Nonlinear predictive functional control using Hammerstein models [J]. J of Zhejiang University, 2002, 36(2): 119-22.
- [10] 韩璞, 王东风, 王国玉. 多模型预测函数控制及其应用研究[J]. 控制与决策, 2003, 18(3): 375-381.
(Han Pu, Wang Dong-feng, Wang Guo-yu. Multi-model predictive functional control and its application [J]. Control and Decision, 2003, 18(3): 375-381.)
- [11] 胡品慧, 袁璞. 关于状态反馈预测控制系统的极点配置[J]. 控制与决策, 2001, 16(6): 910-913.
(Hu Pin-hui, Yuan Pu. On pole placement of state feedback model predictive control systems [J]. Control and Decision, 2001, 16(6): 910-913.)
- [9] Parsopoulos K E, Plagianakos V P, Magoulas G D, et al. Improving particle swarm optimizer by function "stretching" [C]. Advances in Convex Analysis and Global Optimization. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001: 445-457.
- [10] 王俊伟, 汪定伟. 一种带有梯度加速的粒子群算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1298-1300.
(Wang Jun-wei, Wang Ding-wei. Particle swarm optimization algorithm with gradient acceleration [J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1298-1300.)
- [11] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm: Explosion stability and convergence in a multi-dimensional complex space [J]. IEEE Trans on Evolution Computer, 2002, 6(1): 58-73.
- [12] Trelea I C. The particle swarm optimization algorithm: Convergence analysis and parameter selection [J]. Information Processing Letters, 2003, 85(6): 317-325.
- [13] Eberhart R C, Shi Y. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization[C]. Proc of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. La Jolla, 2000: 84-88.
- [14] Van den Bergh F. An analysis of particle swarm optimizers[D]. South Africa: University of Pretoria, 2002.

(上接第 514 页)