

文章编号: 1001-0920(2008)06-0651-04

# 带传输滞后的线性离散系统的状态反馈镇定

朱建栋

(南京师范大学 数学与计算机科学学院, 南京 210097)

**摘要:** 针对存在传输滞后的线性离散系统的状态反馈镇定问题, 给出了系统可镇定的一个内部限制条件. 为克服这一限制条件, 提出了两种方法: 一种是充分利用滞后状态的信息, 另一种是设计带有递推动态的状态反馈控制器. 研究表明, 若系统在没有传输滞后时能通过状态反馈被镇定, 则存在传输滞后时一定也能通过设计新的控制器使系统被镇定.

**关键词:** 线性离散系统; 状态反馈; 传输滞后; 镇定

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## State feedback stabilization for linear discrete systems with transmission delays

ZHU Jian-dong

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China. E-mail: jdzhu@seu.edu.cn)

**Abstract:** For the problem of state feedback stabilization for linear discrete systems with transmission delays, an inherent limitation for the stabilization problem is obtained. In order to overcome the inherent limitation, two methods are proposed. One is using enough information of the delayed states. The other is designing recursive state feedback controllers. Research results show that if a system without transmission delay can be stabilized by a state feedback, the one with transmission delay still can be stabilized by the designed state feedback controller.

**Key words:** Linear discrete systems; State feedback; Transmission delay; Stabilization

### 1 引言

反馈控制, 特别是状态反馈是现代控制理论的一个基本内容. 以线性离散系统为例, 考虑

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (1)$$

其中:  $x \in R^n, u \in R^p, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times p}$ . 如果  $(A, B)$  是能稳的, 即  $\text{rank}[sI - A] = n, \forall s \in \sigma(A), |s| > 1$ ,  $\sigma(\cdot)$  表示特征根集, 则总存在状态反馈  $u(k) = Kx(k)$ , 使闭环系统

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) \quad (2)$$

渐近稳定, 即存在  $K$  使得  $A + BK$  的特征根都在单位圆内. 但是, 在许多实际系统中, 比如网络控制系统<sup>[1,2]</sup>, 系统状态往往不能及时传输到控制器中, 或者说, 在  $k$  时刻无法获得系统当时的状态  $x(k)$ , 而只能获得  $k$  时刻之前的滞后了  $m$  步的状态  $x(k-m)$ , 那么实际控制器为  $u(k) = Kx(k-m)$ . 由此, 一个自然的问题就是利用滞后的状态进行反馈控制, 系统能镇定的条件是什么? 这正是文献[3,4]所提出

的问题. 为更清晰地理解这一问题, 下面通过一个简单的例子加以说明. 考虑一维离散系统

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k), \quad x \in R, u \in R. \quad (3)$$

显然开环系统不稳定, 只需取  $u(k) = -\frac{3}{2}x(k)$ , 闭环系统便渐近稳定. 但是, 如果状态反馈滞后一步, 则实际控制器为  $u(k) = -\frac{3}{2}x(k-1)$ , 闭环系统为

$$x(k+1) = 2x(k) - \frac{3}{2}x(k-1). \quad (4)$$

它是一个二阶差分方程, 其特征多项式为  $\lambda^2 - 2\lambda + 3/2$ , 解得系统极点为

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}j}{2}. \quad (5)$$

易见,  $|\lambda_{1,2}|^2 = 3/2 > 1$ . 由此可见, 在状态反馈中发生传输滞后, 可能会使原来稳定的闭环系统变得不稳定. 另外, 容易验证, 对于任意  $K$ , 闭环系统  $x(k+1) = 2x(k) - Kx(k-1)$  都不是渐近稳定的. 那么

收稿日期: 2007-03-12; 修回日期: 2007-06-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10701042); 数学天元基金项目(10526025).

作者简介: 朱建栋(1976—), 男, 山东东营人, 副研究员, 博士, 从事广义系统、混沌控制的研究.

能被滞后的状态反馈渐近镇定的系统应满足什么限制条件呢?文献[4]针对单输入的能控离散系统进行了讨论,给出了一个充要条件,但此条件很难验证,对于滞后步数为1或系统阶数为1的特殊情形,得到了非常简洁的充要条件,而对于滞后步数为2时,充要条件的表达式及其推导则较为复杂.那么,一个很自然的想法是,能否通过改变控制器的结构,比如更多地利用滞后信息或设计动态的控制器来克服这样的限制条件呢?能否从控制器设计的角度避开解决传输滞后所带来的问题的复杂性呢?这正是本文要解决的主要问题.事实上,这一想法来源于人们在混沌系统的滞后反馈控制方面的研究成果<sup>[5-7]</sup>以及相关的参考文献<sup>[8,9]</sup>.然而,在混沌系统的滞后反馈控制中,所研究的是Pyragas在文献[10]中提出的形如 $u(t) = K[x(t) - x(t - T)]$ 的控制器及其离散形式 $u(k) = K[x(k) - x(k - 1)]^{[11]}$ .由于其中仍用到当前状态,不涉及传输滞后的问题.

对于多输入线性离散系统,本文给出了传输滞后 $m$ 步下,系统可经静态的状态反馈得到镇定的一个必要条件(或一个限制条件).为了克服这一限制条件,提出了两种方法:一是对于滞后步数为1而且是单输入的情形,在控制器中利用更多的滞后状态作为反馈信息;二是对于滞后步数为任意 $m$ 的情形,设计多步递推滞后反馈控制器.对于这两种新形式的滞后控制器,只要原系统在无传输滞后时是传统的状态反馈下能稳的,则在有传输滞后时,在新形式的控制器作用下仍是能稳的.

## 2 传输滞后情形下系统镇定的限制条件

考虑线性离散控制系统(1),假设系统的传输滞后的步数为 $m$ ,设 $u(k) = Kx(k - m)$ ,则闭环系统

$$x(k + 1) = Ax(k) + BKx(k - m). \quad (6)$$

令 $y_1(k) = x(k - m)$ ,  $y_2(k) = x(k - m + 1)$ , ...,  $y_{m+1}(k) = x(k)$ ,则闭环系统(6)可重写为

$$\begin{bmatrix} y_1(k + 1) \\ \vdots \\ y_m(k + 1) \\ y_{m+1}(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ & \ddots & & \\ & & I & \\ BK & 0 & \dots & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \\ y_{m+1}(k) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

易见,闭环系统的特征多项式

$$d(s) = \det(s^{m+1}I - s^m A - BK). \quad (8)$$

**引理1** 如果 $r := \text{rank } B < n$ ,那么闭环系统

的特征多项式 $d(s)$ 有特征根 $s = 0$ ,且其重数 $q = n - r$ .

**证明** 记 $A$ 为系统(7)的系数矩阵.易见

$$\text{rank } A = mn + \text{rank}(BK) = mn + r. \quad (9)$$

因为 $r < n$ ,故 $d(0) = \det(BK) = 0$ ,因此 $s = 0$ 是特征根,其重数 $q$ 满足

$$q = (m + 1)n - \text{rank } A \\ = (m + 1)n - mn - r = n - r. \quad (10)$$

由此引理1得证.

**定理1** 存在 $K$ 使闭环系统(5)渐近稳定的一个必要条件是

$$|\text{trace } A| < mn + r, \quad (11)$$

其中 $r = \text{rank } B$ .

**证明** 由引理1,可将闭环系统特征多项式写成

$$d(s) = s^{mn+r} \prod_{i=1}^{mn+r} (s - \lambda_i). \quad (12)$$

因为闭环系统是渐近稳定的,故 $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, mn + r$ .再由 $A$ 的形式,得

$$|\text{trace } A| = \left| \sum_{i=1}^{mn+r} \lambda_i \right| < mn + r. \quad (13)$$

由此定理1得证.

**注1** 特别地,对于滞后步数为1的单输入系统,条件(11)即为 $|\text{trace } A| < n + 1$ ,这正是文献[4]中在系统能控情形下所得到的充要条件.

## 3 克服传输滞后情形下状态反馈的限制条件

由以上定理可见,存在传输滞后情形下,要想通过状态反馈实现对系统的镇定,被控系统必须满足一定的限制条件.要想克服这种限制条件,需设计新形式的反馈控制器.这里采用两种方法:一是在反馈控制中利用更多的滞后状态的信息,二是设计具有递推动态的反馈控制器.

**定理2** 设单输入系统 $(A, b)$ 能控,即 $\text{rank}[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = n$ ,则存在如下的滞后反馈控制:

$$u(k) = K_1 x(k - 1) + K_2 x(k - 2) + \dots + K_l x(k - l), \quad (14)$$

使得闭环系统渐近稳定的充要条件是

$$|\text{trace } A| < n + l. \quad (15)$$

**证明** 不失一般性,设 $(A, b)$ 为能控标准形 $x(k + 1) = Ax(k) + bu(k)$ ,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x(k) = [x_1(k), \dots, x_{n-1}(k), x_n(k)]^T. \quad (16)$$

设  $K_i = [K_{i1} \quad K_{i2} \quad \dots \quad K_{in}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . 则闭环系统

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ &\dots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k), \\ x_n(k+1) &= \\ &\quad \sum_{i=1}^n a_i x_i(k) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j(k-i). \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$\begin{aligned} y_1(k) &= x_1(k-l), \\ y_2(k) &= x_1(k-l+1), \\ &\dots \\ y_l(k) &= x_1(k-1), \\ y_{l+1}(k) &= x_1(k), \\ y_{l+2}(k) &= x_1(k+1) = x_2(k), \\ y_{l+3}(k) &= x_1(k+2) = x_3(k), \\ &\dots \\ y_{l+n}(k) &= x_1(k+n-1) = x_n(k), \end{aligned}$$

则闭环系统可重写为

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= y_2(k), \\ &\dots \\ y_{n+l-1}(k+1) &= y_{n+l}(k), \\ y_{n+l}(k+1) &= \\ &\quad \sum_{i=1}^n a_i y_{l+i}(k) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n K_{ij} y_{l+j}(k-i) = \\ &\quad \sum_{i=1}^n a_i y_{l+i}(k) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n K_{ij} y_{l-i+j}(k). \end{aligned} \quad (18)$$

1) 必要性. 可见, 在系统 (18) 的最后一个方程中,  $y_{l+n}(k)$  的系数为  $a_n$ , 所以可设系统 (18) 的特征多项式为

$$s^{n+l} - a_n s^{n+l-1} + d_{n+l-2} s^{n+l-2} + \dots + d_1 s + d_0. \quad (19)$$

因为闭环系统是渐近稳定的, 从而式 (19) 的特征根  $i (i = 1, 2, \dots, n+l)$  都在单位圆内. 所以

$$|a_n| = \prod_{i=1}^{n+l} |i| < n+l, \quad (20)$$

即式 (15) 成立.

2) 充分性. 由式 (15) 得  $|a_n| < n+l$ . 取  $\epsilon = a_n / (n+l)$ , 则  $|\epsilon| < 1$ . 易算得

$$\begin{aligned} (s - \epsilon)^{n+l} &= \\ s^{n+l} - a_n s^{n+l-1} + C_{n+l}^2 \epsilon^2 s^{n+l-2} + \\ &\dots + (-1)^{n+l} \epsilon^{n+l}. \end{aligned} \quad (21)$$

取  $K_{ij} = 0 (i, j = 2, 3, \dots, l)$ , 则系统 (18) 的特征多项式为

$$s^{n+l} - a_n s^{n+l-1} - (a_{n-1} + K_{1n}) s^{n+l-2} -$$

$$\begin{aligned} &\dots - (a_1 + K_{12}) s^l - K_{11} s^{l-1} - \\ &K_{21} s^{l-2} - \dots - K_{ln}. \end{aligned} \quad (22)$$

比较式 (21) 和 (22), 只需取

$$\begin{aligned} K_{11} &= (-1)^n C_{n+l}^{n+1}, \\ K_{21} &= (-1)^{n+1} C_{n+l}^{n+2}, \\ &\dots \\ K_{l1} &= (-1)^{n+l-1} C_{n+l}^{n+l}; \\ K_{12} &= (-1)^{n-1} C_{n+l}^n - a_1, \\ K_{13} &= (-1)^{n-2} C_{n+l}^{n-1} - a_2, \\ &\dots \\ K_{1n} &= -C_{n+l}^2 - a_{n-1}. \end{aligned}$$

就可使得闭环系统的特征根全为  $\epsilon$ , 而  $|\epsilon| < 1$ , 故闭环系统渐近稳定.

注 2 对于任意  $A$ , 总存在正整数  $l$ , 使得限制条件 (15) 被满足. 因此, 只要充分地利用滞后的状态信息, 就可以完全克服传输滞后所带来的内部限制. 这与文献 [5] 中的结果有相似之处, 在文献 [5] 中发现, 推广的 Pyragas 滞后反馈控制利用了更多的滞后的状态的信息, 从而减弱了原始 Pyragas 滞后反馈控制的内部限制条件.

注 3 如果系统  $(A, B)$  不是能控的, 仅是能稳的, 则只需对  $(A, B)$  作能控性分解即可得到形如式 (14) 的滞后反馈控制器.

下面考虑滞后步数为任意给定的自然数  $m$  的多输入线性离散系统, 控制器的设计采用具有递推动态的滞后反馈控制.

定理 3 假设离散控制系统  $(A, B)$  是能稳的, 即存在  $K$  使得  $A + BK$  的特征根都在单位圆内. 设传输滞后的步数为  $m$ , 则如下递推的滞后反馈控制器:

$$u(k) = KA^m x(k-m) + \sum_{i=1}^m KA^{i-1} Bu(k-i), \quad (23)$$

可使得闭环系统渐近稳定.

证明 在控制器 (23) 的作用下, 闭环系统为如下的差分方程组:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \\ Ax(k) + BKA^m x(k-m) + \\ &\quad \sum_{i=1}^m BKA^{i-1} Bu(k-i), \\ u(k) &= \\ KA^m x(k-m) + \sum_{i=1}^m KA^{i-1} Bu(k-i), \end{aligned}$$

其中系统状态为  $[x(k), u(k-1)]^T$ . 它的特征多项式为

$$\det \begin{bmatrix} Is^{m+1} - As^m - BKA^m & - \sum_{i=1}^m BKA^{i-1}Bs^{m-i} \\ - KA^m & Is^m - \sum_{i=1}^m KA^{i-1}Bs^{m-i} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} Is^{m+1} - As^m & - Bs^m \\ - KA^m & Is^m - \sum_{i=1}^m KA^{i-1}Bs^{m-i} \end{bmatrix} =$$

$$s^{mm} \det \begin{bmatrix} Is - A & - B \\ - KA^m & Is^m - \left( \sum_{i=1}^m KA^{i-1}s^{m-i} \right) B \end{bmatrix} =$$

$$s^{mm} \det \begin{bmatrix} Is - A & - B \\ - KA^m - \left( \sum_{i=1}^m KA^{i-1}s^{m-i} \right) (Is - A) & Is^m \end{bmatrix} =$$

$$s^{mm} \det \begin{bmatrix} Is - A & - B \\ - Ks^m & Is^m \end{bmatrix} = s^{2mm} \det [Is - (A + BK)]. \quad (24)$$

因  $A + BK$  的特征根都在单位圆内,故由式(24)可得在控制器(23)作用下闭环系统渐近稳定。

**注4** 研究表明,如果系统在没有传输滞后时能通过状态反馈被镇定,则存在传输滞后时一定也能通过设计具有递推动态的状态反馈控制器被镇定.这里的一些想法是受文献[8,9]的启示,但所考虑的问题、控制器的设计以及论证的方法则完全不同。

### 4 仿真例子

**例1** 考虑一维离散系统(3),设传输滞后的步数  $m = 1$ .由于条件(11)不满足,对于任意  $K$ ,控制器  $u(k) = Kx(k-1)$  都不能使闭环系统渐近稳定.但是,只需取  $l = 2$ ,就可使式(15)成立.由定理2的证明过程得  $K_1 = -4/3, K_2 = 8/27$ .在控制器  $u(k) = K_1x(k-1) + K_2x(k-2)$  的作用下,闭环系统的极点为  $2/3$ (三重),因此闭环系统渐近稳定.设定初始值  $x(-2) = 2, x(-1) = 10, x(0) = 4$ ,对控制系统作数值仿真.由图1可见,闭环系统是渐近稳定的。

### 例2 考虑多输入离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x \in R^4, u \in R^2.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 10 & 13 & 2 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & -2 \\ -10 & -14 & -5 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \\ -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

设传输滞后步数为2,容易验证  $(A, B)$  是能稳的.设期望极点为  $\pm 0.5, \pm 0.3$ .利用 Matlab 容易算得一

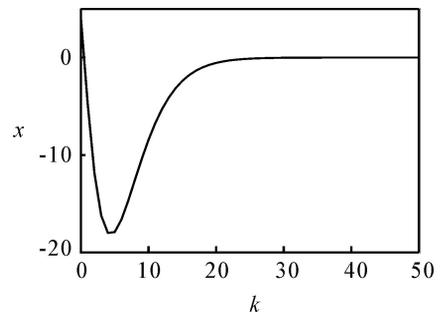


图1 状态 x 的受控行为

个反馈增益矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -0.5394 & -1.3074 & 0.7916 & -0.5452 \\ 2.3504 & 2.3215 & 1.4023 & 1.6231 \end{bmatrix},$$

使得  $A + BK$  的特征根即为期望极点.令

$$K_1 = KA^2 = \begin{bmatrix} -34.4942 & -39.0090 & -25.0895 & -30.7358 \\ -20.3913 & -24.6828 & 0.0589 & -14.6740 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = KB = \begin{bmatrix} -3.3069 & 3.0783 \\ -1.6861 & -0.6931 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = KAB = \begin{bmatrix} -1.8879 & 10.1436 \\ -9.0157 & 6.7103 \end{bmatrix},$$

则由定理3可得到递推滞后反馈控制器

$$u(k) = K_1x(k-2) + K_2u(k-1) + K_3u(k-2).$$

设定初始值

$$x(-2) = [5 \ 2 \ -6 \ 0]^T,$$

$$x(-1) = [-5 \ 3 \ 5 \ 4]^T,$$

$$x(0) = [5 \ 2 \ 0 \ 5]^T, u(-1) = [3 \ 4]^T,$$

$$u(-2) = [-3 \ 6]^T,$$

对控制系统作数值仿真.由图2可见,闭环系统是渐近稳定的.其中实线、“o”以及“x”分别表示状态 x 的4个状态分量。

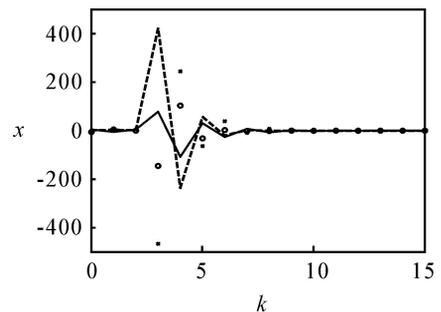


图2 状态 x 的4个分量的受控行为

### 5 结论

本文讨论了带传输滞后的线性离散系统的状态反馈镇定问题,给出了系统可镇定的一个内部限制条件.在两种情形下,分别通过利用更多的滞后状态信息以及设计动态的递推反馈控制器,有效地克服了这一限制条件。  
(下转第664页)

度为代价的前提下,可有效地提高预测精度,且支持向量的个数相对于普通高斯核有所减少,增强了模型的泛化性能.

### 参考文献(References)

- [1] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [2] Smola A J, Schölkopf B. A tutorial on support vector regression[R]. London: University of London, 1998.
- [3] Cristianini N, Shawe-Taylor J, Elisseeff A. On kernel target alignment [C]. Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge: MIT Press, 2002: 367-373.
- [4] Kandola J, Shawe-Taylor J, Cristianini N. On the extensions of kernel alignment[R]. Cumberland Lodge: NeuroCOLT, 2002.
- [5] 朱燕飞, 伍建平, 毛宗源, 等. MISO 系统的混合核函数 LS-SVM 建模[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 417-420.  
(Zhu Y F, Wu J P, Mao Z Y, et al. Modeling of LS-SVM based on mixtures of kernels for MISO systems [J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 417-420.)
- [6] Lanckriet G R G, Cristianini N, Bartlett P, et al. Learning the kernel matrix with semidefinite programming [J]. J of Machine Learning Research, 2004, 5: 27-72.
- [7] Ong C S, Smola A J, Williamson R C. Hyperkernels [C]. Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge: MIT Press, 2003: 495-502.
- [8] Ong C S, Smola A J, Williamson R C. Learning the kernel with hyperkernels [J]. J of Machine Learning Research, 2003, 3: 1001-1029.
- [9] Schölkopf B, Smola A J. Learning with kernels [M]. Cambridge: MIT Press, 2002.
- [10] Genton M G. Classes of kernels for machine learning: A statistical perspective [J]. J of Machine Learning Research, 2003, 3: 1001-1029.
- [11] Anderson E D, Anderson A D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming [C]. High Performance Optimization. Berlin: Springer, 2000: 197-232.
- [12] Box G E P, Jenkins G M, Reinsel G C. Time series analysis, forecasting and control [M]. 3rd Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2005.

(上接第 654 页)

### 参考文献(References)

- [1] Lian F L, Moyne J, Tilbury D. Analysis and modeling of networked control systems: MIMO case with multiple time delays [C]. Proc of the American Control Conf. Arlington, 2001, 6: 4306-4312.
- [2] Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.
- [3] Yong J. Stabilization of linear systems by time-delay feedback controls [J]. Quarterly Applied Mathematics, 1987, 36(2): 377-388.
- [4] Yong J, Arapostathis A. Stabilization of discrete-time linear systems with a time delay in the feedback loop [J]. Int J Control, 1988, 48(4): 1475-1485.
- [5] Tian Y P, Zhu J. Full characterization on limitation of generalized delayed feedback control for discrete-time systems [J]. Physica D, 2004, 198(3): 248-257.
- [6] Zhu J, Tian Y P. Necessary and sufficient conditions for stabilizability of discrete-time systems via delayed feedback control [J]. Physics Letters A, 2005, 343(1): 95-107.
- [7] Zhu J, Tian Y P. Nonlinear recursive delayed feedback control for chaotic discrete-time systems [J]. Physics Letters A, 2003, 310(4): 295-300.
- [8] Yamamoto S, Hino T, Ushio T. Dynamic delayed feedback controller for chaotic discrete-time systems [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems — I: Fundamental and Applications, 2001, 48(6): 785-789.
- [9] Yamamoto S, Hino T, Ushio T. Recursive delayed feedback control for chaotic discrete-time systems [C]. Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control. Orlando, 2001: 2187-2192.
- [10] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. Physics Letters A, 1992, 170(4): 421-428.
- [11] Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems — I: Fundamental and Applications, 1996, 43(9): 851-856.