第 23 卷 第 6 期 控 制 与 决 策 2008 年 6 月
Vol. 23 No. 6 Control and Decision Jun. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)06-0607-06

模糊数直觉模糊几何集成算子及其在决策中的应用

汪 新 凡
(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412008)

摘 要: 模糊数直觉模糊集是直觉模糊集的拓展. 针对模糊数直觉模糊信息的集成问题, 定义了模糊数直觉模糊数的一些运算法则, 基于这些法则给出了一些新的几何集成算子, 即模糊数直觉模糊加权几何(FIFWG)算子、模糊数直觉模糊有序加权几何(FIFOWG)算子和模糊数直觉模糊混合几何(FIFHG)算子. 在此基础上, 提出一种属性权重确知且属性值以模糊数直觉模糊数形式给出的多属性群决策方法. 最后通过实例分析结果证明了该方法的有效性.

关键词: 模糊数直觉模糊集; 运算法则; 集成算子; 群决策
中图分类号: N945.25 **文献标识码**: A

Fuzzy number intuitionistic fuzzy geometric aggregation operators and their application to decision making

WANG Xin-fan
(School of Science, Hu'nan University of Technology, Zhuzhou 412008, China. E-mail: zzwxfydm@126.com)

Abstract: A fuzzy number intuitionistic fuzzy set is a generalization of intuitionistic fuzzy set. For the fuzzy number intuitionistic fuzzy information aggregating problems, some operational laws of fuzzy number intuitionistic fuzzy numbers are defined, based on which some new geometric aggregation operators are developed, such as the fuzzy number intuitionistic fuzzy weighted geometric (FIFWG) operator, the fuzzy number intuitionistic fuzzy ordered weighted geometric (FIFOWG) operator and the fuzzy number intuitionistic fuzzy hybrid geometric (FIFHG) operator. Based on these operators, an approach for solving uncertain multiple attribute group decision making problems is proposed, in which the attribute weights are completely known and the attribute values are fuzzy number intuitionistic fuzzy numbers. Finally, an illustrative example show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Fuzzy number intuitionistic fuzzy set; Operational laws; Aggregation operator; Group decision making

1 引 言

1986 年, Atanassov[1] 提出了直觉模糊集的概念; 1993 年, Gau 和 Buehrer[2] 提出了 Vague 集的概念; 1996 年, Bustince 等人[3] 指出 Vague 集就是直觉模糊集. 为了方便, 本文统一称之为直觉模糊集. 直觉模糊集是 Fuzzy 集的拓展, 其特点是同时考虑了隶属度和非隶属度, 能表示和处理 Fuzzy 集无法表示和处理的不确定性, 更具灵活性和实用性. 文献[4,5]对直觉模糊信息的集成方法及其应用进行了研究, 并提出一些集成直觉模糊信息的算术集成算子[4] 和几何集成算子[5]. 1989 年, Atanassov 和 Gargov[6] 对直觉模糊集进行了拓展, 用区间数表示隶属度和非隶属度, 提出了区间值直觉模糊集的概念. 文献[7,8]对区间直觉模糊信息的集成方法及其应用也进行了研究, 并提出一些区间直觉模糊信息的集成算子. 最近, 文献[9]将直觉模糊集作了进一步的拓展, 用三角模糊数表示隶属度和非隶属度, 提出了模糊数直觉模糊集的概念. 但有关模糊数直觉模糊信息的集成方法及其应用的研究尚少, 而该类问题又有着重要的理论意义和较高的实际应用价值, 因而有必要对其进行探讨.

本文定义了模糊数直觉模糊数的一些运算法则. 基于这些法则, 提出了一些集成模糊数直觉模糊信息的几何算子; 定义了模糊数直觉模糊数的两个记分函数, 给出了模糊数直觉模糊数的一种简单的排序方法; 进而基于这些算子, 提出一种属性权重确知且属性值以模糊数直觉模糊数形式给出的不确定多属性群决策方法.

收稿日期: 2007-11-05; **修回日期**: 2008-01-27.
基金项目: 湖南省教育厅科学研究项目(07C232); 湖南省教育科学"十一五"规划项目(XJK06CJJ044).
作者简介: 汪新凡(1966—), 男, 湖南安化人, 副教授, 从事信息融合与决策分析的研究.

2 模糊数直觉模糊集

定义 1[1] 设论域 U 是一个非空有限集合,称 $V=\{(u,\langle t_V(u),f_V(u)\rangle)\mid u\in U\}$ 为直觉模糊集. 其中:$t_V(u)$ 和 $f_V(u)$ 分别表示 U 中元素 u 属于 U 的隶属度和非隶属度,即 $t_V:U\to[0,1]$, $f_V:U\to[0,1]$,而且 $0\leqslant t_V(u)+f_V(u)\leqslant 1$, $\forall u\in U$.

由于客观事物的复杂性和不确定性,隶属度和非隶属度往往难以用精确的实数值表达,而用区间数形式表达则比较合适[7,8]. 但用区间数表示时,有时为了覆盖整个取值范围,区间的两个端点值可能需取得很大或很小. 这时如果认为整个区间内取值机会均等,则所得出的结果就会产生较大误差,加之多个区间数混合运算后,可能会进一步放大区间范围,从而产生失真和偏离. 因此,隶属度和非隶属度如果用“介于某个数左右”来表达将更为合适,而三角模糊数在表达“介于某个数左右”时具有其独特的优势[10],能突出取值可能性最大的中心点,弥补区间数缺少重心的缺陷. 刘锋等人[9]对直觉模糊集作了进一步拓展,提出了模糊数直觉模糊集的概念.

定义 2[9,10] 若 $\beta=(l,p,q)\in F(D)$, $D=[0,1]$,则称 β 为 D 上的一个三角模糊数,其隶属函数 $\mu_\beta(x):R\to[0,1]$ 可表示为

$$\mu_\beta(x)=\begin{cases}(x-l)/(p-l), & l\leqslant x\leqslant p;\\ (x-q)/(p-q), & p\leqslant x\leqslant q;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad(1)$$

其中:$x\in R$, $0\leqslant l\leqslant p\leqslant q\leqslant 1$, l 和 q 分别称为模糊数 β 的下限和上限;p 表示在此区间中取值可能性最大的数,称为模糊数 β 的重心. 若 $l=p=q$,则 β 为实数. β 的期望值[10]为

$$E(\beta)^\theta=\frac{(1-\theta)l+p+\theta q}{2},\quad(2)$$

其中 $\theta\in[0,1]$. θ 的具体取值依赖于决策者的风险态度. 当 $\theta>0.5$ 时,表示决策者是风险追求的;当 $\theta<0.5$ 时,表示决策者是风险厌恶的;一般取 $\theta=0.5$,表示决策者是风险中立的. 此时,式(2)简化为

$$E(\beta)=\frac{l+2p+q}{4}.\quad(3)$$

定义 3[9] 设论域 U 是一个非空有限集合,称 $G=\{(u,\langle\tilde t_G(u),\tilde f_G(u)\rangle)\mid u\in U\}$ 为模糊数直觉模糊集. 其中:$\tilde t_G(u)=(\tilde t^1_G(u),\tilde t^2_G(u),\tilde t^3_G(u))\in F(D)$ 和 $\tilde f_G(u)=(\tilde f^1_G(u),\tilde f^2_G(u),\tilde f^3_G(u))\in F(D)$ 均是 $D=[0,1]$ 上的三角模糊数,分别表示 U 中元素 u 属于 U 的隶属度和非隶属度,并且满足 $0\leqslant\tilde t^3_G(u)+\tilde f^3_G(u)\leqslant 1$, $\forall u\in U$.

参照直觉模糊数和区间直觉模糊数[7]的定义,称 $\langle\tilde t_G(u),\tilde f_G(u)\rangle$ 为模糊数直觉模糊数,简记为 $\langle(a,b,c),(l,p,q)\rangle$. 其中:$(a,b,c)\in F(D)$, $(l,p,q)\in F(D)$,且 $c+q\leqslant 1$, $\forall u\in U$. 记 Ω 为全体模糊数直觉模糊数的集合. 以下给出模糊数直觉模糊数的运算法则.

定义 4 设 $\beta_1=\langle(a_1,b_1,c_1),(l_1,p_1,q_1)\rangle$ 和 $\beta_2=\langle(a_2,b_2,c_2),(l_2,p_2,q_2)\rangle$ 是任意的两个模糊数直觉模糊数,规定其运算法则如下:

$$\beta_1\otimes\beta_2=\langle(a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2),(l_1+l_2-l_1l_2,\\ p_1+p_2-p_1p_2,q_1+q_2-q_1q_2)\rangle;\quad(4)$$

$$\beta_1^\lambda=\langle(a_1^\lambda,b_1^\lambda,c_1^\lambda),(1-(1-l_1)^\lambda,\\ 1-(1-p_1)^\lambda,1-(1-q_1)^\lambda)\rangle,\ \lambda\geqslant 0.\quad(5)$$

易知定义 4 中的所有结果仍为模糊数直觉模糊数,且满足以下运算律:

$$\beta_1\otimes\beta_2=\beta_2\otimes\beta_1,\quad(6)$$

$$(\beta_1\otimes\beta_2)^\lambda=\beta_1^\lambda\otimes\beta_2^\lambda,\ \lambda\geqslant 0,\quad(7)$$

$$\beta_1^{\lambda_1}\otimes\beta_1^{\lambda_2}=\beta_1^{\lambda_1+\lambda_2},\ \lambda_1,\lambda_2\geqslant 0.\quad(8)$$

3 模糊数直觉模糊数的比较

文献[7]将 Chen 和 Tan 定义的记分函数[11], Hong 和 Choi 定义的精确函数[12]进行了拓展,并定义了区间直觉模糊数的记分函数和精确函数,以对区间直觉模糊数进行排序. 本文为了对模糊数直觉模糊数进行排序,首先将文献[7,11]的记分函数进行拓展,定义模糊数直觉模糊数的记分函数如下:

定义 5 设 $\beta=\langle(a,b,c),(l,p,q)\rangle$ 为一个模糊数直觉模糊数,则称

$$\tilde S(\beta)=\frac{a+2b+c}{4}-\frac{l+2p+q}{4}\quad(9)$$

为 β 的记分函数,其中 $\tilde S(\beta)\in[-1,1]$. 显然,$\tilde S(\beta)$ 的值越大,则 β 越大. 若 $\tilde S(\beta)=1$,则 β 取最大值 $\langle(1,1,1),(0,0,0)\rangle$;若 $\tilde S(\beta)=-1$,则 β 取最小值 $\langle(0,0,0),(1,1,1)\rangle$.

当 $\tilde S(\beta_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的值有相等情况出现时,将文献[13]提出的改进记分函数 $L(E(A_i))=t_{A_i}(2-t_{A_i}-f_{A_i})$ 进行拓展,定义一个新的记分函数 $\tilde L(\beta)$ 进行排序,即

$$\tilde L(\beta)=\frac{a+2b+c}{4}\Big(2-\frac{a+2b+c}{4}-\\ \frac{l+2p+q}{4}\Big),\quad(10)$$

其中 $\tilde L(\beta)\in[0,1]$. $\tilde L(\beta)$ 的值越大,则 β 越大.

基于上述分析,现提出模糊数直觉模糊数的一种排序方法. 本文没有将文献[7,12]的精确函数进行拓展,而是采用两个记分函数 $\tilde S(\beta)$ 和 $\tilde L(\beta)$ 进行排序[13,14].

定义 6　设 β_1 和 β_2 是两个任意的模糊数直觉模糊数,则:

1) 若 $\tilde{S}(\beta_1) < \tilde{S}(\beta_2)$,则 $\beta_1 < \beta_2$;

2) 若 $\tilde{S}(\beta_1) = \tilde{S}(\beta_2)$,则:

①当 $\tilde{L}(\beta_1) = \tilde{L}(\beta_2)$ 时,$\beta_1 = \beta_2$;

②当 $\tilde{L}(\beta_1) < \tilde{L}(\beta_2)$ 时,$\beta_1 < \beta_2$.

4　模糊数直觉模糊几何集成算子

基于模糊数直觉模糊数的运算法则,给出一些新的几何集成算子,即模糊数直觉模糊加权几何(FIFWG)算子、模糊数直觉模糊有序加权几何(FIFOWG)算子以及模糊数直觉模糊混合几何(FIFHG)算子,以便对模糊数直觉模糊信息进行集成.

定义 7　设 $\beta_j = \langle (a_j, b_j, c_j), (l_j, p_j, q_j) \rangle (j = 1,2,\cdots,n)$ 是一组模糊数直觉模糊数,且设 FIFWG:$\Omega^n \to \Omega$.若

$$\mathrm{FIFWG}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \beta_1^{w_1} \otimes \beta_2^{w_2} \otimes \cdots \otimes \beta_n^{w_n}, \tag{11}$$

其中:$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的加权向量,$w_j \in [0,1]$,$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$,则称函数 FIFWG 为模糊数直觉模糊加权几何集成算子.特别地,若 $w = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^{\mathrm{T}}$,则相应的 FIFWG 算子退化为模糊数直觉模糊几何(FIFG)集成算子

$$\mathrm{FIFG}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \cdots \otimes \beta_n)^{1/n}. \tag{12}$$

根据运算法则,对式(11)进一步推导得到如下定理:

定理 1　设 $\beta_j = \langle (a_j, b_j, c_j), (l_j, p_j, q_j) \rangle (j = 1,2,\cdots,n)$ 是一组模糊数直觉模糊数,$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的加权向量,$w_j \in [0,1]$,$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.则由式(11)集成得到的结果仍为模糊数直觉模糊数,且

$$\mathrm{FIFWG}_w(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \Big\langle \Big(\prod_{j=1}^{n} a_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j}, \prod_{j=1}^{n} c_j^{w_j} \Big), \Big(1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - l_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j)^{w_j} \Big) \Big\rangle. \tag{13}$$

定义 8　设 $\beta_j = \langle (a_j, b_j, c_j), (l_j, p_j, q_j) \rangle (j = 1,2,\cdots,n)$ 是一组模糊数直觉模糊数,且设 FIFOWG:$\Omega^n \to \Omega$.若

$$\mathrm{FIFOWG}_v(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \beta_{\sigma(1)}^{v_1} \otimes \beta_{\sigma(2)}^{v_2} \otimes \cdots \otimes \beta_{\sigma(n)}^{v_n}. \tag{14}$$

其中:$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 FIFOWG 相关联的加权向量,$v_j \in [0,1]$,$\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$;$(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换,使得对于任意 j,有 $\beta_{\sigma(j-1)} \geq \beta_{\sigma(j)}$.则称函数 FIFOWG 为模糊数直觉模糊有序加权几何集成算子.特别地,若 $v = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^{\mathrm{T}}$,则相应的 FIFOWG 算子退化为模糊数直觉模糊几何集成算子.

类似于式(13),可推导得到如下定理:

定理 2　设 $\beta_j = \langle (a_j, b_j, c_j), (l_j, p_j, q_j) \rangle (j = 1,2,\cdots,n)$ 是一组模糊数直觉模糊数,$(\beta_{\sigma(1)}, \beta_{\sigma(2)}, \cdots, \beta_{\sigma(n)})$ 是 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 的一个置换,使得对于任意 j,有 $\beta_{\sigma(j-1)} \geq \beta_{\sigma(j)}$,且设 $\beta_{\sigma(j)} = \langle (a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}, c_{\sigma(j)}), (l_{\sigma(j)}, p_{\sigma(j)}, q_{\sigma(j)}) \rangle$.则由式(14)集成得到的结果仍为模糊数直觉模糊数,且

$$\mathrm{FIFOWG}_v(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \Big\langle \Big(\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}^{v_j}, \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)}^{v_j}, \prod_{j=1}^{n} c_{\sigma(j)}^{v_j} \Big), \Big(1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - l_{\sigma(j)})^{v_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - p_{\sigma(j)})^{v_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - q_{\sigma(j)})^{v_j} \Big) \Big\rangle. \tag{15}$$

其中:$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 是 FIFOWG 算子的加权向量,$v_j \in [0,1]$,$\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$.

FIFOWG 算子的根本特点是:对模糊数直觉模糊数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 按从大到小的顺序重新排序后加权集成,且元素 β_j 与 v_j 没有任何联系,v_j 只与集成过程中的第 j 个位置有关.

有关对加权向量 v 的确定有多种方法,文献[15]已对目前主要的赋权方法进行了综述.一般可由下式给出[15]:

$$v_r = Q((r/n) - Q((\gamma - 1)/n), \quad r = 1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

其中:模糊语义量化函数

$$Q(l) = \begin{cases} 0, & l < \xi; \\ \dfrac{l - \xi}{\eta - \xi}, & \xi \leq l \leq \eta; \\ 1, & l > \eta. \end{cases} \tag{17}$$

且 $\xi, \eta, l \in [0,1]$.对应于模糊语义量化准则:"至少半数","大多数","尽可能多"的函数 Q 中的参数对分别为 $(\xi, \eta) = (0, 0.5)$,$(\xi, \eta) = (0.3, 0.8)$,$(\xi, \eta) = (0.5, 1.0)$.

定义 9　设 $\beta_j = \langle (a_j, b_j, c_j), (l_j, p_j, q_j) \rangle (j = 1,2,\cdots,n)$ 是一组模糊数直觉模糊数,且设 FIFHG:$\Omega^n \to \Omega$.若

$$\mathrm{FIFHG}_{w,v}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) =$$

$$\tilde{\beta}_{\sigma(1)}^{\prime v_1} \otimes \tilde{\beta}_{\sigma(2)}^{\prime v_2} \otimes \cdots \otimes \tilde{\beta}_{\sigma(n)}^{\prime v_n}. \tag{18}$$

其中:$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 FIFHG 相关联的加权向量,$v_j \in [0,1]$,$\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$;$\tilde{\beta}'_{\sigma(j)}$ 是加权的模糊数直觉模糊数 $\tilde{\beta}_k'(k = 1,2,\cdots,n)$ 中第 j 个最大的元素,这里 $\tilde{\beta}_k' = \tilde{\beta}_k^{n w_k}(k = 1,2,\cdots,n)$,$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是模糊数直觉模糊数组 $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_n$ 的加权向量,$w_k \in [0,1]$,$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$,且 n 是平衡因子. 则称函数 FIFHG 为模糊数直觉模糊组合加权几何集成算子.

定理 3 FIFWG 算子是 FIFHG 算子的一个特例,这时 $v = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^{\mathrm{T}}$.

定理 4 FIFOWG 算子是 FIFHG 算子的一个特例,这时 $w = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n)^{\mathrm{T}}$.

显然,FIFHG 算子同时推广了 FIFWG 算子和 FIFOWG 算子,它不仅体现了模糊数直觉模糊数自身的重要性,而且反映了模糊数直觉模糊数所在位置的重要程度:

类似于式(13) 和(15),可得到如下定理:

定理 5 设 $\tilde{\beta}_j = \langle (a_j, b_j, c_j), (l_j, p_j, q_j) \rangle (j = 1,2,\cdots,n)$ 是一组模糊数直觉模糊数,$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 FIFHG 相关联的加权向量,$v_j \in [0,1]$,$\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$,$\tilde{\beta}'_{\sigma(j)}$ 是加权的模糊数直觉模糊数 $\tilde{\beta}_k'(k = 1,2,\cdots,n)$ 中第 j 个最大的元素,这里 $\tilde{\beta}_k' = \tilde{\beta}_k^{n w_k}(k = 1,2,\cdots,n)$,$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是模糊数直觉模糊数组 $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_n$ 的加权向量,$w_k \in [0,1]$,$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$,且 n 是平衡因子. 令 $\tilde{\beta}_k' = \langle (a_k', b_k', c_k'), (l_k', p_k', q_k') \rangle$,$\tilde{\beta}'_{\sigma(j)} = \langle (a'_{\sigma(j)}, b'_{\sigma(j)}, c'_{\sigma(j)}), (l'_{\sigma(j)}, p'_{\sigma(j)}, q'_{\sigma(j)}) \rangle$,则由式(18) 集成得到的结果仍为模糊数直觉模糊数,且

$$\begin{aligned}
&\mathrm{FIFHG}_{w,v}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_n) = \\
&\Big\langle \Big(\prod_{j=1}^{n} a'^{v_j}_{\sigma(j)}, \prod_{j=1}^{n} b'^{v_j}_{\sigma(j)}, \prod_{j=1}^{n} c'^{v_j}_{\sigma(j)} \Big), \\
&\Big(1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - l'_{\sigma(j)})^{v_j}, 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - p'_{\sigma(j)})^{v_j}, \\
&1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - q'_{\sigma(j)})^{v_j} \Big) \Big\rangle.
\end{aligned} \tag{19}$$

5 基于模糊数直觉模糊信息的群决策方法

在现代大型决策或重要决策过程中,一般采取群体决策的方式. 在该群体决策情形下,基于模糊数直觉模糊信息集成算子,即 FIFWG 算子和 FIFHG 算子,给出一种属性权重确知且属性值以模糊数直觉模糊数形式给出的不确定多属性群决策方法,具体步骤如下:

Step1: 记 $M = \{1,2,\cdots,m\}$,$N = \{1,2,\cdots,n\}$,$B = \{1,2,\cdots,t\}$. 设 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为决策方案集,$I = \{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ 为评价指标(属性) 集,$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 为属性的加权向量,$w_j \in [0,1]$,$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$,$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_t\}$ 为决策者集,$e = (e_1, e_2, \cdots, e_t)^{\mathrm{T}}$ 为决策者的权重向量,$e_r \in [0,1]$,$\sum_{r=1}^{t} e_r = 1$. 设决策者 d_r 给出的方案 A_k 在属性 I_j 下的属性值为 $\tilde{\beta}_{kj}^{(r)}$ ($\tilde{\beta}_{kj}^{(r)} = \langle (a_{kj}^{(r)}, b_{kj}^{(r)}, c_{kj}^{(r)}), (l_{kj}^{(r)}, p_{kj}^{(r)}, q_{kj}^{(r)}) \rangle$ 为模糊数直觉模糊数),从而得到模糊数直觉模糊决策矩阵 $R_r = (\tilde{\beta}_{kj}^{(r)})_{m \times n} (k \in M, j \in N, r \in B)$.

Step2: 利用 FIFWG 算子对决策矩阵 $R_r = (\tilde{\beta}_{kj}^{(r)})_{m \times n}$ 中第 k 行的属性值进行加权集成,得到决策者 d_r 所给出方案 A_k 的综合属性值

$$\tilde{\beta}_k^{(r)} = \mathrm{FIFWG}_w(\tilde{\beta}_{k1}^{(r)}, \tilde{\beta}_{k2}^{(r)}, \cdots, \tilde{\beta}_{kn}^{(r)}). \tag{20}$$

其中:$k \in M$, $r \in B$.

Step3: 利用 FIFHG 算子对 t 位决策者给出的方案 A_k 的综合属性值 $\tilde{\beta}_k^{(r)} (r \in B)$ 进行集成,得到方案 A_k 的群体综合属性值

$$\begin{aligned}
&\tilde{\beta}_k = \mathrm{FIFHG}_{e,v}(\tilde{\beta}_k^{(1)}, \tilde{\beta}_k^{(2)}, \cdots, \tilde{\beta}_k^{(t)}) = \\
&[\tilde{\beta}_k^{\prime(\sigma(1))}]^{v_1} \otimes [\tilde{\beta}_k^{\prime(\sigma(2))}]^{v_2} \otimes \cdots \otimes [\tilde{\beta}_k^{\prime(\sigma(t))}]^{v_t}.
\end{aligned} \tag{21}$$

其中:$k \in M$;$v = (v_1, v_2, \cdots, v_t)^{\mathrm{T}}$ 是与 FIFHG 算子相关联的加权向量,$v_r \in [0,1]$,$\sum_{r=1}^{t} v_r = 1$;$\tilde{\beta}_k^{\prime(\sigma(r))}$ 是加权的模糊数直觉模糊数组 $((\tilde{\beta}_k^{(1)})^{te_1}, (\tilde{\beta}_k^{(2)})^{te_2}, \cdots, (\tilde{\beta}_k^{(t)})^{te_t})$ 中第 r 个最大的元素,$(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(t))$ 是 $(1,2,\cdots,t)$ 的一个置换,t 是平衡因子;$e = (e_1, e_2, \cdots, e_t)^{\mathrm{T}}$ 为决策者的权重向量,$e_r \in [0,1]$,$\sum_{r=1}^{t} e_r = 1$.

Step4: 分别利用记分函数(9) 和(10) 计算 $\tilde{\beta}_k$ 的记分函数值 $\tilde{S}(\tilde{\beta}_k)$ 和 $\tilde{L}(\tilde{\beta}_k) (k \in M)$.

Step5: 根据定义 6 对方案 $A_k (k \in M)$ 进行排序,从而得到最佳方案.

6 实例分析

考虑大学学院评估问题. 通常,一些大学采用教学(I_1),科研(I_2) 和服务(I_3) 这 3 个属性作为学院评估的一级指标(属性),属性权重向量为 $w = (0.360\,8, 0.309\,1, 0.330\,1)^{\mathrm{T}}$[16]. 现有 3 位决策者 $d_r (r = 1,2,3)$,权重向量为 $e = (0.3, 0.4, 0.3)^{\mathrm{T}}$,依照评估标准对 5 个学院 $A_k (k = 1,2,\cdots,5)$ 进行评估,各指标下的评估信息用模糊数直觉模糊数表示,

表 1　决策矩阵 R_1

	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.4),(0.2,0.3,0.4)\rangle$
A_2	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$
A_3	$\langle(0.7,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.5,0.5,0.6),(0.2,0.3,0.3)\rangle$
A_4	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.3,0.3,0.4),(0.1,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$
A_5	$\langle(0.5,0.6,0.6),(0.2,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.3,0.3,0.4)\rangle$

表 2　决策矩阵 R_2

	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle(0.6,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.5,0.5,0.5),(0.2,0.3,0.4)\rangle$
A_2	$\langle(0.5,0.6,0.6),(0.2,0.3,0.4)\rangle$	$\langle(0.7,0.7,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.6,0.6,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$
A_3	$\langle(0.8,0.8,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.6),(0.2,0.3,0.3)\rangle$
A_4	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.2,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.8,0.8,0.8),(0.2,0.2,0.2)\rangle$
A_5	$\langle(0.6,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.2,0.3,0.4)\rangle$

表 3　决策矩阵 R_3

	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle(0.6,0.6,0.7),(0.2,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.7,0.7,0.7),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.4,0.4,0.4),(0.1,0.1,0.1)\rangle$
A_2	$\langle(0.7,0.8,0.8),(0.1,0.2,0.2)\rangle$	$\langle(0.6,0.6,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.1,0.1)\rangle$
A_3	$\langle(0.7,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.6,0.6,0.6),(0.2,0.2,0.2)\rangle$
A_4	$\langle(0.6,0.6,0.6),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.5,0.5,0.5),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.1)\rangle$
A_5	$\langle(0.6,0.6,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9),(0.1,0.1,0.1)\rangle$	$\langle(0.4,0.5,0.6),(0.1,0.2,0.3)\rangle$

决策矩阵见表 1 ～ 表 3,试确定最佳学院.

下面利用本文提出的群决策方法进行求解,具体步骤如下:

Step1:利用 FIFWG算子(20) 和(13) 对决策矩阵 $R_r = (\beta_{kj}^{(r)})_{5\times3}$ 中第 k 行的属性值进行加权集成,得到决策者 d_r 所给出方案 A_k 的综合属性值 $\beta_k^{(r)}$ $(k = 1,2,\cdots,5,\ r = 1,2,3)$.

Step2:首先计算 $(\beta_k^{(1)})^{t\omega_1}, (\beta_k^{(2)})^{t\omega_2}, (\beta_k^{(3)})^{t\omega_3}$ $(t = 3, k = 1,2,\cdots,5)$,并分组排序;然后选择模糊语义量化"大多数"准则,则由式(16) 和(17) 可得 FIFHG算子的加权向量为 $v = (0.067, 0.666, 0.267)$;其次利用 FIFHG算子(21) 和(19) 对 t 位决策者给出方案 A_k 的综合属性值 $\beta_k^{(r)}$ $(k = 1,2,\cdots,5,\ r = 1,2,3)$ 进行集成,得到方案 A_k 的群体综合属性值 β_k $(k = 1,2,\cdots,5)$,即

$$\beta_1 = \langle(0.503, 0.577, 0.632), (0.132, 0.202, 0.286)\rangle,$$

$$\beta_2 = \langle(0.527, 0.721, 0.743), (0.139, 0.246, 0.349)\rangle,$$

$$\beta_3 = \langle(0.597, 0.640, 0.716), (0.175, 0.176, 0.224)\rangle,$$

$$\beta_4 = \langle(0.495, 0.557, 0.648), (0.121, 0.162, 0181)\rangle,$$

$$\beta_5 = \langle(0.512, 0.601, 0.675), (0.173, 0.200, 0.298)\rangle.$$

Step3:利用记分函数(9) 计算 β_k 的记分函数值 $\tilde{S}(\beta_k)$ $(k = 1,2,\cdots,5)$,即

$$\tilde{S}(\beta_1) = 0.3668,\ \tilde{S}(\beta_2) = 0.4330,$$

$$\tilde{S}(\beta_3) = 0.4605,\ \tilde{S}(\beta_4) = 0.4078,$$

$$\tilde{S}(\beta_5) = 0.3795.$$

Step4:根据定义 6 对方案 A_k $(k = 1,2,\cdots,5)$ 进行排序,有 $A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_1$. 因此,最佳学院是 A_3.

7　结　　论

模糊数直觉模糊集是直觉模糊集的拓展,其隶属度和非隶属度用三角模糊数表示,弥补了区间值模糊集中隶属度和非隶属度用区间数表示时缺少重心的缺陷. 本文定义了模糊数直觉模糊数的一些运算法则,在此基础上,将传统的几何集成算子扩展,给出了集成模糊数直觉模糊信息的 FIFWG 算子, FIFOWG 算子和 FIFHG 算子;在群体决策情形下,将这些集成算子应用于属性权重确知且属性值以模糊数直觉模糊数形式给出的不确定多属性群决策,从而丰富和发展了几何集成算子理论和直觉模糊集理论. 有关其他模糊数直觉模糊集成算子及其在决策分析、模式识别、人工智能、数据挖掘和专家系统

等领域中的应用是需进一步研究的问题.

参考文献(References)

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans on System, Man and Cybernitics, 1993, 23(2): 610-614.

[3] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 403-405.

[4] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1-10.

[5] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operations based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.

[6] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[7] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
(Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.)

[8] 徐泽水, 陈剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(4): 126-133.
(Xu Z S, Chen J. An approach to group decision making based on interval-valued intuitionistic judgment matrices[J]. Systems Engineering-theory and Practice, 2007, 27(4): 126-133.)

[9] 刘锋, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.
(Liu F, Yuan X H. Fuzzy number intuitionistic fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(1): 88-91.)

[10] Liu T S, Wang M J. Ranking fuzzy numbers with integral value[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 50(2): 247-255.

[11] Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[12] Hong D H, Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on Vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

[13] 刘华文. 多目标模糊决策的 Vague 集方法[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(5): 103-109.
(Liu H W. Vague set methods of multicriteria fuzzy decision making[J]. Systems Engineering-theory and Practice, 2004, 24(5): 103-109.)

[14] 张韬, 陆廷金, 马建军. 基于 Vague 集模糊多准则决策记分函数法改进性探讨[J]. 系统工程, 2006, 24(7): 120-123.
(Zhang T, Lu T J, Ma J J. Discussion on improvement of score function methods based on Vague sets for fuzzy multi-criteria decision-making[J]. Systems Engineering, 2006, 24(7): 120-123.)

[15] Xu Z S. An overview of methods for determining OWA weights[J]. Int J of Intelligent Systems, 2005, 20(8): 843-865.

[16] 叶跃祥, 糜仲春, 王宏宇. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1344-1347.
(Ye Y X, Mi Z C, Wang H Y. Set-pair-analysis-based method for multiple attributes decision-making with intervals[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(9): 1344-1347.)

(上接第 606 页)

[46] 王坚强. 一种信息不完全确定的多准则语言群决策方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(4): 394-398.
(Wang J Q. Group multi-criteria linguistic decision-making method with incomplete certain information[J]. Control and Decision, 2007, 22(4): 394-398.)

[47] Henera F, Martinez L. A model based on linguistic 2-tuple for dealing with multi-granularity hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics — Part B: Cybernetics, 2001, 31(2): 227-234.

[48] 姜艳萍, 樊治平. 基于不同粒度语言判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程学报, 2006, (3): 249-254.
(Jiang Y P, Fan Z P. Approach to group decision making with multi-granularity linguistic comparison matrices[J]. J of Systems Engineering, 2006, (3): 249-254.)