

文章编号: 1001-0920(2008)06-0643-04

基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制

米 阳¹, 李文林², 井元伟³

(1. 上海电力学院 数理系, 上海 200090; 2. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453002; 3. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘 要: 针对一类离散时间系统, 提出一种变结构控制设计方法. 通过构造幂次趋近律, 使得系统的准滑动模态不仅能保持步步穿越切换面的基本属性, 而且能大幅度削弱抖振, 有效地改善控制品质, 提高系统的鲁棒性. 采样周期越短, 该控制方法的效果越明显. 仿真实例表明了所设计控制器的可行性和有效性.

关键词: 离散时间系统; 滑动模态; 趋近律

中图分类号: TP723 **文献标识码:** A

Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law

MI Yang¹, LI Wen-lin², JING Yuan-wei³

(1. Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China; 2. College of Mathematics and Information Science, He'nan Normal University, Xinxiang 453002, China; 3. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: MI Yang, E-mail: miyangmi@163.com)

Abstract: According to a class of discrete-time system, a variable structure control design method is considered. By constructing the power reaching law, the quasi sliding mode can not only keep the basic property of traversing switching surface step by step, but also weaken the quiver intensively, improve the control quality, and increase the system robust performance. The sample cycle is shorter, the advantage of the control method is more evidence. The simulation example shows the feasibility and effectiveness of the designed controller.

Key words: Discrete time system; Sliding mode; Reaching law

1 引 言

随着变结构系统理论的发展^[1-4], 离散系统的变结构控制得到了广泛研究. 与连续系统不同, 离散系统的基本特征是运动的状态 $x(kT)$ ($k = 1, 2, \dots$) 是一个离散序列, 也就是说从任意点出发的运动, 经有限步后都精确到达切换面 $\{x(kT) | s(k) = 0\}$ 几乎是不可能的. 因此, 对于离散时间系统, 理想滑动模态是不存在的, 更接近实际的是准滑动模态^[5-10], 即经有限步后到达一个宽度为 2ϵ ($\epsilon > 0$) 的切换带 $\{x(kT) | -\epsilon < s(k) < \epsilon\}$, 并步步穿越切换面 $\{x(kT) | s(k) = 0\}$ 的运动. 换言之, 离散时间系统的滑动模态是一个步步穿越切换面 $\{x(kT) | s(k) = 0\}$ 的抖动. 抖振破坏了运动的平稳性, 同时限制

了变结构控制的应用. 抑制或削弱抖振, 是离散时间系统变结构控制的重要研究课题.

2 离散时间系统滑动模态的趋近律

离散系统的滑模控制与连续系统一样, 除设计合适的切换函数, 保证滑动模态有良好的稳定性外, 还需设计变结构控制律, 使从任意点出发的运动轨线都能在有限时间进入准滑动模态带. 目前最常用(也最有效)的到达条件^[4-6]是

$$s(k+1) = (1 - qT)s(k) - T \operatorname{sgn} s(k). \quad (1)$$

其中: $q > 0, 1 - q > 0, \epsilon > 0, T$ 为采样周期.

可以看出, 切换面在 $s(k) = 0$ 附近, 从而 $s(k+1) = (1 - qT)s(k) - T \operatorname{sgn} s(k)$ 是一个振幅为 T 的等幅抖振. 为抑制抖振, 文献[7]曾提出如下方案: 当系统轨线在

收稿日期: 2007-03-28; 修回日期: 2007-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60643003); 上海市教委科研基金项目(6LZ013); 上海市教委科研创新项目(08LZ144)

作者简介: 米阳(1976—), 女, 河南南阳人, 副教授, 博士, 从事模糊控制、变结构控制等研究; 井元伟(1956—), 男, 辽宁西丰人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、复杂网络控制等研究.

准滑动模态带外时,采用切换控制

$$u = - (CB)^{-1} [CAx(k) - (1 - qT)s(k) + Tsgns(k)];$$

当系统轨线在准滑动模态带内时,采用等效控制

$$u_{eq} = (CB)^{-1} CAx(k).$$

该方案的优点是,在切换面附近用连续控制取代含切换控制,能有效抑止抖振;缺点是它有可能导致系统的整个运动都不接触切换面(见图1),从而会失去(至少部分失去)滑动模态的优良性能.这是因为,滑动模态是发生在切换面上的运动,要使准滑动模态尽可能地保留理想滑动模态的良好动态特性,就必须与切换面尽可能地接触,这也就是文献[4,6]对准滑动模态的定义,要求步步穿越切换面的原因.

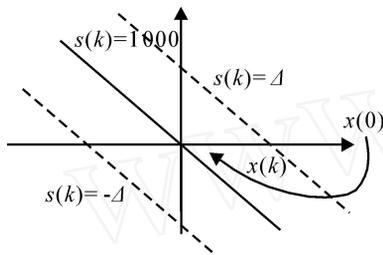


图1 切换带示意图

为克服上述缺点,本文构造如下幂次趋近律:

$$s(k+1) - s(k) = [1 - (T - T)s(k)^{-1}] Ts(k). \quad (2)$$

其中: $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1, T$ 为采样周期. 它既能保持准滑动模态步步穿越切换面的基本要求,又能有效抑制或削弱抖振,明显提高控制效果.

假设1 由于采样周期 T 一般都取得足够小,不妨设 $(\alpha + \beta)T < 1$.

定理1 按趋近律(2)设计控制律,则准滑动模态带为

$$\{ x(k) \mid |s(k)| < \gamma, \gamma = \left(\frac{T}{2 - T}\right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (3)$$

特别地, $\alpha = 1/2$ 时,准滑动模态带宽为

$$\left\{ x(k) \mid |s(k)| < \left(\frac{T}{2 - T}\right)^2 \right\}. \quad (4)$$

证明 由幂次趋近律(2),有

$$s(k+1) = (1 - T - T |s(k)|^{-1}) s(k).$$

可得

$$s^T(k+1) s(k+1) = (1 - T - T |s(k)|^{-1})^2 s^T(k) s(k).$$

由此推得

$$|s(k+1)| = \left[\frac{1 - T - T |s(k)|^{-1}}{1 - T - T |s(k)|^{-1}} \right] |s(k)|, \quad (5)$$

$$|s(k+1)| - |s(k)| / T = \frac{[1 - T - T |s(k)|^{-1}] |s(k)| - |s(k)|}{T}. \quad (6)$$

当 $1 - T - T |s(k)|^{-1} < 1$, 即 $|s(k)| < (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}$ 时,由式(6)可得

$$\frac{|s(k+1)| - |s(k)|}{T} = \frac{(1 - T - T |s(k)|^{-1}) |s(k)| - |s(k)|}{T} = - \frac{|s(k)| - |s(k)|}{T} < 0. \quad (7)$$

当 $1 - T < T |s(k)|^{-1}$, 即 $|s(k)| < (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}$ 时,可得

$$\frac{|s(k+1)| - |s(k)|}{T} = \frac{[T |s(k)|^{-1} - (2 - T)] |s(k)|}{T}. \quad (8)$$

由式(8),当 $1 - T < T |s(k)|^{-1} < (2 - T)$, 即 $(T/(2 - T))^{1/(1-\alpha)} < |s(k)| < (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}$ 时,可得

$$|s(k+1)| < |s(k)|. \quad (9)$$

由式(7)和(9)知,当 $(T/(2 - T))^{1/(1-\alpha)} < |s(k)|$ 时, $|s(k+1)| < |s(k)|$. 因此系统的运动将最终进入如下的带形区域:

$$\{ |x(k)| \mid |s(k)| < \gamma, \gamma = (T/(2 - T))^{1/(1-\alpha)}. \quad (10)$$

带形区域(10)正是准滑动模态带.

特别地,当 $\alpha = 1/2$ 时,准滑动模态带宽为

$$\{ |x(k)| \mid |s(k)| < (T/(2 - T))^2 \}.$$

文献[6]得到的准滑动模态带带宽为

$$\gamma_1 = T/(1 - T). \quad (11)$$

由式(10)和(11)可算出

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \left(\frac{T}{2 - T}\right)^{1/(1-\alpha)} \frac{1 - T}{T} = (T)^{1/(1-\alpha)} \frac{1 - T}{(2 - T)^{1/(1-\alpha)}}.$$

而且 $\lim_{T \rightarrow 0} (\gamma / \gamma_1) = 0$.

可见,本文得到的带宽比文献[6]得到的带宽窄得多,而且采样周期 T 越短,这种优势越明显.

特别地,当 $\alpha = 1/2$ 时,有

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \left(\frac{T}{2 - T}\right)^2 \frac{1 - T}{T} = \frac{T(1 - T)}{(2 - T)^2} \frac{T(1 - T)}{(2 - 2T)^2} = \frac{T}{4(1 - T)}.$$

推论1 若第 k 时刻 $|s(k)| = (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}$, 则第 $k+1$ 时刻到达理想滑动模态.

证明 将 $|s(k)| = (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}$ 代入式(5),得

$$|s(k+1)| =$$

$$\begin{aligned} & / 1 - T - T s(k)^{-1} / \cdot s(k) = \\ & / 1 - T - T \left(\frac{T}{1 - T} \right)^{(k-1)/(1-\alpha)} / \cdot s(k) = \\ & / 1 - T - (1 - T) / \cdot s(k) = 0. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} s(k+2) & = \\ / 1 - T - T s(k+1)^{-1} / \cdot \\ s(k+1) & = 0, \\ s(k+i) & = 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

即系统的运动从第 $k + 1$ 时刻起转入到理想滑动模态.

推论 2 如果

$$s(k) < (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)},$$

则从第 $k + 1$ 时刻起,系统的运动转入到准滑动模态.

证明 引入参数 $0 < \alpha < 1$, 只需证明,对于任意 $s(k) = (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}, 0 < \alpha < 1$, 都有

$$s(k+1) = \left(\frac{T}{2 - T} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

将 $s(k) = (T/(1 - T))^{1/(1-\alpha)}, 0 < \alpha < 1$, 代入式(5), 再利用求最大值的办法容易求得

$$s(k+1) = (T/(2 - T))^{1/(1-\alpha)}.$$

计算细节比较繁琐,具体推算略.

3 到达时间的计算

定理 2 到达准滑动模态的时间 K 可用下式近似计算:

$$K = \frac{1}{(1 - \alpha)} \ln \frac{s(0)^{1-\alpha} + \alpha}{1 - \alpha}.$$

证明 由式(8)和推论 2, 如果取幂次趋近律(2), 则到达准滑动模态的运动满足

$$\frac{s(k+1) - s(k)}{T} = -s(k) - s(k).$$

由此得

$$\begin{aligned} \frac{s(k+1) - s(k)}{s(k) + s(k)} & = -T, \\ \sum_{k=1}^n \frac{s(k+1) - s(k)}{s(k) + s(k)} & = - \sum_{k=1}^n T. \end{aligned} \quad (12)$$

记 $s = s(k+1) - s(k)$, $t = T$, 则上式可写为

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{s + s} s = - \sum_{k=0}^n t. \quad (13)$$

这恰巧是一个积分和的形式, 当采样周期足够小时, 可近似看成一个定积分, 即

$$\int_{s(0)}^{s(t)} \frac{ds}{s + s} = - \int_0^t dt. \quad (14)$$

因为

$$\begin{aligned} \frac{ds}{s + s} & = \frac{ds}{s^{1-\alpha} + s} = \\ \frac{1}{(1 - \alpha)} \frac{ds^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha} + s^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)代入(14)得

$$\int_0^{\bar{t}} dt = - \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_{s(0)}^{s(t)} \frac{ds^{1-\alpha}}{s^{1-\alpha} + s^{1-\alpha}}.$$

两边积分, 令 $s(\bar{t}) = 0$, 得 s 到达零的时间为

$$\bar{t} = \frac{1}{(1 - \alpha)} \ln \frac{s(0)^{1-\alpha} + \alpha}{1 - \alpha}. \quad (16)$$

即式(16)是对幂次趋近律导出的式(12)作近似计算得到的, 因此, 式(16)可作为到达准滑动模态的时间近似公式, 到达时间近似为

$$K = \frac{1}{(1 - \alpha)} \ln \frac{s(0)^{1-\alpha} + \alpha}{1 - \alpha}.$$

4 仿真实例

考虑离散时间系统

$$\begin{aligned} x(k+1) & = \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(k), \\ s(k) & = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k). \end{aligned}$$

按文献[6]取趋近律

$$\begin{aligned} s(k+1) & = (1 - 2T)s(k) - 5T s(k)^{1/2}, \\ T & = 0.05. \end{aligned}$$

按以下3种情况: 文献[6]趋近律, 准滑动模态

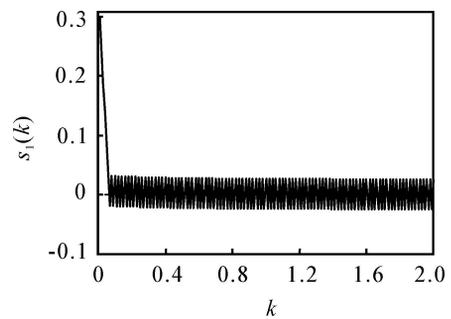


图 2 按文献[6]趋近律(1), $s_i(k)$ 的变化情况

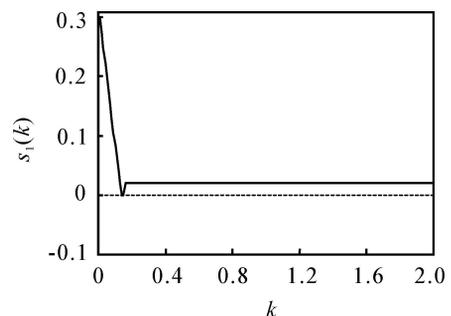


图 3 按本文趋近律, $s_i(k)$ 的变化情况

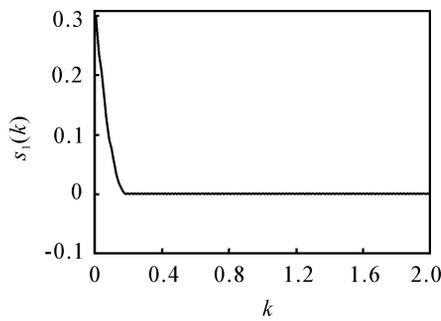


图4 准滑动模态带内采用等价控制时 $s_1(k)$ 的变化情况
带内取等价控制方法和本文所给的趋近律 ($s(k+1) = (1 - 2T)s(k) - 5T\text{sgn } s(k)$, $T = 0.05$), 对 $s(k)$ 的变化进行仿真, 仿真结果如图2~图4所示. 限于篇幅, 这里仅给出了 $s_1(k)$ 的图像, $s_2(k)$ 的图像与其类似.

5 结 论

本文针对离散系统, 提出了一种变结构控制设计方法. 通过构造幂次趋近律, 使得离散系统的准滑动模态不仅能步步穿越切换面, 而且能有效抑制抖动, 改善系统的控制品质. 仿真结果表明了所提出的设计方法是可行而有效的.

参考文献(References)

- [1] Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1977, 22(20): 212-222.
- [2] 高为炳, 程勉. 变结构控制的品质控制[J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 1-6.
(Gao W B, Cheng M. The character control of variable structure control[J]. Control and Decision, 1989, 4(4): 1-6.)
- [3] Furuta K. Sliding mode control of variable structure control systems[J]. System Control Letters, 1990, 14(2): 145-152.
- [4] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
(Gao W B. The variable structure control theory and design method[M]. Beijing: Science Press, 1998.)
- [5] 高为炳. 离散系统的变结构控制[J]. 自动化学报, 1995, 21(2): 154-161.
(Gao W B. The variable structure control for discrete system[J]. Acta Automatica Sinica, 1995, 21(2): 154-161.)
- [6] Gao W, Wang Y, Homaifa A. Discrete time variable structure control systems [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [7] Drzej Bartoszewicz A. Discrete-time variable structure control systems [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1996, 43(1): 235-238.
- [8] 姚琼荃, 黄继起, 吴汉松. 变结构控制系统[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1997.
(Yao Q H, Huang J Q, Wu H S. The variable structure control system [M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1997.)
- [9] Kachroo P, Tomizuka M. Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(7): 1063-1068.
- [10] Pan Y D, Furuta K. Discrete-time VSS controller design[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1997, 7(4): 373-386.

(上接第 642 页)

参考文献(References)

- [7] Hidaka K, Ohmori H, Sano A. Model reference adaptive control design for linear time-varying systems [C]. Proc IEEE Conf of the 35th Conf on Decision and Control. Kobe: IEEE, 1996: 3359-3361.
- [8] Riccardo Marino, Patrizio Tomei. Robust adaptive regulation of linear time-varying systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(7): 1301-1311.
- [9] Frueh M, Ragers E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique[J]. Int J of Control, 2000, 73(10): 840-850.
- [10] Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1940-1945.
- [11] Hsu C T, Chien C J, Yao C Y. A new algorithm of adaptive iterative learning control for uncertain robotic systems[C]. Proc IEEE on Robotics and Automation. Taipei: IEEE, 2003: 4130-4135.
- [12] Choi J Y, Lee J S. Adaptive iterative learning control for uncertain robotic systems [J]. IEE-Proc Control Theory and Applications, 2000, 147(2): 217-223.