文章编号: 1001-0920(2008)07-0786-05

多项式非线性系统局部镇定控制

童长飞, 章 辉, 孙优贤
(浙江大学 a. 工业控制技术国家重点实验室, b. 工业控制研究所, 杭州 310027)

摘 要: 针对多项式非线性系统,提出一种用于验证二次型候选 Lyapunov 函数的数值计算方法. 在该方法中,多项式系数被分解成带自由变量的系数矩阵,将正定性验证问题转化为矩阵不等式问题求解. 对于局部稳定性分析,采用多个 Lyapunov 函数来趋近吸引域. 每个 Lyapunov 函数均在各指定方向上进行最大半径优化. 在稳定性分析基础上,提出保收敛率的局部镇定控制器设计方法以扩大吸引域.

关键词: 非线性控制; 半定规划松弛; 局部镇定控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Local stabilizing control for polynomial nonlinear systems

TONG Chang-fei, ZHANG Hui, SUN You-xian
(a. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, b. Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. Correspondent: TONG Chang-fei, E-mail: cftong@iipc.zju.edu.cn)

Abstract: A numerical solution method is proposed to verify quadratic Lyapunov function candidate for polynomial nonlinear systems. In the method, the coefficients of a polynomial are decomposed to a matrix with free variables, and positivity validation is checked by solving derived matrix inequalities. For local stability analysis, multi-Lyapunov-functions are considered to approximate the domain of attraction. Each Lyapunov function is optimized with maximum radius at every specified direction. Based on the work of stability analysis, a local stabilizing control scheme with guaranteed convergence rate is addressed to expend the domain of attraction.

Key words: Nonlinear control; Semidefinite programming relaxation; Local stabilizing control

1 引 言

针对多项式正定性验证问题, Parrilo[1] 和 Papachristodoulou[2] 等做了大量工作,提出将一个多项式分解成若干多项式的平方和,若能分解成功,则可由平方和的正定特性保证该多项式的正定性,并提供了 SOSTOOLS 工具运行于 Matlab,用计算机计算的途径解决多项式正定性验证. SOSTOOLS 将多项式平方和分解的结果转化成 LMI 问题,并调用 Sedumi[3] 工具求解. Chesi[4,5] 沿用该方法对多项式系统吸引域估计做了大量工作. 然而这些文献对平方和如何分解及算法实现并没有具体介绍,且在局部稳定性分析和控制器综合上[6],其分解结果是双线性矩阵不等式(BMI)问题, SOSTOOLS 无法直接求解,只能通过迭代方法进行局部求解,算法效率低,且在很多情况下求解效果不理想.

本文在 Parrilo 等人的基础上,提出多项式分解算法,用于多项式正定性验证,并结合 YALMIP[7] 接口,调用 Sedumi[3] 求解 LMI 问题和 PENBMI[8] 求解 BMI 问题,使得多项式分解在多项式非线性系统稳定性分析和控制器综合上有着更广泛的应用.

文中符号说明如下:

$\mathbf{R}_n^r$: $R^n \to R^r$ 的多项式集合.

$\mathbf{R}_{n,d}^r$: 阶次为 d, $R^n \to R^r$ 的多项式集合.

$\mathbf{R}_{n,d}^+$: 阶次为 d, $R^n \to R^+ \cup \{0\}$ 的多项式集合.

Z_+: 非负整数空间.

$$c(n,r) = \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, & r > 0; \\ 1, & r = 0; \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

2 多项式相关定义

多项式即为若干单项式之和. 若无特别说明,本文考虑的是映射到 1 维实数空间的多项式,即对

收稿日期: 2007-04-30; **修回日期**: 2007-10-23.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60674028, 60736021); 浙江省重大科技计划项目(2006C11066).
作者简介: 童长飞(1980—),男,浙江温州人,博士生,从事非线性控制、鲁棒控制等研究; 孙优贤(1940—),男,浙江诸暨人,中国工程院院士,教授,博士生导师,从事复杂工业过程建模、控制与优化等研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$f(x) \in \mathbf{R}^{1}_{n,d}$,有如下定义:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i m_i(x). \tag{1}$$

其中: $x \in \mathrm{R}^n$, $m_i(x)$ 为 $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 的单项式, $c_i \in \mathrm{R}$ 为相应单项式系数. $m_i(x)$ 具体定义为

$$m_i(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{r_j}, \quad r_j \in \mathrm{Z}_+. \tag{2}$$

并定义 $J(m_i(x))$ 为单项式 $m_i(x)$ 的指数映射,即

$$J(m_i(x)) = [r_1, r_2, \cdots, r_n] \in \mathrm{Z}_+^{1\times n}, \tag{3}$$

其中 $r_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 如式(2) 定义, 为单项式 $m_i(x)$ 中 x_j 的指数. 由式(3) 定义可知

$$J(m_i(x) \cdot m_k(x)) = J(m_i(x)) + J(m_k(x)). \tag{4}$$

$J(\cdot)$ 映射可理解为一种指数算子,将单项式间的乘法运算转化为加法运算. 单项式的阶次则定义为

$$\deg(m_i(x)) = \sum_{j=1}^{n} r_j. \tag{5}$$

从而,式(1) 中多项式的阶次可定义为

$$\deg(f(x)) = \max\{\deg(m_i(x))\} = d, \quad i = 1,2,\cdots,l, \tag{6}$$

即 $f(x)$ 的阶次是其各单项式中的最大阶次.

若多项式 $f(x)$ 满足对于 $\forall x \in \mathrm{R}^n$,均有 $f(x) \geq 0$,则称 $f(x)$ 为正定多项式.

对于多项式非线性系统,若能找到一个正定多项式作为系统的候选 Lyapunov 函数,且 $-\dot{V}(x)$ 也为正定,则该非线性系统的稳定性便能得到验证. 因此,如何通过计算机计算判断一个多项式正定,并用于系统稳定性分析和控制器综合是很有意义的工作.

3　多项式分解算法研究

3.1　多项式分解框架

多项式函数 $f(x)$ 为正定,则 $f(x)$ 阶次必须是偶数. 考虑 $f(x) \in \mathbf{R}^{+}_{n,2r}$,将 $f(x)$ 分解成如下形式:

$$f(x) = (x^{|r|})^{\mathrm{T}} \cdot [P_f + L_f(\alpha)] \cdot x^{|r|}. \tag{7}$$

其中: $x^{|r|}$ 是阶次为 r 的多项式基, P_f 是关于 $f(x)$ 的系数矩阵, $L_f(\alpha)$ 是关于 $f(x)$ 的自由参数矩阵,且满足 $(x^{|r|})^{\mathrm{T}} L_f(\alpha) x^{|r|} = 0$. 系数矩阵 P_f 分解不惟一,通过引入自由参数矩阵,适当选取 $L_f(\alpha)$,可使分解结果 $P_f + L_f(\alpha)$ 涵盖所有的分解,因而 $P_f + L_f(\alpha)$ 可视为 $f(x)$ 的系数矩阵集. 记 $M(f) = P_f + L_f(\alpha)$ 为 $f(x)$ 的分解矩阵.

本文提出将 $f(x)$ 分解成式(7) 的算法由 3 部分组成:多项式基生成算法,系数矩阵生成算法和自由参数矩阵生成算法. 如图 1 所示,将 $f(x)$ 正定性验证问题通过多项式分解,转化为对矩阵不等式 $P_f + L_f(\alpha) \geq 0$ 的验证问题.

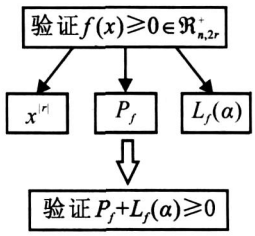

图 1　正定多项式验证与多项式分解关系

3.2　多项式基生成算法

定义 $x^{\{d\}}$ 为阶次等于 d 的同次多项式基,可由递归方法生成. 具体生成公式为

$$x^{\{d\}} = \begin{bmatrix} x_1^{d}[E_2(x)]^{\{0\}} \\ x_1^{d-1}[E_2(x)]^{\{1\}} \\ \cdots \\ x_1[E_2(x)]^{\{d-1\}} \\ x_1^{0}[E_2(x)]^{\{d\}} \end{bmatrix}, \quad x^{\{0\}} = 1. \tag{8}$$

其中 $E_2(\cdot)$ 为一位删除算子,即将向量中第 1 位元素删除,并将后续元素上移.

阶次为 r 的多项式基可由同次多项式基生成,即

$$x^{|r|} = [(x^{\{0\}})^{\mathrm{T}} \quad (x^{\{1\}})^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad (x^{\{r\}})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

$x^{\{r\}}$ 和 $x^{|r|}$ 的维度计算公式如下:

$$\mathrm{Dim}(x^{\{r\}}) = c(n+r-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}, \quad x \in \mathrm{R}^n; \tag{10}$$

$$\mathrm{Dim}(x^{|r|}) = c(n+r, r) = \frac{(n+r)!}{r!n!}, \quad x \in \mathrm{R}^n. \tag{11}$$

通过多项式基的定义,任何阶次为 d 的多项式函数均可写成关于 d 阶多项式基的线性函数,即

$$f(x) = Cx^{|d|}, \quad f(x) \in \mathbf{R}^{1}_{n,d}. \tag{12}$$

其中: $C \in \mathrm{R}^{1\times c(n+d,d)}$, $x^{|d|} \in \mathrm{R}^{c(n+d,d)}$. 式(12) 将 d 次多项式函数从 n 维空间映射到 $c(n+d,d)$ 维,从而得到线性函数. 而式(7) 则可理解为将 $2r$ 次多项式从 n 维空间映射到 $c(n+r,r)$ 维,从而得到二次型函数.

3.3　多项式系数矩阵与自由参数矩阵生成算法

定义 $L_\alpha(J^{(i)})$ 为单项式 $m_i(x)$ 在多项式基中的位置索引值函数,其中 $x \in \mathrm{R}^n$, $J^{(i)}$ 为 $m_i(x)$ 的指数映射,则可得 $L_\alpha(J^{(i)})$ 的计算公式为

$$L_\alpha(J^{(i)}) = 1 + c(n+s-1, s-1) + \sum_{k=1}^{n-1} c(n-k+s-s_k-1, s-s_k-1). \tag{13}$$

其中

$$s = \sum_{k=1}^{n} r_{i,k}, \quad s_k = \sum_{j=1}^{k} r_{i,j}, \quad J^{(i)} = [r_{i,1}, r_{i,2}, \cdots, r_{i,n}].$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

记 v_{ij} 为如下指示函数:

$$v_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j; \\ 1, & i \neq j. \end{cases} \tag{14}$$

3.3.1 系数矩阵 P_f 生成算法

将 $f(x)$ 重写成式(12)形式,其中 $d = 2r$. 记 C_i 和 $(x^{|2r|})_i$ 为相应向量中第 i 个元素. 若无特别说明, P_{kl} 和 L_{kl} 为 P_f 和 $L_f(\alpha)$ 中第 k 行 l 列的元素. 对于 C 中每一个 C_i,若 $C_i \neq 0$,则作如下预处理:

$$J_i = J((x^{|2r|})_i),$$
$$J_i^{(1)} = \mathrm{floor}(J_i/2),$$
$$J_i^{(2)} = J_i - J_i^{(1)},$$

其中 floor(·) 为向下取整函数. J_i 作如下分解:

1) 若 $t = \mathrm{sum}(J_i^{(2)}) - r \leq 0$,则跳转到 3);否则跳转到 2).

2) 设 $J_e = J_i^{(2)} - J_i^{(1)}$, m 从 1 循环至 n. 对于 J_e 中第 m 个元素 $J_e(m)$,若有 $J_e(m) > 0$,则取 $J_i^{(1)}(m) = J_i^{(1)}(m) + 1$, t 自减 1. 直至 $t \leq 0$ 跳出循环,重设 $J_i^{(2)} = J_i - J_i^{(1)}$,并转到 3).

3) 取 $k = L_\alpha(J_i^{(1)})$, $l = L_\alpha(J_i^{(2)})$,则系数矩阵 $P_{kl} = P_{lk} = C_i/v_{kl}$.

C 中各元素处理完毕,即可得到系数矩阵 P_f.

3.3.2 自由参数矩阵 $L_f(\alpha)$ 生成算法

初始化:取 $X = x^{|r|} \cdot (x^{|r|})^{\mathrm{T}}$,设 $i = 0$, $q = 1$, $L_f(\alpha) = 0$. 具体算法分 3 步完成:

1) 设 $i = i + 1$, $j = i$. 若 $i > \mathrm{Dim}(L_f(\alpha))$,则跳出程序, $L_f(\alpha)$ 生成完毕;否则转到 2).

2) 若 $L_{ij} \neq 0$,则转到 3);否则设 $t = 0$. 在 X 上三角部分中找出所有与 X_{ij} 相同的元素,并将找出的元素组成集合 $\{X_{kl}\}$. 若 $\{X_{kl}\}$ 不为空集,则对集合中每个元素 X_{kl} 取出下标信息,并设 $L_{kl} = v_{kl}\alpha_q$, $t = t + \alpha_q$. 每处理完一个元素 X_{kl}, q 自增 1. 最后,设 $L_{ij} = L_{ji} = -v_{ij}t$,并转到 3).

3) 设 $j = j + 1$. 若 $j > \mathrm{Dim}(L_f)$,则转到 1);否则转到 2).

对于 $L_f(\alpha)$, $f \in \mathbf{R}_{n,2r}^1$,其自由变量的个数 $N(\alpha)$ 由下式确定:

$$N(\alpha) = \frac{1}{2}c(n+r,r)[c(n+r,r)+1] - c(n+2r,2r). \tag{15}$$

3.4 正定多项式验证

引理 1[1] 给定多项式 $f(x) \in \mathbf{R}_{n,2r}^1$,对于 $\forall x \in \mathrm{R}^n$,均有 $f(x) \geq 0$ 的充分条件是: $f(x)$ 可分解为若干式的平方和,即 $f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i^2(x)$,并在以下 3 种情况下必要条件成立:

1) $n = 2$;

2) $r = 1$;

3) $n = 3$, $r = 2$.

定理 1 给定 $f(x) \in \mathbf{R}_{n,2r}^1$,则以下二者等价:

1) $f(x)$ 可分解为平方和的形式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i^2(x);$$

2) $\exists \alpha \in \mathrm{R}^{N(\alpha)}$,

$$\text{s.t. } M(f) = P_f + L_f(\alpha) \geq 0.$$

证明 1) ⇒2). 由 $\deg(f) = 2r$ 知,对于平方和中任一项 $f_i(x)$,均有 $\deg(f_i) \leq r$,则 $f_i(x)$ 可写成 $x^{|r|}$ 的线性形式,即 $f_i(x) = C_i x^{|r|}$, $C_i \in \mathrm{R}^{1\times c(n+r,r)}$. 从而可得

$$f(x) = (x^{|r|})^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{k} C_i^{\mathrm{T}} C_i\Big) x^{|r|}. \tag{16}$$

由式(16)知, $\sum_{i=1}^{k} C_i^{\mathrm{T}} C_i$ 为 $f(x)$ 的一种分解矩阵,即 $\exists \alpha$,使得 $P_f + L(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} C_i^{\mathrm{T}} C_i \geq 0$.

2) ⇒1). 若 $\exists \alpha$,使得 $P_f + L_f(\alpha) \geq 0$,则 $M(f)$ 可奇异值分解为

$$M(f) = U^{\mathrm{T}} \Lambda U.$$

取 $f_i(x) = (\Lambda^{1/2} U x^{|r|})_i$,即可得 1). □

由引理 1 和定理 1 可知, $f(x)$ 的正定性验证可转化为相应分解矩阵 $M(f)$ 的正定性验证问题,而后者可用矩阵不等式求解器求解. 且在引理 1 中所提出的 3 种情况下,二者是等价的;而其他条件下,通过多项式分解验证正定性则只是充分条件.

4 保收敛率局部镇定控制器设计

4.1 吸引域估计

考虑如下多项式非线性系统:

$$\dot{x} = f(x), \tag{17}$$

其中 $f(x) \in \mathbf{R}_n^n$. 本文采用多 Lyapunov 函数并集趋近的方法,对系统吸引域进行估计. 选取 $V_i(x) = x^{\mathrm{T}} P_i x$, $i = 1, 2, \cdots, N$,满足

$$\min e_i^{\mathrm{T}} P_i e_i,$$
$$\text{s.t. } -\dot{V}_i(x) - S_i(x)(1 - V_i(x)) > 0, \tag{18}$$
$$P_i \geq \varepsilon_i I_n, \tag{19}$$
$$S_i(x) = x^{|d_i|} G_i x^{|d_i|}, \quad G_i \geq 0. \tag{20}$$

其中: $\varepsilon_i \in \mathrm{R}^+$ 为控制 $V_i(x)$ 的最大半径, $e_i \in \mathrm{R}^n$ 为单位向量, $S_i(x)$ 为正定多项式且满足 $\deg(S_i) = \deg(\dot{V}_i) - 2$. 记 $\Omega_i(x) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid V_i(x) \leq 1\}$,则系统(17)的吸引域 $\Omega(x)$ 为

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) \cup \Omega_2(x) \cup \cdots \cup \Omega_N(x). \tag{21}$$

由式(19)知, $V_i(x) \geq \varepsilon_i \|x\|_2^2$,可保证 $\|x\| \to \infty$ 时, $V_i(x) \to \infty$,而式(18)保证 $\forall x \in \Omega_i(x)$ 均有 $\dot{V}_i(x) \leq 0$,故 $\Omega_i(x)$ 为式(17)的一个吸引域. 式

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(21) 为 N 个吸引域的并集,自然也为式(17) 的吸引域,并且不小于任何单个吸引域 $\Omega_i(x)$. 式(18) 次数大于 2,可由文中所给的多项式分解法判定其正定性,并采用 PENBMI[8] 求解相应矩阵不等式. e_i 为单位向量,当 x 与 e_i 方向重合时可表示为 $x(e_i) = r_i e_i$,则 $V_i(x) \le 1$ 在 e_i 方向上有

$$r_i^2 e_i^{\mathrm{T}} P_i e_i \le 1.$$

若使吸引域最大化,则希望所构造的 $V_i(x)$ 在 e_i 方向上具有最大半径, 从而得出优化目标为 $\min e_i^{\mathrm{T}} P_i e_i$. 因 e_i 为已知向量,优化目标为线性函数,故可有效求解.

关于单位向量 e_i 的构造方法,记 $e_i^{(n)}$ 为 n 维向量,可用如下递归方法构造 $e_i^{(n)}$:

$$e_i^{(n)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos\theta_i^{(2)} \\ \sin\theta_i^{(2)} \end{bmatrix}, & n = 2; \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_i^{(n)} \\ (\sin\theta_i^{(n)}) e_i^{(n-1)} \end{bmatrix}, & n > 2. \end{cases} \tag{22}$$

在向量 $e_i^{(n)}$ 中,共有 $n-1$ 个变量,即 $\theta_i^{(2)}, \theta_i^{(3)}, \cdots, \theta_i^{(n)}$. 因此,对于 n 维各个旋转方向上 N 等分的吸引域估计将产生 $N(n-1)$ 个优化问题. 对于稳定性分析,因各优化问题相互独立,故可有效求解.

4.2　局部镇定控制器设计

多项式非线性系统可描述为

$$\dot{x} = f(x) + gu(x), \tag{23}$$

其中: $f(x) \in \mathbf{R}_{n,d}^n$, $g \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $u(x) \in \mathbf{R}_n^m$,满足 $f(0) = u(0) = 0$. 记 $u_i(x)$ 为 $u(x)$ 向量中的一员,且 $u_i(x) = \sum_{j=1}^{N_i} k_{ij} m_j(x)$ 为预先给定的控制结构, k_{ij} 为待求增益, N_i 为 $u_i(x)$ 中单项式的个数. 控制目标为:设计控制器 $u(x)$ 的增益 k_{ij},使得系统(23) 在指定关注区间上取得最大收敛域,并在收敛域中闭环系统(23) 收敛速度至少为 γ.

关于控制器设计算法,取 $d = [\deg(f) - 1]/2$,构造 $V_i(x) = x^{\mathrm{T}} P_i x$, $S_i(x) = x^{|d|} G_i x^{|d|}$,按式(22) 取 N 个单位向量 e_i,则控制器增益 k_{ij} 为以下优化问题的解:

$$\min \sum_{i=1}^{N} \delta_i,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -\dot{V}_i(x) - 2\gamma V_i(x) - S_i(x)(1 - V_i(x)) \ge 0, \\ G_i \ge 0,\ P_i \ge \varepsilon_i I_n,\ te_i^{\mathrm{T}} P_i e_i \le \delta_i, \\ \underline{k}_{ij} \le k_{ij} \le \overline{k}_{ij}. \end{cases} \tag{24}$$

其中: $\underline{k}_{ij}$ 与 $\overline{k}_{ij}$ 为增益 k_{ij} 的上下限值,在具体问题中可根据物理条件限制等因素确定; t 为常值,在本文中 $t = 1000$. 由于 $e_i^{\mathrm{T}} P_i e_i$ 值可能很小,若直接使用 $e_i^{\mathrm{T}} P_i e_i \le \delta_i$ 约束,在优化过程中可能会因两次迭代结果相差很小而提前结束. 参数 t 的引入,使得优化目标放大 t 倍,在一定程度上克服了误差限度问题.

在很多实际系统中,控制对象模型是针对某稳定工作点建模所得,当系统状态远离工作点时,采用手工控制或其他全局稳定控制的方法,将系统状态调到工作点附近再切换成自动控制. 从这个意义上说,局部镇定控制侧重于关注系统的控制性能,而在满足该控制性能下,构造一个全局控制器往往是不可实现的. 本文的控制器设计意义在于满足一定收敛速度的前提下,使得局部控制的收敛域尽可能大,以增强系统的鲁棒性,扩大控制器的适用范围.

对于 $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$, $\dot{V}(x) \le -2\gamma V(x)$,可得以下缩放公式:

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|_2^2 \le x(t)^{\mathrm{T}} P x(t) \le \mathrm{e}^{-2\gamma(t-t_0)} x(t_0)^{\mathrm{T}} P x(t_0) \le \mathrm{e}^{-2\gamma(t-t_0)} \lambda_{\max}(P) \|x(t_0)\|_2^2.$$

进一步可得

$$\|x(t)\|_2^2 \le \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mathrm{e}^{-2\gamma(t-t_0)} \|x(t_0)\|_2^2. \tag{25}$$

由式(25) 知,若所构造的 Lyapunov 函数过于扁平,则意味着 $\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)$ 比值过大,使得系统状态泛数在收敛过程中可能出现严重超调. 相比构造单个 Lyapunov 函数的局部控制,本文的设计方法使得控制器在各个方向上致力于取得最大半径 Lyapunov 函数. 这样,一方面可避免所得收敛域过小;另一方面也避免收敛域过于扁平,从而避免调节过程中出现严重超调现象.

5　仿真实例

考虑如下非线性系统[9]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 + x_1^2 x_2 - 6x_1 x_2^2 + 5x_2^3, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{26}$$

全局镇定控制器为[9]

$$u(x) = -3.6345x_1^3 + 4.4439x_1^2 x_2 - 7.5113x_1 x_2^2 - 3.5452x_2^3. \tag{27}$$

该控制器虽然能取得全局稳定,但在系统临近原点时收敛速度缓慢,控制性能并不很出色. 假设系统(26) 关注区间为 $[-10, 10]$,希望得到收敛率 $\gamma \ge 0.15$ 的局部控制器,并且控制器增益限在 $[-20, 20]$ 区间内. 本文构造的局部控制器采用式(27) 的结构,即

$$u_L(x) = k_1 x_1^3 + k_2 x_1^2 x_2 + k_3 x_1 x_2^2 + k_4 x_2^3.$$

取 $\varepsilon_i = 0.01$,单位向量角 $\theta_i = \frac{5+i}{12}\pi$, $i = 1, 2, \cdots, 5$. 将式(24) 多项式分解,用 PENBMI 求解 BMI 问题可

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

得

$$u_L(x) = -20x_1^3 - 13.298x_1^2x_2 - 19.641x_1x_2^2 - 20x_2^3. \quad (28)$$

图 2 为控制器求解过程中所得保收敛率的吸引域. 从图 2 可知,各 $\Omega_i(x)$ 长轴与短轴之比小于 2,所构造的 5 个函数中比值最小为 1.35,则在各 $\Omega_i(x)$ 交集内有 $\|x(t)\|_2^2 \le 1.35e^{-0.3(t-t_0)}\|x(t_0)\|_2^2$.

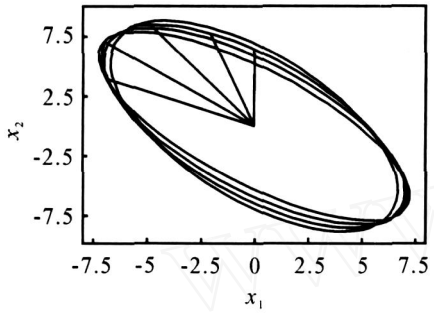

图 2 N = 5 时系统(26) 保收敛率吸引域

图 3 为控制性能比较,初始状态选择在单位圆上,即均在保收敛率吸引域内,图中实线为本文控制器,虚线为文献[9]控制器. 由图可见,本文提出的控制器在局部区域内大大改善了控制性能,并且 $\|x(t)\|$ 不会出现过大的超调.

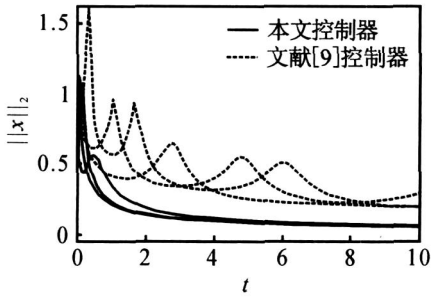

图 3 系统(26) 控制性能比较

6 结 论

正定多项式可作为候选 Lyapunov 函数 $V(x)$,用于系统稳定性分析和控制器综合. 本文提出了多项式分解算法,可有效解决正定多项式验证问题. 对于多项式非线性系统,$V(x)$ 沿系统轨迹的导数为高阶函数,其负定性可通过本文提出的多项式分解算法转化成矩阵不等式问题有效求解. 在此基础上,本文提出了通过多个 Lyapunov 函数来趋近收敛域问题,并用于保收敛率的局部镇定控制器设计,取得了良好性能.

参考文献(References)

[1] Parrilo P A. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization [D]. Pasadena: California Institute of Technology, 2000.

[2] Papachristodoulou A. Analysis of nonlinear time-delay systems using the sum of squares decomposition [C]. Proc of the 2004 American Control Conf. Boston, 2004: 4153-4158.

[3] Sturm J F. Using SeDuMi 1.02: A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones [J]. Optimization Methods and Software, 1999, 11(1): 625-653.

[4] Chesi G, Garulli A, Tesi A, et al. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 365-370.

[5] Chesi G. Estimating the domain of attraction via union of continuous families of Lyapunov estimates [J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(4): 326-333.

[6] Jarvis-Wloszek Z. Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization [D]. Berkeley: University of California, 2003.

[7] Löfberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab [C]. Proc of the CACSD Conf. Taipei, 2004: 284-289.

[8] Kocvara M, Stingl M. PENBMI user's guide [EB/OL]. http://tomopt.com/docs/penbmi.pdf.

[9] Prajna S, Parrilo P A, Rantzer A. Nonlinear control synthesis by convex optimization [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(2): 310-314.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net