文章编号: 1001-0920(2008)08-0841-09

线性时滞系统稳定性分析综述

张冬梅[a,b], 俞 立[b]
(浙江工业大学 a. 理学院, b. 信息工程学院, 杭州 310032)

摘 要: 时滞在工程领域广泛存在,对此综述了线性时滞系统的稳定性研究方法. 从频域和时域两个角度详细介绍了各种方法的特点, 着重讨论基于线性矩阵不等式(LMI)的分析方法,指出保守性是分析的重点. 对现有结果的保守性进行比较和评述,并提出了改进的思路.

关键词: 时滞系统; 稳定性; 保守性; 线性矩阵不等式; 时滞依赖
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Survey on the stability analysis of linear time-delay systems

ZHANG Dong-mei[a,b], *YU Li*[b]
(a. College of Science, b. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China. Correspondent: ZHANG Dong-mei, E-mail: meidzh@zjut.edu.cn)

Abstract: As time-delays are extensively encountered in many fields of engineering, the stability analysis method of linear time-delay systems is outlined. The characters of frequency domain method and time domain method are illustrated in detail. The linear matrix inequality (LMI)-based stability analysis approach is mainly discussed. It is pointed out that the conservatism is important for the stability analysis. Comparison and discussion are given on some existing results. Finally, some improvement directions are discussed.

Key words: Time-delay systems; Stability; Conservatism; Linear matrix inequality; Delay-dependent

1 引 言

从系统理论的观点看,任何实际系统的过去状态不可避免地要对当前的状态产生影响,即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态,也依赖于过去某一时刻或若干时刻的状态,这类系统称为时滞系统. 时滞产生的原因有很多,如: 系统变量的测量(复杂的在线分析仪)、长管道进料或皮带传输、缓慢的化学反应过程等都会产生时滞. 时滞常见于电路、光学、神经网络、生物环境及医学、建筑结构、机械等领域,由于应用背景广泛,受到很多学者的关注. 从理论分析的角度来看,在连续域中,时滞系统是一个无穷维的系统,特征方程是超越方程,有无穷多个特征根,而在离散域中,时滞系统的维数随时滞的增加按几何规律增长,这给系统的稳定性分析和控制器设计带来了很大的困难. 因此,对于时滞系统的控制问题,无论在理论还是在工程实践方面都具有极大的挑战性.

常见的时滞系统包括奇异时滞微分系统、脉冲时滞微分系统、Lurie 时滞系统、中立型时滞系统和随机时滞系统等. 其基本理论建立于 20 世纪五、六十年代,迄今为止,研究的成果相当丰富[1-5],本文作者限于水平及阅读范围,提到的只是极其有限的一部分结果.

2 时滞系统稳定性分析基本方法

从工程实践的角度来看,时滞的存在往往导致系统的性能指标下降,甚至使系统失去稳定性. 例如系统

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) \tag{1}$$

是稳定的,但加入时滞项后,系统

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + 1.3x(t-1) \tag{2}$$

变得不稳定. 同时,时滞也可以用来控制动力系统的行为,例如时滞反馈控制已成为控制混沌的主要方法之一[6,7].

通常用泛函微分方程来描述时滞系统,以含单

收稿日期: 2007-05-08; **修回日期**: 2007-07-27.
基金项目: 国家杰出青年基金项目(60525304).
作者简介: 张冬梅(1973 —),女,吉林省吉林市人,讲师,博士生,从事时滞系统、多项式优化理论的研究; 俞立(1961 —),男,浙江省富阳人,教授,博士生导师,从事鲁棒控制、网络控制等研究.

时滞的微分方程为例,即

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bx(t-h),\ A,B \in R^{n\times n}, \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h,0]. \end{cases} \quad (3)$$

其中:$h > 0$ 为时滞,初始条件由定义在 $[-h,0]$ 的连续可微函数 $\phi(\cdot)$ 确定,系统 $t > 0$ 时的行为不仅依赖于 0 时刻的状态,而且与时间段 $[-h,0]$ 内的运动有关,因此解空间是无穷维的. 其特征方程是含有指数函数的超越方程,即

$$\det(\lambda I - A - \exp(-\lambda h)B) = 0. \quad (4)$$

讨论特征根需要用到很多复变函数的知识. 早在 1942 年,Pontryagin 就提出了一种原则性方法——Pontryagin 判据来解决这一问题,之后很多工作致力于对这一判据具体化,使之更加实用[3,8,9].

总之,时滞系统稳定性分析方法可分成 3 类.

2.1　无限维系统理论方法

这种方法是将时滞系统看成无穷维系统,用无穷维空间的适当算子来描述时滞系统的状态变化,一方面可对时滞系统进行一般建模;另一方面,也可表述系统的可观性和可控性等结构方面的概念.

2.2　代数系统理论方法

代数系统理论对于时滞系统的建模和分析都比较方便,但在控制器的设计方面目前尚处于初期阶段,还缺乏有效方法.

2.3　泛函微分方程理论方法

泛函微分方程理论考虑了系统的过去对系统变化率的影响,利用有限维空间以及泛函空间提供一套适当的数学结构以描述时滞系统的状态变化.

目前,研究时滞系统主要是应用泛函微分方程理论,研究范围涉及稳定性分析、控制器设计、H_∞ 控制、无源与耗散控制、可靠控制、保成本控制、H_∞ 滤波、Kalman 滤波以及随机控制等. 不管研究哪个分支,稳定性都是基础,对最终形成控制方案具有非常重要的理论和现实意义. 时滞系统稳定性分析的目的是希望找到计算简单、切实有效并且保守性尽可能小的稳定性判据,研究方法主要分为两类:一类是以研究系统传递函数为主的频域方法;另一类是以研究系统状态方程为主的时域(状态空间)方法.

2.3.1　频 域 法

频域法是最早提出的稳定性分析方法,它基于超越特征方程根的分布或复 Lyapunov 矩阵函数方程的解来判别稳定性. 类似于不包含时滞的线性系统,线性时滞系统稳定的充要条件是闭环特征方程的解均具有负实部. 由于时滞系统闭环特征方程是一个具有无穷多解的超越方程,其稳定性分析比无时滞系统要复杂得多. 但是利用频域法对系统进行分析具有直观易懂的特点,只要分析系统的特征根分布就可在一定程度上了解系统的稳定性和动态性能,并且计算量小、物理意义强,因此采用频域方法进行线性时滞系统稳定性分析,具有重要的理论意义和实际价值.

从频域角度出发,对系统进行稳定性分析的方法主要包括:图解法、解析法和复 Lyapunov 方法.

Nikiforuk[10] 于 1965 年提出一种简单的双轨迹法的图解方法;Mukherjee[11] 在此基础上探讨了控制环增益与系统前向通道中时滞之间的变化关系;最近,运用双轨迹法进行时滞系统稳定性分析的文献还有很多[12-14].

利用解析法进行相关研究的文献包括:文献[15]利用超越特征方程根的分布得到了稳定的充分条件. Thowsen[16] 通过引入适当的变换,将特征方程化为非超越的形式,得到了 Routh-Hurwitz 型稳定性判据. Watanabe 等[17,18] 通过有限谱配置分析时滞系统的稳定性. 文献[19]基于 Pontryagin 判据提出了适用于准多项式 $H(s, e^{\theta_s})$ 的 Hermite-Biehler 推广定理. Rekasius[20] 以时滞项的双线性变换为基础提出了一种伪时滞法, 在此基础上 Olgac[21] 证明了这种双线性变换的引入有助于准多项式 $H(s, e^{\theta_s})$ 的稳定性分析,并可用来方便地估计闭环特征式的虚轴零点. Walton[22] 提出了一种不需要引入双线性变换而能够删除准多项式中指数项的直接法. Zhang[23] 给出了基于Lyapunov方程的线性时滞系统稳定条件,并建立了该条件与用于鲁棒性分析的小增益定理之间的等价关系. 国内学者胥布工[24]、俞元洪[25]、刘和涛[26]、张作元[27] 等也在这一领域进行了相关研究.

复 Lyapunov方法是 Repin[28] 于 20 世纪 80 年代首次提出的,其思想是利用复 Lyapunov 方程的正定 Hermitian 矩阵解进行稳定性分析. 该想法被 Brierley 等[29] 用来研究复 Lyapunov 方程正定 Hermitian 解的存在性,进而得到一个具有可公度时滞的线性系统稳定性的充要条件. Lee 等[30] 将这一结果推广到中立型时滞系统. Agathoklis 等[31] 进一步研究了具有不可公度滞后的线性系统,得到了稳定性的充分条件.

虽然频域法理论上容易得到系统稳定的充要条件,但在考虑控制器的设计时,由于涉及到系统特征方程的处理,计算非常复杂,特别是对于多变量高维系统、非线性微分系统或中立型系统. 并且,频域法难于处理含有不确定项以及参数时变的时滞系统.

2.3.2　时 域 法

时域法是目前时滞系统稳定性分析和综合的主

要方法，易于处理含有不确定项、时变参数和时变时滞的系统以及非线性时滞系统. 时域法主要包括 Lyapunov-Krasovskii 泛函法、Razumikhin 函数法、Lyapunov 函数结合 Razumikhin 型定理方法、时滞不等式方法. Lyapunov 泛函法和 Razumikhin 函数法，分别由 Krasovskii 和 Razumikhin 于 20 世纪 50 年代末提出，是目前应用最广泛的两种方法. 时滞不等式方法由 Halanay 建立于 20 世纪 60 年代，是非线性、脉冲、变时滞等复杂时滞系统稳定性分析的强有力工具[32]. 另外，通过估计方程的基本解矩阵也可得到稳定性条件[33]，但该方法依赖于不等式技巧，得到的条件往往过于保守. 下面重点介绍 Lyapunov-Krasovskii 泛函法和 Razumikhin 函数法.

2.3.2.1　Razumikhin 函数法

使用 Razumikhin 函数法，避免了构造 Lyapunov 泛函的麻烦，被许多学者广泛应用和推广，该方法的理论基础是著名的 Razumikhin 稳定性定理[34].

Razumikhin 稳定性定理主要应用于非线性和不确定时滞系统，用于线性时滞系统，得到的稳定性条件相对较为保守. 这方面的成果包括：Trinh 等[35]使用 Razumikhin 稳定性定理研究了带有非线性扰动的时变时滞系统的稳定性和镇定；Park[36] 基于 Razumikhin 稳定性定理首次提出了模型变换；Jankovic[37] 总结了几类时滞系统的系统化 Lyapunov-Razumikhin 函数的构造方法等. 在国内，刘永清等[38] 较早研究了线性定常时滞系统和时变时滞系统的镇定问题. 关于这方面更详细的论述可参见文献[2，3]. 利用 Razumikhin 函数法得到的稳定性结果与利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函法得到的结果有些相似，对后者施加某些约束往往即可得到前者[39]，因而使用 Razumikhin 函数法得到的结果相对较为保守，但该方法适于快变时滞系统. 一般认为 Lyapunov-Krasovskii 泛函法不适于快变时滞系统，但这一看法最近发生了改变，文献[40] 利用 Lyapunov-Krasvskii 方法解决了一类区间时变时滞系统稳定性问题，允许时滞是快变的.

2.3.2.2　Lyapunov-Krasovskii 泛函法

Krasovskii 在 1963 年发表的一篇文章中[41]，用 Lyapunov-Krasovskii 泛函取代了传统意义上的二次正定 Lyapunov 函数，在此基础上，针对时滞系统给出了一类新的稳定性分析方法 ——Lyapunov-Krasovskii 泛函法，其思想基础是 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理[39].

对于复杂系统或非线性系统，Lyapunov-Krasovskii 泛函的构造需要很高的技巧，并且利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函法进行时滞系统稳定性分析，最终得到的条件基本上都可转化为类 Riccati 方程(或不等式). 20 世纪 80 年代和 90 年代初期，Riccati 方法是研究热点. 求解 Riccati 方程(或不等式) 主要采用迭代法，其缺点是：1) 收敛性得不到保证；2) 需要事先给定一些待定参数，目前还缺乏寻找这些参数最佳值的方法，并且参数的人为设定给系统的分析和综合带来很大的保守性. 内点法的提出[42]，并成功用来求解具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，较好地弥补了 Riccati 方法求解上的不足，不需要预先给定任何参数和正定对称矩阵，可直接用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱进行求解. 内点法主要思想是：利用约束条件定义一个闸函数，该函数在可行域内部是凸的，在可行域外部定义为无穷大. 通过在目标函数中添加这样一个闸函数，使得原先的约束优化问题转化成一个无约束的优化问题，从而可以利用求解无约束优化问题的牛顿法来求解[43]. 由于利用 Lyapunov-Krasovskii 方法只能得到稳定的充分条件，减小条件的保守性是努力的方向. 在过去的 10 年里，很多学者致力于这方面的研究[44-48]. 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函法，结合线性矩阵不等式(LMI) 这一工具对时滞系统进行稳定性分析，得到的结果便于进行控制器的设计和综合，因此成为控制理论和控制工程领域研究的热点问题.

不管采用哪种方法进行稳定性分析，按照是否依赖于时滞大小，得到的稳定性条件都可分为两类：时滞依赖(时滞相关) 稳定性条件和时滞独立 (时滞无关) 稳定性条件. 时滞独立的稳定性条件，优点是较为简单，容易验证，且易于控制器设计；缺点是对于小时滞系统具有较强的保守性. 而时滞依赖稳定性条件要求当时滞为零时，系统是稳定的，这样由于系统解对时滞的连续依赖，一定存在一个时滞上界 $\bar{h}$，使得对于 $\forall h \in [0, \bar{h}]$，系统均是稳定的. 相应地，最大允许时滞界 $\bar{h}$ 就成为衡量时滞依赖条件保守性的主要指标. 近年来，在稳定性分析、鲁棒控制、H_∞控制、可靠控制、保成本控制、饱和输入控制以及混沌系统控制中的时滞依赖问题已引起了很多学者的关注和广泛研究. 减少结果的保守性主要采用 3 种方法：交叉项界定方法、模型变换方法以及 Lyapunov-Krasovskii 泛函的适当选取. 目前得到的时滞依赖稳定性结果都是基于以上一个或多个技术的结合. 其中，Fridman 提出的描述模型变换方法[49-51]结合 Moon 不等式[52]方法，可以得到具有较小保守性的稳定性准则. 最近也出现了一些新的思想和方法，如韩清龙[53]和张先明[54]的积分不等式法

(两个积分不等式形式不同,本质上是等价的),何勇[55]和徐胜元[56]的自由矩阵法,以及新的Lyapunov-Krasovskii泛函选取方法[57-60]等.

(1) 有关Lyapunov-Krasovskii泛函的选取

Lyapunov-Krasovskii泛函法是对经典的Lyapunov二次函数的推广,常见的形式有

$$V_1(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t),$$

$$V_2(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)\int_{-h_i}^{0} Q_i x(t+\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$V_3(x_t) = \int_{-h_i}^{0} x^{\mathrm{T}}(t+\theta)S_i(x+\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$V_4(x_t) = \int_{-h_i}^{0}\int_{t+\theta}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)R_i x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_5(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)\int_{-h_i}^{0} P_i(\eta)x(t+\eta)\mathrm{d}\eta,$$

$$V_6(x_t) = \int_{-h_i}^{0}\int_{-h_i}^{0} x^{\mathrm{T}}(t+\eta)P_i(\eta,\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\theta,$$

$$V_7(x_t) = \int_0^t\int_{\sigma-h(\sigma)}^{\sigma}\begin{bmatrix} x(\sigma) \\ x(\sigma-h(\sigma)) \\ x(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} X \begin{bmatrix} X(\sigma) \\ x(\sigma-h(\sigma)) \\ x(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma,$$

$$V_8(x_t) = \int_0^t\int_{\beta-h}^{\beta}\begin{bmatrix} x(\beta) \\ \dot{x}(\beta) \\ \dot{x}(\alpha)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} X \begin{bmatrix} x(\beta) \\ \dot{x}(\beta) \\ \dot{x}(\alpha)\end{bmatrix}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \quad (5)$$

其中

$$P \geq 0,\ P_i \geq 0,\ Q_i \geq 0,$$
$$R_i \geq 0,\ S_i \geq 0,\ P_i(\cdot) \geq 0,$$
$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ * & X_{22} & X_{23} \\ * & * & X_{33}\end{bmatrix} \geq 0.$$

一般来说,利用V_2,V_3得到的多为时滞独立的稳定性结果,当时滞类型为离散型时滞或分布型时滞时,利用V_4得到的多为时滞依赖的稳定性结果,相应的稳定性条件是充分条件.利用V_5,V_6可以得到稳定的充要条件[60],但结果不能推广到不确定系统.文献[61,62]针对该情况,提出一种"离散化Lyapunov"方法,在保守性方面有了较大改进,但计算复杂度也随之提高,且难于进行控制器设计.二者的主要区别是后者构造的Lyapunov-Krasovskii泛函不含离散化状态,并且后者严格证明了随着离散区间数目的增加,稳定性准则的保守性相应减小.值得一提的是,针对如下经典例子:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1\end{bmatrix}x(t-h),$$

文献[62]在理论上分析了保证系统稳定的时滞上界,并指出其最大值为6.17.

利用V_7,V_8并结合描述模型变换法,也可以有效地减小结果的保守性[57,58].此外,Haddad[63],Gahinet[64]以及Feron[65]等人于20世纪90年代中期提出的参数依赖Lyapunov泛函方法,在减少保守性方面又迈进一步.文献[66]是其代表性文章,通过引入附加的自由变量来消除Lyapunov矩阵与系统矩阵的乘积项,从而获得保守性较小的鲁棒稳定性条件.Lin在[67]中将这种方法与自由矩阵法[55]有机结合,进一步减小了结果的保守性.利用参数依赖Lyapunov泛函方法得到的结果,大多局限于具有多胞型不确定性的系统.最近,[68]应用多项式优化领域中的SOS分解理论[69],构造参数依赖的Lyapunov泛函,在减小保守性方面进一步取得了突破.该方法可以推广到更广一类时滞系统(包括标称时滞系统,非线性时滞系统,结构不确定系统).鉴于目前多项式优化理论的快速发展[70,71],该理论有望在时滞系统稳定性分析以及控制器的设计方面提供更为系统化的方法,并成为理论研究和实际应用方面的新热点.

(2) 交叉项界定方法

在现有的许多稳定性分析中,针对Lyapunov函数时间导数项中的交叉项,采用矩阵不等式对其进行不同程度的放大,使得导出的稳定性条件具有不同的保守性,这一方法称为交叉项界定方法.不失一般性,这里不妨将该概念进一步拓展,认为文献[53,54]中使用的积分不等式法也属于交叉项界定方法.将其与几个常用不等式合在一起进行保守性的比较.假设a和b两个向量线性无关,稳定性分析中常用的矩阵不等式有:

1) $$-2a^{\mathrm{T}}b \leq \eta_1 = \inf_{X>0}\{a^{\mathrm{T}}Xa + b^{\mathrm{T}}X^{-1}b\}. \quad (6)$$

2) Park不等式[48]

$$-2(a+Mb)^{\mathrm{T}}b \leq \eta_2 = \inf_{X>0}\{(a+Mb)^{\mathrm{T}}X(a+Mb) + b^{\mathrm{T}}X^{-1}b\}, \quad (7)$$

或等价的

$$-2a^{\mathrm{T}}b \leq \eta_2 = \inf_{X>0,M}\left\{\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & XM \\ * & (M^{\mathrm{T}}X+I)X^{-1}(XM+I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix}\right\}. \quad (8)$$

3) Moon不等式[52]

$$-2a^{\mathrm{T}}b \leq \eta_3 = \inf_{X,Y,Z,N}\left\{\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y-N \\ * & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix}\right\}, \quad (9)$$

其中$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z\end{bmatrix} \geq 0$.

4) 张积分不等式[54]

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)X\dot{x}(s)\mathrm{d}s\le\eta_4=$$
$$\inf_{N_1,N_2,X>0}\left\{\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}N_1+N_1^{\mathrm{T}} & -N_1^{\mathrm{T}}+N_2\\ * & -N_2-N_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}+\right.$$
$$\left.h\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}N_1^{\mathrm{T}}\\N_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}X^{-1}[N_1\quad N_2]\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}\right\},\tag{10}$$

其中 $X>0$.

5) 韩积分不等式[53]

$$-\int_{-h}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t+\xi)X\dot{x}(t+\xi)\mathrm{d}\xi\le\eta_5=$$
$$\inf_{X>0}\left\{\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-h^{-1}X & h^{-1}X\\ * & -h^{-1}X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}\right\},\tag{11}$$

其中 $X>0$.

这里式(7) 和(8) 的等价性在文献[43] 中已给出证明,作者同时指出 $\eta_1\ge\eta_2\ge\eta_3$. 而 η_4 与 η_5 尽管看起来迥然相异,但事实上二者相等. 关于这一点,可利用 Finsler 定理进行证明,证明方法参照文献[72],其中投影矩阵可类似选取. 回到文献[53] 和[54],重新审视两个积分不等式(10),(11) 的证明过程,不难发现韩积分不等式是利用詹生不等式直接得到的,而张先明积分不等式是在 Moon 不等式基础上通过增加自由变量得到的. $\eta_4=\eta_5$ 说明了殊途同归的道理.

关于 η_3 与 η_4,η_5,直接比较是困难的,必须结合相应的稳定性准则进行讨论. 而基于 LMI 得到的稳定性准则在矩阵结构、变量维数、个数等方面有所不同,难于直接比较. 以往的研究基本上还停留在数值比较的基础上. 文献[72,73] 另辟蹊径,从理论上对已有结果的保守性进行分析,严格证明了近 3 年来发表在 IEEE AC 和 Automatica 等著名杂志上的几个有代表性的稳定性准则[51,53.55-58,74] 彼此是等价的. 证明的思想来源于 Finsler 定理,通过构造适当维数的投影矩阵,可以对维数、变量均不相同的矩阵不等式进行解空间的比较. 巧合的是,就在同年 Gouaisbaut 也做了类似的工作,他在一篇会议论文[75] 中利用二次分离定理得出了与文献[53] 相同的结果,并在理论上证明了该结果与文献[55,56,74] 中相应结果的等价性.

注意到上面提到的稳定性准则均是在选取相同的 Lyapunov 泛函

$$V(t,x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(\xi)Qx(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{t-h}^{t}(h-t+\xi)\dot{x}^{\mathrm{T}}(\xi)(hR)\dot{x}(\xi)\mathrm{d}\xi\tag{12}$$

基础上得到的,因而仔细推敲以上准则的等价性可得到一些有趣的结论.

具体来说,在上述等价的稳定性准则中,文献[51] 中的准则是利用描述模型变换[50] 结合 Moon 不等式[52] 得到的;[74] 是利用 Finsler 定理得到的;而[53,54] 是直接利用积分不等式(10) 和(11) 得到的,没有使用模型变换;[55] 和[56] 是利用自由变量法得到的,但二者在选取自由变量的个数以及自由变量的维数方面不尽相同. 以上一系列结果彼此等价,从侧面说明,在线性时滞系统的稳定性分析中,利用现有方法(如描述模型变换法、自由矩阵法、Finsler 定理法和积分不等式法等) 得到的结果,尽管在形式、变量、矩阵结构等都有所不同,但解空间是相同的. 同时也说明,利用现有的方法进行稳定性分析,已经遇到了瓶颈,难有突破性进展,必须采用新的方法和工具来进一步减小结果的保守性.

需要指出的是:文献[53] 利用积分不等式法给出了一个简单的稳定性结果;[75] 采用二次分离原理也给出了同样的结果. 这一结果由于结构简单,变量个数少,矩阵阶数小,更易于优化问题求解. 具体结果如下:

引理 1[53,75]　对于给定的 $h>0$,如果存在实矩阵 $P>0$,$Q>0$,$R>0$,使得矩阵不等式

$$\psi=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+PA+Q-R & PB+R & hA^{\mathrm{T}}R\\ * & -Q-R & hB^{\mathrm{T}}R\\ * & * & -R\end{bmatrix}<0\tag{13}$$

有解,则系统(3) 渐近稳定.

随后,Gouaisbaut[76] 利用时滞算子的泰勒级数展开并结合二次分离原理,给出一类新的稳定性准则,并且证明,随着展开项阶数增大,余项将趋近于零,稳定性准则的保守性也会相应减小. 这一方法为进一步减小保守性提供了思路.

(3) 几种模型变换

在时滞系统稳定性分析中,模型变换是经常采用的方法. 模型变换容易引入原系统没有的极点,又称为附加动态特性[39,51],使得变换后的模型与最初的系统模型之间不等价,结果导致原系统失稳. 另外,由于模型变换异致的不等价,也可能导致得到的稳定性准则相对保守.

模型变换中经常要用到牛顿 - 莱布尼兹公式

$$x(t-h)=x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s.\tag{14}$$

例如,针对系统(3) 的如下几种常见模型变换:

1) $\dot{x}(t)=(A+B)x(t)-B\int_{t-h}^{t}[Ax(s)+Bx(s-h)]\mathrm{d}s;$ (15)

2) 中立型变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)+B\int_{t-h}^{t}x(s)\,\mathrm{d}s\right]=(A+B)x(t);\qquad(16)$$

3) $$\dot{x}(t)=(A+B)x(t)-B\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s;\qquad(17)$$

4) 描述模型变换

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=y(t),\\ 0=-y(t)+(A+B)x(t)-B\int_{t-h}^{t}y(s)\,\mathrm{d}s.\end{cases}\qquad(18)$$

都是在牛顿 - 莱布尼兹公式基础上得到的.

这里,模型变换 1) 增加了特征根的个数,从而引入了系统附加动态特性,使变换后的模型与原模型不等价. 而中立型变换 2),通常和下列 Lyapunov-Krasovskii 泛函配合使用:

$$V(t)=D^{\mathrm{T}}(x_t)P_1Dx_t+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Rx(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\qquad(19)$$

其中

$$Dx_t=x(t)+A_1\int_{t-h}^{t}x(s)\,\mathrm{d}s.\qquad(20)$$

如果 $\dot{V}(t)<0$,并且 $Dx_t=0$ 渐近稳定,则系统(3) 渐近稳定. 但事实上 $Dx_t=0$ 渐近稳定这一点很难验证,一般是利用其充分条件 $h\,|A_1|<1$ 来保证,但这样会进一步带来保守性,而且中立型变换 2) 不适于时变时滞的情形. 模型变换 3) 和 4) 与原系统是等价的,也适于时变时滞情形,特别是模型变换 3) 结合 Moon 不等式法曾衍生出一大批重要结果. 但文献[72,73,75]的结论从侧面说明,该变换并不是完全必要的,至少在稳定性分析的框架之下,该方法完全可用其他方法取代,例如积分不等式方法等.

以上讨论的多是连续系统,在工业控制系统以及通讯网络控制系统中,由于数据采样的需要,必须把连续时间系统离散化,由此得到离散时滞系统. 与连续时滞系统不同的是,离散时滞系统可通过状态增维的方式变换成一个无时滞系统,因此离散时滞系统本质上是一个有限维系统,进而可以得到系统稳定的充要条件. 但是如果时滞很大,所导出的无时滞系统阶数就会很高,给研究带来不便. 因此,在进行稳定性分析和控制器设计时,很多情况下仍然采用与连续时滞系统平行的做法. 另外,由于篇幅有限,本文没有提及含有不确定性的时滞系统分析方法,一方面是因为作者希望在一个朴素、简单的模型背景下讨论稳定性问题,而不确定性包含很多类型(如多胞型不确定性、结构不确定性、区间不确定性等),反而不容易突出主题;另一方面,针对标称线性时滞系统,利用线性矩阵不等式方法得到的结果往往可以平行地推广到含不确定性的时滞系统. 关于含有不确定性的时滞系统的稳定性分析,读者可在 Gu[39] 一书中发现更多的结论.

3 问题与展望

1) 目前有关时滞系统稳定性的分析结果很多,但是进行控制器设计时,只在个别情况下才会得到线性矩阵不等式(LMI),多数情况下得到的是多项式矩阵不等式(PMI)或双线性矩阵不等式(BMI). 如何将多项式矩阵不等式转化为 LMI,或者在无法转化成 LMI 时,如何对其利用优化方法进行求解,是今后继续努力的方向. 目前发展起来的多项式优化理论有望为这一问题提供系统化方法[69-71].

2) 如何得到计算复杂性低,同时保守性较小的稳定性准则是未来的努力方向. 其中 Lyapunov-Krasovskii 泛函的适当选取,尤其是参数依赖的 Lyapunov 泛函的选取,将对结果的保守性产生积极影响,而利用二次分离原理[75]进行稳定性分析,也为减小结果的保守性提供了思路. 这方面还有大量的工作有待进行.

3) 基于线性矩阵不等式的稳定性准则在保守性方面难于比较,至少看起来不直观. 原因是线性矩阵不等式在矩阵维数、变量及变量个数方面有所不同. 以往的比较是基于数值例子,理论分析较少,文献[72,73,75]在这方面做了很好的探索. 如何进一步寻求系统化方法进行相关分析,这方面的工作很有意义.

4) 近年有关时滞的讨论多数集中在线性系统,有关非线性时滞系统的讨论则较少(当然也有例外[6]),而实际系统往往是非线性的,这也是进一步努力的方向之一.

5) 近年来对网络控制系统、无线通讯网络、无线传感器网络的研究蓬勃兴起,因网络中的信息必须通过通信网络分时传送,不可避免地在控制环路中引入了通讯延迟(时滞),消除时滞对网络系统的稳定性影响是备受关注的问题,是推动时滞系统进一步研究发展的动力.

参考文献(References)

[1] Bellman R, Cooke K. Differential difference equations [M]. New York: Academic Press, 1963.

[2] Kolmanovskii V B, Myshkis A D. Introduction to the theory and application of functional differential equations [M]. New York: Kluwer Academy, 1999.

[3] Niculescu S I. Delay effects on stability[M]. London: Springer-Verlag, 2001.

[4] Hale J K. Theory of function differential equations[M].

New York: Spinger-Verlag, 1977.

[5] 秦元勋, 刘永清, 王联. 带有时滞的动力系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1989.
(Qin Y X, Liu Y Q, Wang L. Stability of delay dynamics systems[M]. Beijing: Science Press, 1989.)

[6] 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展[J]. 力学进展, 1999, 29(4): 501-512.
(Hu H Y, Wang Z H. The development of studies for nonlinear time-delay systems [J]. Advances in Mechanics, 1999, 29(4): 501-512.)

[7] Just W, Bernard T, Ostheimer M, et al. Mechanism of time-delayed feedback control [J]. Physical Review Letters, 1997, 78(2): 203-206.

[8] Stepan G. Retarded dynamical systems: Stability and characteristic functions[M]. Essex: Longman Scientific and Technical, 1989.

[9] Kuang Y. Delay differential equations with applications to population dynamics [M]. New York: Academic Press, 1993.

[10] Nikiforuk P, Westlund D. Relative stability from the dual-locus diagram [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1965, 10(1): 103-104.

[11] Mukherjee S K. Note on the stability of linear control system with distributed-lag[J]. J of the Institution of Electronics and Telecommunication Engineers, 1975, 21(2): 75-76.

[12] Zhong Q C. Robust stability analysis of simple systems controlled over communication networks [J]. Automatica, 2003, 39(7): 1309-1312.

[13] Zhong Q C. Control of integral processes with dead time — Part 3: Deadbeat disturbance response [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(1): 153-159.

[14] Olgac N, Holm-Hansen, B. Design considerations for delayed-resonator vibration absorbers [J]. J of Engineering Mechanics, 1995, 121(1): 80-89.

[15] Chiasson J N. A method for computing the interval of delay values for which a differential-delay systems is stable[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(12): 1176-1178.

[16] Thowsen A. The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems [J]. Int J of Control, 1981, 33(5): 991-995.

[17] Watanabe K, Nobuyama E, Kitamori T, et al. A new algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with time delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(9): 1377-1383.

[18] Suyama K. Finite spectrum assignment for linear systems with non-commensurate time-delays [J]. Automatica, 2001, 37(1): 43-49.

[19] Pontryagain L S. On the zeros of some elementary transcendental functions [J]. American Mathematic Socierty, 1955, 2(1): 95-110.

[20] Rekasius Z V. A stability test for systems with delays [C]. Proc of the Joint Automatic Control Conf. San Francisco, 1980.

[21] Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(5): 793-797.

[22] Walton K, Marshall J E. Direct method for TDS stability analysis[J]. IEE Proc Part D: Control Theory and Applications, 1987, 134(2): 101-107.

[23] Zhang J, Knopse C R, Tsiotras P. Stability of time-delay systems: Equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(3): 482-486.

[24] Xu B G. Stability criteria for linear time-invariant systems with multiple delays [J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 252(1): 484-494.

[25] 俞元洪. 超越函数 $\det(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$ 零点全分布在复平面左半部的代数判据[J]. 科学通报, 1984, 29(23): 1413-1415.
(Yu Y H. Algebraic criteria of all zeros of transcendental functions $\det(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$ to lie in the left half-plane [J]. Chinese Science Bulletin, 1984, 29(23): 1413-1415.)

[26] 刘和涛. 一类时滞微分系统无条件稳定的代数判定[J]. 控制理论与应用, 1986, 1: 106-110.
(Liu H T. The algebraic criterion for unconditional stability for a class of differential system with time delay[J]. Control Theory and Application, 1986, 1: 106-110.)

[27] 张作元. 滞后型方程 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ 全时滞稳定的代数判据[J]. 数学通报, 1986, 31(23): 1768-1771.
(Zhang Z Y. Algebraic criteria of time-delay systems $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ with all delays stable[J]. Bulletin des Sciences Mathematics, 1986, 31(23): 1768-1771.)

[28] Repin Y M. Quadratic Lyapunov functionals for systems with delay [J]. Prikladnaya Matematikal Mehanika, 1965, 24(3): 564-566.

[29] Brierley S D, Lee E B. Solution of the equation $A(z)X(z) + X(z)B(z) = C(z)$ and its application to the stability of generalized linear systems [J]. Int J of Control, 1984, 40(6): 1065-1075.

[30] Lee E B, Lu W S, Wu N E. A Lyapunov theory for linear time-delay systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, 31(8): 259-261.

[31] Agathoklis P, Foda S. Stability and the matrix Lyapunov equation for delay differential systems [J]. Int J of Control, 1989, 49(2): 417-432.

[32] 廖小昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
(Liao X X. Stability theory and application of dynamics systems [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2000.)

[33] Lefschitz. Stabilty of nonlinear control systems [M]. New York: Academic Press, 1965.

[34] Razumikin B S. On the stability of systems with delay [J]. Prikladnava Matematikal Mekhanika, 1956, 20(4): 500-512.

[35] Trinh H, Aldeen M. On robustness and stabilization of linear systems with delayed nonlinear perturbations [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(7): 1005-1007.

[36] Park P, Moon Y, Kwon W H. A delay-dependent robust stability criterion for uncertain time-delay system [C]. Proc of American Control Conf. San Diego, 1998: 1963-1965.

[37] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(7): 1048-1060.

[38] Liu Y. On the equivalence problem of control systems and control systems with time-lags in the theory of stabilization (l), (2) [C]. Proc of 9th World Congress of IFSC. Budapest, 1984: 2-6.

[39] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems [M]. Boston: Birkhauser, 2003.

[40] Han Q L, Jiang X F, M X. Computation of delay bound for linear neutral systems with interval time-varying discrete delay [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems — Series B: Applications & Algorithm, 2006, 1(c): 117-131.

[41] Krasovskii N N. Stability of motion [M]. San Francisco: Stanford University Press, 1963.

[42] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[43] 俞立. 鲁棒控制 ——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu L. Robust control — Linear matrix inequality approach [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[44] 俞立. 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究[J]. 自动化学报, 2003, 29(3): 428-431.
(Yu L. Research on the absolute stability of a class of time-delay systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(3): 428-431.)

[45] 段广仁, 刘湘黔. 线性时滞系统时滞独立稳定的充分条件[J]. 控制与决策, 1996, 11(3): 420-423.
(Duan G R, Liu X Q. Delay-independent sufficient condition of linear time-delay systems [J]. Control and Decision, 1996, 11(3): 420-423.)

[46] Gu K Q. Discretized Lyapunov functional for uncertain systems with multiple time delay [J]. Int J of Control, 1997, 72(16): 1436-1445.

[47] Gu K Q, Niculescu S I. Additional dynamics in transformed time-delay systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 572-575.

[48] Park P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(4): 876-877.

[49] Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 253-270.

[50] Fridman E, Shaked U. Delay dependent stability and H_∞ control: Constant and time-varying delays [J]. Int J of Control, 2003, 76(1): 48-60.

[51] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for limear time-delay systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.

[52] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delays systems [J]. Int J of Control, 2001, 74(14): 1447-1455.

[53] Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity [J]. Automatica,

2005, 41(12): 2171-2176.

[54] Zhang X M, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays[J]. Automatica, 2005, 41(8), 1405-1412.

[55] He Y, Wu M, She J H, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(5): 828-832.

[56] Xu S Y, Lam J. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 384-387.

[57] Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, et al. Delay dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay[J]. Automatica, 2004, 40(1): 65-72.

[58] Jing X J, Tan D L, Wang Y C. An LMI approach to stability of systems with severe time-delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(7): 1192-1195.

[59] Kolmanovskii V B, Niculescu S I, Richard J P. On the Lyapunov-Krasovskii function for stability analysis of linear delay systems[J]. Int J of Control, 1999, 72(4): 374-384.

[60] Infante E F, Castelan W B. A Lyapunov functional for a matrix difference-differential equation[J]. J of Differential Equations, 1978, 29(3): 439-451.

[61] Gu K Q. A generalized discretization scheme of Lyapunov functional in the stability problem of linear uncertain time-delay systems[J]. Int J on Robust and Nonlinear Control, 1999, 9(1): 1-14.

[62] Gouaisbaut F, Peaucelle D. Delay-dependent robust stability of time delay systems[C]. Proc of 5th IFAC Symposium on Robust Control Design. Toulouse, 2006: 5-7.

[63] Haddad W M, Bernstein D S. Parameter-dependent Lyapunov functions and the Popov criterion in robust analysis and synthesis[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(3): 536-543.

[64] Gahinet P, Apkarian P, Chilali M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 436-442.

[65] Feron E, Apkarian P, Gahinet P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(7): 1041-1046.

[66] Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. Systems & Control Letters, 1999, 37(4): 261-265.

[67] Lin C, Wang Q G, Lee T H. A less conservative robust stability test for linear uncertain time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(1): 87-91.

[68] Papachristodoulou A, Peet M, Lall S. Constructing Lyapunov-Krasovskii functionals for linear time delay systems[C]. Proc of American Control Conf. Portland, 2005, 4: 2845-2850.

[69] Parrilo Pablo A. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization[D]. California Institute of Technology, 2000.

[70] Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments[J]. SIAM J on Optimization, 2001, 11(3): 796-817.

[71] Henrion D, Garulli A. Positive polynomials in control[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

[72] Zhang D M, Yu L. Equivalence of some stability criteria for linear time-delay systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007.

[73] Xu S Y, Lam J. On equivalence and efficiency of certain stability criteria for time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(1): 95-101.

[74] Suplin V, Fridman E, Shaked U. A projection approach to H_∞ control of time-delay systems[C]. Proc of 43th Decision and Control Conf. Bahamas, 2004: 4548-4553.

[75] Gouaisbaut F, Peaucelle D. A note on stability of time delay systems[C]. Proc of ROCOND. Toulouse, 2006: 5-7.

[76] Gouaisbaut F, Peaucelle D. Stability of time-delay systems with non-small delay[C]. Proc of 45th Decision and Control Conf. San Diego, 2006: 840-845.