

文章编号: 1001-0920(2008)08-0888-06

一类通讯受限不确定网络控制系统鲁棒 H 滤波

夏红伟, 马广程, 王常虹, 马 闯
(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对一类通讯受限的不确定网络控制系统, 研究了鲁棒 H 滤波器设计问题. 通过引入两个附加的松弛矩阵使 Lyapunov 矩阵和系统矩阵得到分离, 得到了一个新的具有更低保守性的鲁棒 H 性能判据, 并基于该判据设计了系统的鲁棒 H 滤波器. 当将其应用于具有凸多面体不确定性的网络控制系统时可以得到和系统不确定性相关联的 Lyapunov 函数, 有效降低了设计的保守性. 数值算例验证了所提出算法的可行性和优越性.

关键词: 网络控制系统; 离散系统; 鲁棒滤波; 参数依赖

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust H filtering for a class of uncertain networked control systems with limited communication

XIA Hong-wei, MA Guang-cheng, WANG Chang-hong, MA Chuang

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: XIA Hong-wei, E-mail: simonxhw@163.com)

Abstract: The problem of robust filtering is studied for networked control systems with limited bandwidth and polytopic uncertainties. Through introducing two slack matrices for separation between the systems matrices and the Lyapunov matrices, a new H performance criterion with a less conservativeness is obtained, which is used to design a robust H filter. By applying the filter on polytopic uncertain system, the vertex-dependent Lyapunov functions can be adopted to deliver a less conservative result. A numerical example is employed to illustrate the effect of the proposed approach.

Key words: Networked control system; Discrete-time system; Robust filtering; Parameter-dependent

1 引 言

网络控制系统(NCS),是指传感器、控制器、执行器等通过实时网络构成闭环反馈的控制系统,它是一种分布式控制结构,具有全开放、安装维护简单、可靠、灵活及控制资源共享等优点^[1-4].控制回路中通信网络的引入,也带来了一些问题,最明显的是有限的网络资源和控制系统的实时性要求之间的矛盾,这样网络控制系统的性能不仅取决于系统控制算法的设计,还取决于系统网络资源的调度^[3-7].

针对 NCS 的建模与稳定性分析^[1,3,6]、网络诱导时延补偿以及丢包处理^[2,7]等方面的研究已经取得了很多有价值的成果,相关内容可以参见文献[1-7]及其参考文献.针对 NCS 滤波问题的理论研究尚属起步阶段,但也得到了许多重要成果^[8-12].文献[9]研究了一类具有随机时滞通讯受限系统的鲁棒

H 滤波问题,得到了基于 LMI 的设计准则.文献[12]针对一类时变异步通讯网络控制系统,研究了最小方差状态估计问题.

本文研究一类通讯受限 NCS 的鲁棒 H 滤波问题,目的是设计一个优化的通讯序列和滤波器使滤波系统渐近稳定并且满足一定的鲁棒 H 性能指标.首先针对具有确定通讯序列的 NCS,在文献[10]研究成果的基础上,利用通讯序列^[12-14]的概念,将网络控制系统的滤波问题转化为一类周期系统的滤波问题,得到了一个新的具有更低保守性的鲁棒 H 性能判据,并基于该判据设计了系统的鲁棒 H 滤波器,通过启发式搜索算法得到系统通讯序列的一个优化解.文章最后以一个数值算例验证了所提出算法的可行性和优越性.

收稿日期: 2006-10-30; 修回日期: 2007-04-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60504008).

作者简介: 夏红伟(1979—),男,山东平度人,博士生,从事鲁棒控制、智能控制理论的研究;王常虹(1961—),男,辽宁鞍山人,教授,博士生导师,从事智能控制、鲁棒控制理论等研究.

2 问题描述

本文研究的基于网络的滤波系统结构如图 1 所示. 假设系统控制对象的状态方程描述如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k), \\ z(k) = Hx(k) + Jw(k). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(k) \in R^n$ 为系统状态向量, $w(k) \in R^p$ 为能量有界的噪声输入, $y(k) \in R^r$ 为系统测量输出, 而 $z(k) \in R^q$ 为需要估计的信号. 假定不确定性系统矩阵 A, B, C, D, H, J 可以表达为若干个顶点矩阵的凸组合, 即

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ H & J \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \\ H_i & J_i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ 为单纯形, 有

$$\alpha = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) : \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

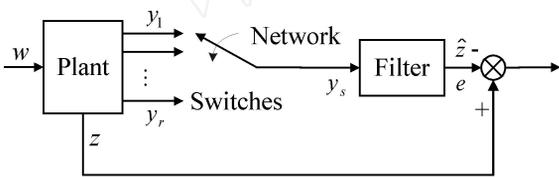


图 1 基于网络的滤波系统框图

控制对象由分布式子系统组成, 通过网络和滤波器连接, 滤波器周期采样. 假设通讯网络带宽有限而采用分时复用技术^[10], 这样滤波器不能同时得到控制对象的所有输出状态. 为便于分析, 本文假定滤波器每个采样周期只和一个子系统通讯, 从而只能得到一个子系统的信息, 并且假定在一个采样周期内总是能够完成一次通讯. 为描述通讯网络中这种多路传输特性, 定义如下 r 个切换向量^[10]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [1 \ 0 \ \dots \ 0], \\ \alpha_2 &= [0 \ 1 \ \dots \ 0], \\ &\dots \\ \alpha_r &= [0 \ 0 \ \dots \ 1]. \end{aligned} \quad (3)$$

切换向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 是 $1 \times r$ 矩阵, 其第 i 个元素为 1, 其余元素均为 0, r 是 NCS 子系统的个数. 结合上面的分析可将滤波系统得到的通讯信息描述为 $y_i(k) = \alpha_i y(k)$, 其中 $y_i(k)$ 是第 i 个子系统的输出.

基于上面的分析并结合通讯序列的概念, 滤波系统将按照预定的通讯序列和控制对象进行通讯,

该通讯序列可用一个 N - 周期的序列 s_k 来描述^[10], 其中 $s_k = \{1, 2, \dots, r\}$ 表示序列的第 k 个元素, 且 $s_k = s_{k+N}, \forall k \in \mathbb{Z}$. 由此将通讯受限 NCS 的滤波问题转化为一类周期系统滤波器设计问题.

构造如下形式的周期滤波器:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_k x(k) + B_k y_s(k), \\ z(k) = H_k x(k) + J_k y_s(k). \end{cases} \quad (4)$$

式中: $x(k) \in R^n$ 为滤波器的状态, $z(k) \in R^q$ 为 $z(k)$ 的估计信号, $y_s(k) = s_k y(k)$ 是传送到滤波器的控制对象的状态信息, 其中 s_k 表示序列的第 k 个元素. 注意该周期滤波器和通讯序列的周期相同, 并且滤波器的系统矩阵 A_k, B_k, H_k, J_k 也是 N - 周期的, 即

$$\begin{aligned} A_{k+N} &= A_k, \quad B_{k+N} = B_k, \\ H_{k+N} &= H_k, \quad J_{k+N} = J_k. \end{aligned} \quad (5)$$

选取状态变量

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= [x^T(k) \quad x^T(k)]^T, \\ \bar{z}(k) &= z(k) - \hat{z}(k), \end{aligned}$$

则由式(1)和(4)可以得到滤波误差系统的状态方程为

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A_{sk} \bar{x}(k) + B_{sk} w(k), \\ \bar{z}(k) = C_{sk} \bar{x}(k) + D_{sk} w(k). \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$A_{sk} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_k s_k C & A \end{bmatrix}, \quad B_{sk} = \begin{bmatrix} B \\ B_k s_k D \end{bmatrix},$$

$$C_{sk} = [H - J_k s_k C \quad -H_k],$$

$$D_{sk} = J - J_k s_k D. \quad (7)$$

显然, 滤波误差系统(6)也是以 s_k 为通讯序列的 N - 周期系统.

本文所要研究的问题可以描述为: 给定通讯受限不确定网络控制系统(1), 在不确定性满足式(2)的情况下, 设计形如式(4)的滤波器, 使闭环系统(6)渐近稳定并具有给定的 H 性能 ($\gamma > 0$). 也就是说, 在零初始条件下, 对于任何非零的噪声输入 $w(k) \in l_2[0, +\infty)$, 滤波误差系统输出满足 $\|\bar{z}(k)\|_2 \leq \gamma \|w(k)\|_2$.

本文的推导过程中用到下面的引理:

引理 1 (Schur 补定理) 对于对称阵 $L =$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{bmatrix},$$

则下列陈述等价:

- 1) $L < 0$;
- 2) $L_{11} < 0, L_{22} - L_{12}^T L_{11}^{-1} L_{12} < 0$;
- 3) $L_{22} < 0, L_{11} - L_{12} L_{22}^{-1} L_{12}^T < 0$. (8)

引理 2^[13] N - 周期系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A_k x(k) + B_k w(k), \\ z(k) = C_k x(k) + D_k w(k) \end{cases} \quad (9)$$

渐近稳定并具有 H 性能 ($\gamma > 0$), 当且仅当存在 N 周期的正定矩阵 $P_k (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -P_{k+1} & P_{k+1}A_k & P_{k+1}B_k & 0 \\ A_k^T P_{k+1} & -P_k & 0 & C_k^T \\ B_k^T P_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I & D_k^T \\ 0 & C_k & D_k & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

3 主要结果

基于引理 2, 下面给出一个新的 H 性能准则:

定理 1 N -周期滤波误差系统(9) 渐近稳定并具有 H 性能 ($\gamma > 0$), 当且仅当存在 N -周期的正定矩阵 P_k 和矩阵 $F_k, G_k (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 2 & 3 & * & * & * \\ A_k^T F_{k+1} & A_k^T G_{k+1} & -P_k & * & * \\ B_k^T F_{k+1} & B_k^T G_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & 0 & C_k & D_k & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

式中: 符号“*”表示矩阵对称位置元素的转置(文中下同), 并有

$$\begin{aligned} 1 &= -3P_{k+1} + F_{k+1} + F_{k+1}^T, \\ 2 &= P_{k+1} - F_{k+1} + G_{k+1}^T, \\ 3 &= -G_{k+1} - G_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

证明 根据 Schur 补定理, 式(10) 等价于下式:

$$\begin{bmatrix} -P_{k+1} & * & * \\ A_k^T P_{k+1} & -P_k & * \\ B_k^T P_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_k^T \\ D_k^T \end{bmatrix} I [0 \quad C_k \quad D_k] < 0. \quad (13)$$

注意到式(13) 的严格性, 总可以找到一个正的常数, 使下式成立:

$$\begin{bmatrix} -P_{k+1} & * & * \\ A_k^T P_{k+1} & -P_k & * \\ B_k^T P_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_k^T \\ D_k^T \end{bmatrix} I [0 \quad C_k \quad D_k] + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_{k+1} \\ A_k^T P_{k+1} \\ B_k^T P_{k+1} \end{bmatrix} P_{k+1}^{-1} [P_{k+1} \quad P_{k+1}A_k \quad P_{k+1}B_k] < 0, \quad (14)$$

整理得

$$\begin{bmatrix} -P_{k+1} & & & & \\ A_k^T P_{k+1} & -P_k & & & \\ B_k^T P_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I & & \\ & & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{k+1} & 0 \\ A_k^T P_{k+1} & C_k^T \\ B_k^T P_{k+1} & D_k^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & P_{k+1} & 0 \\ 0 & I & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{k+1} & 0 \\ A_k^T P_{k+1} & C_k^T \\ B_k^T P_{k+1} & D_k^T \end{bmatrix}^T < 0. \quad (15)$$

根据 Schur 补定理, 式(15) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P_{k+1} & P_{k+1}A_k & P_{k+1}B_k & P_{k+1} & 0 \\ A_k^T P_{k+1} & -P_k & 0 & A_k^T P_{k+1} & C_k^T \\ B_k^T P_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I & B_k^T P_{k+1} & D_k^T \\ P_{k+1} & P_{k+1}A_k & P_{k+1}B_k & -2P_{k+1} & 0 \\ 0 & C_k & D_k & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

取 $P_{k+1} = G_{k+1} = G_{k+1}^T, P_{k+1} = F_{k+1} = F_{k+1}^T$, 代入式(16), 适当整理并且定义 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 如式(12) 所述, 即可得到式(11). 另一方面, 因为矩阵

$$= \begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_k^T & I & 0 & 0 \\ 0 & B_k^T & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (17)$$

行满秩, 将式(11) 分别左乘、右乘矩阵 $\begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_k^T & I & 0 & 0 \\ 0 & B_k^T & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_k^T & I & 0 & 0 \\ 0 & B_k^T & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$, 整理即得式(10). 综合上面的分析, 式(10) 和(11), (12) 是等价的, 从而定理 1 得证.

根据上面的分析, 对比式(6) 和式(9), 由凸多面体不确定系统的内在特性, 可以得到下面的针对不确定系统的鲁棒性能准则:

推论 1 N -周期滤波误差系统(6) 渐近稳定并具有 H 性能 ($\gamma > 0$), 当且仅当存在 N 周期的正定矩阵 $P_{k,i} (i = 1, 2, \dots, r)$ 和矩阵 $F_k, G_k (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 满足下面的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 2 & 3 & * & * & * \\ A_{ski}^T F_{k+1} & A_{ski}^T G_{k+1} & -P_{k,i} & 0 & * \\ B_{ski}^T F_{k+1} & B_{ski}^T G_{k+1} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & 0 & C_{ski} & D_{ski} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} A_{ski} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{kSk} C_i & A_i \end{bmatrix}, \quad B_{ski} = \begin{bmatrix} B_i \\ B_{kSk} D_i \end{bmatrix}, \\ C_{ski} &= [H_i - D_{kSk} C_i - C_k], \\ D_{ski} &= J_i - D_{kSk} D_i, \\ \alpha_1 &= -3P_{k+1,i} + F_{k+1} + F_{k+1}^T, \\ \alpha_2 &= P_{k+1,i} - F_{k+1} + G_{k+1}^T, \\ \alpha_3 &= -G_{k+1} - G_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (19)$$

注 1 将引理 2 推广到凸多面体不确定周期系统时,要求对于系统的每个顶点 i , 存在唯一的正定矩阵 P_k 满足相应的线性矩阵不等式. 对于确定性系统而言,引理 2 和定理 1 等价. 两者的差别在于定理 1 通过引入两个附加的松弛矩阵 F_k 和 G_k , 消除了引理 2 中 Lyapunov 矩阵与系统矩阵之间的耦合, 当将其应用于凸多面体不确定系统时, 可以得到和系统不确定性相关联的 Lyapunov 函数. 即对于凸多面体的每个顶点 i , 允许有不同的正定矩阵满足要求(见推论 1). 这是与传统的二次稳定条件的主要区别, 这种特性使得将该条件用于不确定系统的鲁棒稳定性分析及综合时, 可以得到保守性较低的结果.

注意到式(18), (19) 并不是关于变量 $P_{k,i}, F_k, G_k$ 的线性矩阵不等式, 因为同时存在 F_{k+1} 和 A_{ski} 以及 G_{k+1} 和 A_{ski} 的乘积. 受文献[11]的启发, 下面给出一种求次最优解的方法. 取

$$F_k = {}_k G_k, \quad {}_k = \text{diag}({}_{1k} I_n, {}_{2k} I_n),$$

其中 ${}_{1k}, {}_{2k}$ 是实常数, 则式(18), (19) 可以整理并重新描述为

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 2 & 3 & * & * & * \\ A_{ski}^T {}_{k+1} G_{k+1} & A_{ski}^T G_{k+1} & - P_{k,i} & * & * \\ B_{ski}^T {}_{k+1} G_{k+1} & B_{ski}^T G_{k+1} & 0 & - {}^2 I & * \\ 0 & 0 & C_{ski} & D_{ski} & - I \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} 1 &= - 3 P_{k+1,i} + {}_{k+1} G_{k+1} + G_{k+1}^T {}_{k+1}, \\ 2 &= P_{k+1,i} - F_{k+1} + G_{k+1}^T, \\ 3 &= - G_{k+1} - G_{k+1}^T, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (21)$$

结合上面的分析, 下面的定理给出了凸多面体不确定 N - 周期滤波误差系统渐近稳定并且具有一定的鲁棒 H 性能的充分条件.

定理 2 滤波误差系统(6) 渐近稳定并具有 H 性能 (> 0), 当且仅当存在 N - 周期的正定矩阵 $P_{k,11,i}, P_{k,22,i}$ 和矩阵 $P_{k,12,i}, X_k, U_k, R_k, \bar{A}_{kf}, \bar{B}_{kf}, \bar{C}_{kf}, \bar{D}_{kf}$ 以及实数 ${}_{1k}, {}_{2k}$, 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} N_1 & * & * & * & * \\ N_2 & N_8 & * & * & * \\ N_3 & N_9 & N_{13} & * & * \\ N_4 & N_{10} & N_{14} & N_{18} & * \\ N_5 & N_{11} & N_{15} & A_i^T R_k & - P_{k,11,i} \\ N_6 & N_{11} & N_{16} & A_i^T R_k & - P_{k,12,i}^T \\ N_7 & N_{12} & N_{17} & B_i^T R_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{19} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ - P_{k,22,i} & * & * \\ 0 & - {}^2 I & * \\ N_{20} & N_{21} & - I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

式中

$$\begin{aligned} N_1 &= - 3 P_{k+1,11,i} + {}_{1k} X_k + {}_{1k} X_k^T, \\ N_2 &= - 3 P_{k+1,12,i}^T + {}_{1k} X_k + {}_{2k} U_k^T + {}_{1k} R_k^T, \\ N_3 &= P_{k+1,11,i} + X_k^T - {}_{1k} X_k, \\ N_4 &= P_{k+1,12,i}^T + R_k^T - {}_{1k} X_k - {}_{2k} U_k^T, \\ N_5 &= {}_{1k} A_i^T X_k + {}_{2k} C_i^T S_k \bar{B}_{kf}^T, \\ N_6 &= {}_{1k} A_i^T X_k + {}_{2k} C_i^T S_k \bar{B}_{kf}^T + {}_{2k} \bar{A}_{kf}^T, \\ N_7 &= {}_{1k} B_i^T X_k + {}_{2k} D_i^T S_k \bar{B}_{kf}^T, \\ N_8 &= - 3 P_{k+1,22,i} + {}_{1k} R_k + {}_{1k} R_k^T, \\ N_9 &= P_{k+1,12,i} + X_k^T + U_k - {}_{1k} R_k, \\ N_{10} &= P_{k+1,22,i} + R_k^T - {}_{1k} R_k, \\ N_{11} &= {}_{1k} A_i^T R_k, \quad N_{12} = {}_{1k} B_i^T R_k, \\ N_{13} &= - X_k - X_k^T, \quad N_{14} = - R_k^T - X_k - U_k^T, \\ N_{15} &= A_i^T X_k + C_i^T S_k \bar{B}_{kf}^T, \\ N_{16} &= A_i^T X_k + C_i^T S_k \bar{B}_{kf}^T + \bar{A}_{kf}^T, \\ N_{17} &= B_i^T X_k + D_i^T S_k \bar{B}_{kf}^T, \\ N_{18} &= - R_k - R_k^T, \quad N_{19} = H_i - \bar{D}_{kf} S_k C_i, \\ N_{20} &= H_i - \bar{D}_{kf} S_k C_i - \bar{C}_{kf}, \\ N_{21} &= J_i - \bar{D}_{kf} S_k D_i, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (23)$$

且满足要求的滤波器(4) 的参数矩阵可由下式构造:

$$\begin{aligned} A_k &= U_k^{-1} \bar{A}_{kf}, \quad B_k = U_k^{-1} \bar{B}_{kf}, \\ H_k &= \bar{C}_{kf}, \quad J_k = \bar{D}_{kf}. \end{aligned} \quad (24)$$

证明 由式(22), (23) 可知

$$\begin{bmatrix} X_k + X_k^T & R_k + X_k^T + U_k \\ R_k^T + X_k + U_k^T & R_k + R_k^T \end{bmatrix} > 0, \quad (25)$$

并且 X_k, R_k 非奇异. 构造矩阵

$$\begin{aligned} G_k &= \begin{bmatrix} X_k & X_{k1} \\ X_{k2} & X_{k3} \end{bmatrix}, \quad G_k^{-1} = \begin{bmatrix} R_k^{-1} & Y_{k1} \\ Y_{k2} & Y_{k3} \end{bmatrix}, \\ {}_k &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad {}_{k1} = \begin{bmatrix} I & R_k^T \\ 0 & Y_{k2} \end{bmatrix}, \\ {}_{k2} &= \begin{bmatrix} X_k & I \\ X_{k2} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

则有 $G_k {}_{k1} = {}_{k2}$.

不失一般性, 在此假设 X_{k2}, Y_{k2} 是非奇异的, 那么 $J_k = {}_{k1} {}_k$ 也是非奇异的. 注意到下面的关系:

$$\begin{aligned}
 B_{ki}^T G_{k+1} \quad k &= [B_i^T X_k + D_i^T S_k B_{kf}^T X_{k2} \quad B_i^T R_k], \\
 G_{k+1} \quad k &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ R_k^T A_i & R_k^T A_i \end{bmatrix}, \\
 C_{ki} \quad k &= [L_i - D_k S_k C_i \quad 2], \\
 P_{k+1,i} \quad k &= \begin{bmatrix} P_{k+1,11,i} & P_{k,12,i} \\ P_{k+1,12,i}^T & P_{k+1,22,i} \end{bmatrix}, \\
 P_{k,i} \quad k &= \begin{bmatrix} P_{k,11,i} & P_{k,12,i} \\ P_{k,12,i}^T & P_{k,22,i} \end{bmatrix}, \\
 G_{k+1} \quad k &= \begin{bmatrix} X_k & R_k \\ X_k + R_k^T Y_{k2}^T X_{k2} & R_k \end{bmatrix}, \\
 G_{k+1} \quad k &= \begin{bmatrix} X_k^T & X_k^T + X_{k2}^T Y_{k2} R_k \\ R_k^T & R_k^T \end{bmatrix}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 1 &= X_k^T A_i + X_{k2}^T B_k S_k C_i + X_{k2}^T A_k Y_{k2} R_k, \\
 2 &= L_i - D_k S_k C_i - C_k Y_{k2} R_k, \\
 3 &= X_k^T A_i + X_{k2}^T B_k S_k C_i. \quad (28)
 \end{aligned}$$

定义 $\tilde{J}_k = \text{diag}(J_k, J_k, J_k, I, I)$, 以及

$$\begin{aligned}
 U_k &= X_{k2}^T Y_{k2} R_k, \quad \bar{A}_{kf} = X_{k2}^T A_k Y_{k2} R_k, \\
 \bar{B}_{kf} &= X_{k2}^T B_k, \quad \bar{C}_{kf} = C_k Y_{k2} R_k, \quad \bar{D}_{kf} = D_k. \quad (29)
 \end{aligned}$$

由式(20) 分别左乘、右乘矩阵 $\tilde{J}_k^T, \tilde{J}_k$ 就可以得到式(22) 和(23); 同时注意到 \tilde{J}_k 是非奇异的, 则由式(22) 分别左乘、右乘矩阵 $\tilde{J}_k^{-T}, \tilde{J}_k^{-1}$, 适当整理即可得到式(20) 和(21). 从而定理得证.

同时由下面的关系可以得到问题的一个可行解如式(24) 所述:

$$\bar{C}_{kf} R_k^{-1} Y_{k2}^1 (sI - X_{k2}^T \bar{A}_{kf} R_k^{-1} Y_{k2}^1)^{-1} X_{k2}^T \bar{B}_{kf} + \bar{D}_{kf} = \bar{C}_{kf} (sI - U_k^{-1} \bar{A}_{kf})^{-1} U_k^{-1} \bar{B}_{kf} + \bar{D}_{kf}. \quad (30)$$

注2 从定理2 可以看出, 系统的 H 优化解不仅取决于周期滤波器的设计, 还与通讯序列的选取有密切的关系. 对于一个给定的通讯序列, 定义 $o(s_k, A_k, B_k, H_k, J_k)$ 为可达的 H 滤波性能. 从而网络化系统的通讯调度策略和滤波系统的 H 性能可以通过下面的优化问题来求解^[10]:

$$\begin{aligned}
 \min_{s_k, A_k, B_k, H_k, J_k} o(s_k, A_k, B_k, H_k, J_k), \\
 \text{s. t. 式(22) } \sim \text{(24)}.
 \end{aligned}$$

注意上述问题并不是关于 $(s_k, A_k, B_k, H_k, J_k)$ 的线性矩阵不等式, 很难直接求解. 一种可行的求解方法是使用穷举法^[14], 但这种方法存在很多缺点, 如当子系统的个数较多时搜索时间太长等. 本文采用文献[10] 中介绍的启发式搜索方法, 经修改后的启发式搜索算法简述如下^[10]:

1) 设定 $s_0 = \{1, 2, \dots, r\}$, 记 \cdot 为无通讯受限情况下(即 $y_s(k) = y(k)$) 系统的 H 性能. 对于给定的 $\epsilon > 0$, 如果 $0 - \epsilon < \cdot$, 则通讯序列取为 s_0

且周期为 r ; 否则跳到 2).

2) 记上一步得到的通讯序列为 s_{i-1} , H 性能为 \cdot_{i-1} , 分别将 s_{i-1} 中最新的切换向量 j 设为 0, 得到一个新的序列 $s_{i-1}(j), j = 1, 2, \dots, r$. 计算新的 H 性能并记为 $H(j)$, 对比可得一个最差的性能 $H(j_0)$ 且对应的向量为 $j_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, r\}$. 将 j_0 加入到 s_{i-1} 中, 由此得到新的通讯序列 s_i 和相应的 H 性能 \cdot_i .

3) 对于给定的 $\epsilon > 0$, 如果 $0 - \epsilon < \cdot$ 或 $\cdot - \epsilon > \cdot_{i-1}$ 或 $\cdot > \cdot_{i-1}$, 则停止运算并记系统通讯序列为 $s^* = s_i$; 否则跳到 2).

另外, 对于确定了通讯调度序列的不确定 NCS, 有下面的结论:

推论2 对于确定了通讯调度序列的不确定滤波误差系统(6) 的一个优化解, 可以通过求解下面的凸优化问题得到:

$$\begin{aligned}
 \min_{P_{k,11,i}, P_{k,12,i}, P_{k,22,i}, R_k, X_k, U_k, \bar{A}_{kf}, \bar{B}_{kf}, \bar{C}_{kf}, \bar{D}_{kf}, 1_k, 2_k} \\
 \text{s. t. 式(22), (23), } i = 1, 2, \dots, r, \text{ with } \triangleq \epsilon^2. \quad (31)
 \end{aligned}$$

注3 对于给定的实常数 $1_k, 2_k$, 式(31) 是关于 $P_{k,11,i}, P_{k,12,i}, P_{k,22,i}, R_k, X_k, \bar{U}_k, \bar{A}_{kf}, \bar{B}_{kf}, \bar{C}_{kf}, \bar{D}_{kf}$ 的线性矩阵不等式, 因此可以用 Matlab 的 LMI 工具箱方便地求解. 剩下的问题是如何找到一个最优的 $1_k, 2_k$ 值, 而这可以通过 Matlab 的 `fminsearch` 命令来求解.

4 数值算例

为了验证本文提出的鲁棒滤波器设计方法的有效性, 考虑下面的不确定离散时间系统^[10]:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \\ 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} w(k), \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix} w(k), \\
 z(k) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] x(k) + 0.2 w(k).
 \end{aligned}$$

不确定性满足 $\| \cdot \| \leq 0.1$, 切换向量选为 $\cdot_1 = [1 \quad 0]$, $\cdot_2 = [0 \quad 1]$. 初始通讯序列选为 $\{1, 2\}$, 由本文提出的算法, 结合启发式搜索方法, 可以得到如表 1 所示的结果.

表 1 搜索数据结果

序列	范数	$H(\cdot_1)$	$H(\cdot_2)$
1 $\{1, 2\}$	1.761 9	1.811 1	1.767 2
2 $\{1, 2, 1\}$	1.756 4	1.939 8	1.783 6
3 $\{1, 2, 1, 1\}$	1.768 3		

根据表 1 中的结果可以将通讯序列确定为 $\{1, 2, 1\}$; 同时可以看出在一个周期内, 第 1 个 2 维的子系统得到的通讯机会较多时, 系统的性能比较好. 这是因为第 1 个 2 维的子系统比第 2 个 2 维的子系统更加不稳定, 这样在同一个周期内, 第 1 个子系统得到更多的控制时, 系统的性能就较好. 但是如果第 1 个子系统得到过多的控制机会, 第 2 个子系统的机会就会相应地减少, 当少到一定程度时(如第 3 步中只有 25%), 系统的性能就因为第 2 个子系统没有得到足够的控制而变差. 上面的结果验证了本文的算法的可行性和有效性.

5 结 论

本文研究了一类通讯受限的不确定网络控制系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题, 在文献[10]的基础上, 得到了具有更低保守性的鲁棒 H_∞ 滤波器的存在条件及设计方法, 与文献[13]得到的结果相比, 本文算法具有更大的设计自由度, 便于系统的综合. 通过一个算例验证了所提出算法的有效性. 所得到的结果可以看作是对二次稳定结果的改进, 能够有效降低设计的保守性. 下一步的工作是将本文的研究结果推广到具有随机时延的网络控制系统.

参考文献(References)

- [1] Ma C L, Fang H J. Research on mean square exponential stability of networked control systems with multi-step delay[J]. Applied Mathematical Modeling, 2006, 30(9): 941-950.
- [2] Li Z, Fang H J. A novel controller design and evaluation for networked control systems with time-variant delays[J]. J of the Franklin Institute, 2006, 343(2): 161-167.
- [3] Hu S S, Zhu Q X. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay [J]. Automatica, 2003, 39(11): 1877-1884.
- [4] Zhang L, Dimitrios H V. Communication and control co-design for networked control systems [J]. Automatica, 2006, 42(6): 953-958.
- [5] 邱占芝, 张庆灵, 刘明. 有时延和数据包丢失的网络控制系统控制器设计[J]. 控制与决策, 2006, 21(6): 625-631.
- (Qiu Z Z, Zhang Q L, Liu M. Controller design for networked control systems with time-delay and data packet dropout[J]. Control and Decision, 2006, 21(6): 625-631.)
- [6] 刘玉忠, 于海斌. 具有大时延的网络控制系统的稳定性分析[J]. 控制与决策, 2004, 19(10): 1133-1136. (Liu Y Z, Yu H B. Analysis of stability for networked control systems with large delays [J]. Control and Decision, 2004, 19(10): 1133-1136.)
- [7] 关守平, 孙兰香. 长延时网络控制系统的建模与控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(3): 311-314. (Guan S P, Sun L X. Modeling and control of networked control systems with long delay[J]. Control and Decision, 2006, 21(3): 311-314.)
- [8] Zheng Y, Fang H J, Wang H O. Takagi-Sugeno fuzzy-model-based fault detection for networked control systems with markov delays [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 2006, 36(4): 924-929.
- [9] Wang Z D, Yang F W, Daniel W C, et al. Robust H_∞ filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(7): 2579-2587.
- [10] Lu L L, Xie L H, Fu M Y. Optimal control of robust networked systems with limited communication: A combined heuristic and convex optimization approach [C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui, 2003: 1194-1199.
- [11] Xie L H, Lu L L, Zhang D, et al. Robust filtering for uncertain discrete-time systems: An improved LMI approach[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui, 2003: 906-911.
- [12] Alexey S M, Andrey V S. The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(4): 670-676.
- [13] Bittanti S, Cuzzola F A. An LMI approach to periodic discrete-time unbiased filtering [J]. Systems and Control Letters, 2001, 42(1): 21-35.
- [14] Rehinder H, Sanfridson M. Scheduling of a limited communication channel for optimal control [J]. Automatica, 2004, 40(3): 491-500.