

文章编号: 1001-0920(2008)09-1025-05

分数阶混沌系统同结构与异结构广义同步

闵富红^{1,2}, 王执铨²

(1. 南京师范大学 电气与自动化工程学院, 南京 210042; 2. 南京理工大学 自动化系, 南京 210094)

摘要: 基于分数阶拉普拉斯变换理论, 提出设计合适的新型非线性反馈控制器, 分别实现分数阶混沌系统的同结构广义同步和异结构广义同步. 以分数阶 Liu 混沌系统和分数阶 L ü 混沌系统为例进行数值仿真, 仿真结果表明了该方法的有效性. 该方法灵活且适用范围广, 具有潜在的应用前景.

关键词: 分数阶; 混沌系统; 广义同步

中图分类号: TP391.9 **文献标识码:** A

Generalized synchronization for fractional-order chaotic systems with same or different structure

MIN Fu-hong^{1,2}, WANG Zhi-quan²

(1. School of Electronic Engineering and Automation, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China; 2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: MIN Fu-hong, E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn)

Abstract: Based on Laplace transformation theory, the generalized synchronization of the fractional order chaotic systems with the same or different structure are studied. Two new different nonlinear controllers are designed for synchronizing response system and drive system. The fractional Liu system and the fractional L ü system are taken as examples. Numerical simulations show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Fractional order; Chaotic system; Generalized synchronization

1 引言

分数阶微积分把传统整数阶微积分的阶次推广到分数甚至复数领域, 因而极大地拓展了传统微积分的概念. 分数阶模型比整数阶模型更能反映动力系统的性能. 近年来, 越来越多的科技工作者对分数阶混沌系统的研究产生了兴趣, 并用分数阶方程描述动力系统, 从而出现了一些分数阶混沌^[1-5]. 例如: 分数阶 Jerk 混沌系统^[1]、分数阶 Chen 混沌系统^[3]、分数阶 Liu 混沌系统^[4]、分数阶 L ü 混沌系统^[5]等.

将分数阶混沌应用于保密通讯、信号处理等领域, 由于系统模型自身的复杂性, 会比整数阶混沌系统具有更强的保密性和抗破译能力, 因而分数阶混沌系统会有广泛的应用前景^[6-10]. 文献[6]利用单向线性耦合方法, 分别实现了分数阶蔡氏混沌系统和分数阶 Rossler 混沌系统的完全同步; 文献[7]利用驱动响应方法, 实现了分数阶统一混沌系统的完全

同步. 然而, 对于分数阶混沌系统广义同步的研究却少有报道.

本文设计新型的非线性控制器, 以实现同结构的两个分数阶 Liu 混沌系统的广义投影同步, 以及分数阶 Liu 混沌系统与分数阶 L ü 混沌系统异结构的广义投影同步. 利用拉普拉斯变换理论分析系统同步时的稳定性, 并通过数值仿真验证控制器的有效性.

2 问题描述与系统模型

考虑如下分数阶混沌系统:

$$\begin{cases} dx(t)/dt = f(x(t), t), \\ dy(t)/dt = g(y(t), t) + u(t, x, y). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t), y(t) \in R^n$ 为系统向量; f 和 g 为 $R^n \rightarrow R^n$ 的可微函数. 设系统(1)中第1式为驱动系统, 第2式为响应系统, $u(t, x, y)$ 为系统的控制输入, 令对角矩阵 $\bar{1} = \{1, \dots, 1\}$, 误差 $e = y - \bar{1}x$.

收稿日期: 2007-06-18; 修回日期: 2007-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174005, 60774060); 江苏省高新技术项目(BG2006042).

作者简介: 闵富红(1970—), 女, 江苏海安人, 讲师, 博士生, 从事混沌控制与同步、信号处理的研究; 王执铨(1939—), 男, 武汉人, 教授, 博士生导师, 从事动态大系统建模、混沌控制等研究.

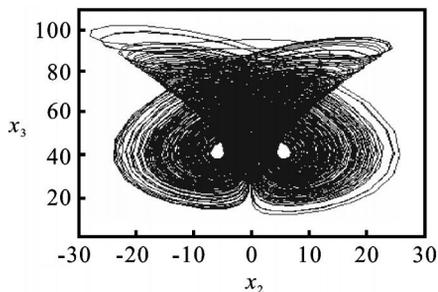
本文的目标是设计合适的非线性反馈控制器 u , 使得从不同初始值 x_0 和 y_0 出发, 系统满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$. 当 f 和 g 为相同的可微函数时, 实现两个初始值不同的同结构分数阶混沌系统的广义投影同步; 当 f 和 g 为不同的可微函数时, 实现异结构的两个分数阶混沌系统的广义投影同步.

Wang 等^[4] 提出的分数阶 Liu 混沌系统, 以及 Lü 等^[5] 提出的分数阶 Lü 混沌系统, 为研究分数阶混沌系统的同步和保密通信提供了新的领域, 具有潜在的应用前景.

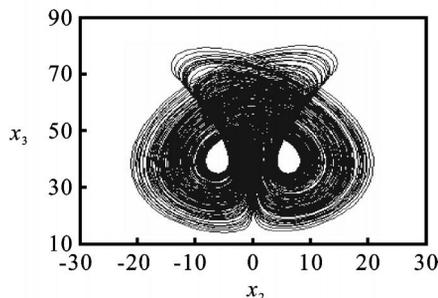
分数阶 Liu 混沌系统的数学模型^[4] 为

$$\begin{cases} dx_1/dt = a(x_2 - x_1), \\ dx_2/dt = bx_1 - px_1x_3, \\ dx_3/dt = -cx_3 + hx_1^2. \end{cases} \quad (2)$$

当取系统参数 $a = 10, b = 40, c = 2.5, p = 1, h = 4$ 时, 系统(2) 出现整数阶混沌. 取相同参数, 改变分数阶算子 α , 当 α 分别为 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 和 0.9 时, 系统(2) 都呈现分数阶混沌. 该分数阶混沌系统能产生混沌吸引子的最低阶数为 1.5, 如图 1 所示. 可见, 整数阶混沌吸引子与分数阶混沌吸引子在形状上也有不同之处.



(a) 整数阶Liu混沌吸引子



(b) $\alpha=0.9$ 时分数阶Liu混沌吸引子

图1 Liu 混沌系统

分数阶 Lü 混沌系统的数学模型^[5] 为

$$\begin{cases} dy_1/dt = l(y_2 - y_1), \\ dy_2/dt = qy_2 - y_1y_3, \\ dy_3/dt = y_1y_2 - my_3. \end{cases} \quad (3)$$

当取参数 $(l, m, q) = (36, 3, 20)$ 时, 系统呈现整数阶混沌吸引子. 改变分数阶算子 α , 取参数为 $(35, 3,$

28), 当算子 α 从 0.1 到 0.9 变化时, 系统(3) 都产生分数阶混沌. 该系统产生混沌吸引子的最低阶数为 0.3, 如图 2 所示.

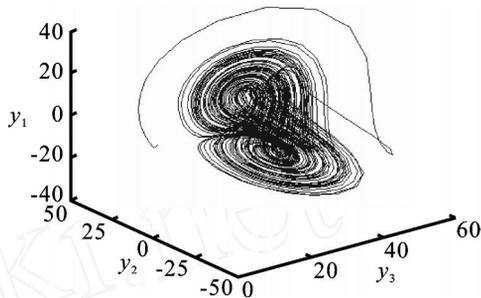


图2 $\alpha = 0.9$ 时分数阶Lü混沌系统

3 分数阶混沌系统的同结构广义同步

考虑分数阶 Liu 混沌系统的同结构广义投影同步, 设系统(2) 为驱动系统, 则受控系统为

$$\begin{cases} dz_1/dt = a(z_2 - z_1) + u_1, \\ dz_2/dt = bz_1 - pz_1z_3 + u_2, \\ dz_3/dt = -cz_3 + hz_1^2 + u_3. \end{cases} \quad (4)$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ 为非线性控制向量. 设向量误差为 $e_1 = z_1 - x_1, e_2 = z_2 - x_2, e_3 = z_3 - x_3$.

定理 1 选取如下非线性反馈控制器:

$$\begin{cases} u_1 = -ae_2, \\ u_2 = -ke_2 + p(z_1^2 - x_1^2), \\ u_3 = h(z_1^2 - x_1^2). \end{cases} \quad (5)$$

其中常数 $k > 0$. 则能实现驱动系统(2) 和响应系统(4) 对应的所有状态向量, 按不同比例渐近达到分数阶混沌系统广义投影同步.

注 1 这里设计的分数阶 Liu 混沌系统同结构广义同步非线性反馈控制器, 其实很简单且很灵活. 不妨令 $\alpha = 1$, 则控制器(5) 简化为 $u_1 = -ae_2, u_2 = -ke_2, u_3 = 0$. 此时成为线性耦合的单向控制器, 用它就能实现两个分数阶 Liu 混沌吸引子的完全同步. 常数 k 的选择也很灵活, 只要大于零即可, 但从工程上考虑, 不需要选择太大. 另外, 通过不断改变比例因子 k 的大小, 可实现两个初始值不同的分数阶 Liu 混沌吸引子对应的所有状态向量, 按不同比例进行同相位或反相位同步.

证明 将式(5) 代入式(4), 求得响应系统(4) 与驱动系统(2) 的误差方程

$$\begin{cases} de_1/dt = -ae_1, \\ de_2/dt = -ke_2 + be_1 - pe_1e_3 - px_1e_3 - px_3e_1, \\ de_3/dt = -ce_3 + he_1^2 + 2hx_1e_1. \end{cases} \quad (6)$$

根据分数阶拉氏变换^[7], 有

$$\begin{aligned} E_i(s) &= L(e_i(t)), \quad i = 1, 2, 3; \\ L(de_i/dt) &= sE_i(s) - s^{-1}e_i(0). \end{aligned}$$

对式(6) 两边进行拉氏变换,得到

$$\begin{cases} s E_1(s) - s^{-1} e_1(0) = - E_1(s), \\ s E_2(s) - s^{-1} e_2(0) = \\ - k E_2(s) + b E_1(s) - p E_1(s) E_3(s) - \\ p (L(x_1 e_3) + L(x_3 e_1)), \\ s E_3(s) - s^{-1} e_3(0) = \\ - c E_3(s) + h E_1^2(s) + 2h L(x_1 e_1). \end{cases} \quad (7)$$

根据拉氏变换终值定理,有

$$\begin{aligned} \lim_t e_1(t) &= \lim_s s E_1(s) = \lim_s \frac{s e_1(0)}{s+a} = 0, \\ \lim_t e_2(t) &= \lim_s s E_2(s) = \\ \lim_s \left[\frac{s e_2(0) + b s E_1(s) - p s E_1(s) E_3(s)}{s+k} \right] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{p (sL(x_1 e_3) + sL(x_3 e_1))}{s+k} \right] = \\ \lim_s \frac{-ps E_1(s) E_3(s) - p (sL(x_1 e_3) + sL(x_3 e_1))}{s+k}, \\ \lim_t e_3(t) &= \lim_s s E_3(s) = \\ \lim_s \frac{s e_3(0) + h s E_1^2(s) + 2h sL(x_1 e_1)}{s+c} = \\ \lim_s \frac{2h sL(x_1 e_1)}{s+c}. \end{aligned}$$

由于混沌系统的有界性,令常数 $M > 0$,使得混沌系统向量 $|x_1| < M, |x_3| < M$,则有

$$\begin{aligned} |L(x_1 e_3)| &< M |E_3(s)|, \\ |L(x_3 e_1)| &< M |E_1(s)|, \\ |L(x_1 e_1)| &< M |E_1(s)|. \end{aligned}$$

根据 $\lim_t e_1(t) = 0$, 则有 $\lim_t e_3(t) = 0$, 从而推出 $\lim_t e_2(t) = 0$.

根据以上分析,可知在非线性能量控制器(5)作用下,误差系统(7)在原点渐近平衡.这表明当时间趋于无穷时,初始值不同的两个分数阶 Liu 混沌系统渐近达到同结构广义投影同步.

下面依据文献[1]中近似误差为 2 dB 的 $1/s$ 逼近方式进行数值仿真.以分数阶算子 $\alpha = 0.9$ 为例,取控制器(5)中的常数 $k = 1$,比例因子 $\beta = 0.5$ 和 $\gamma = -1.5$,仿真结果分别如图 3 和图 4 所示.

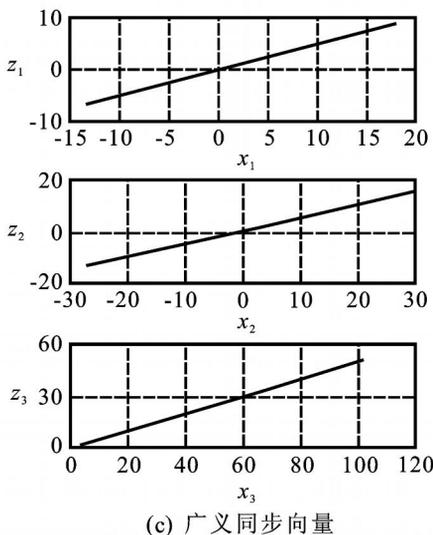
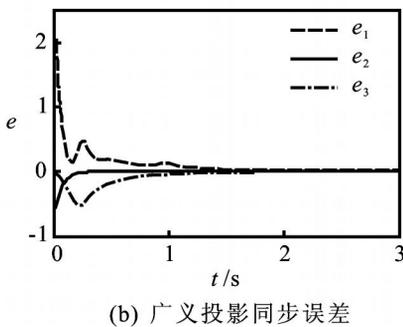
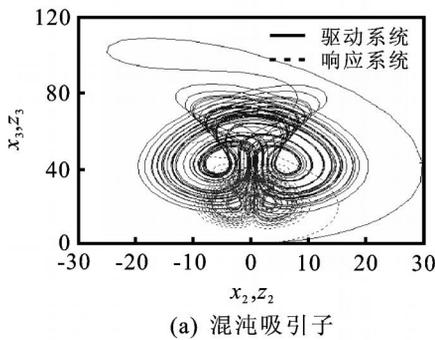


图 3 $\alpha = 0.5$ 时系统同结构同步仿真结果

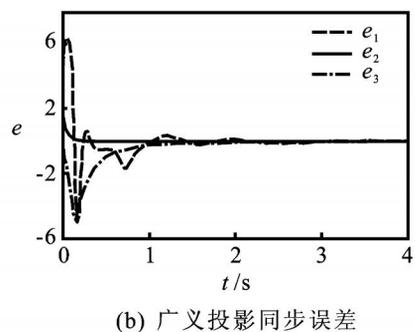
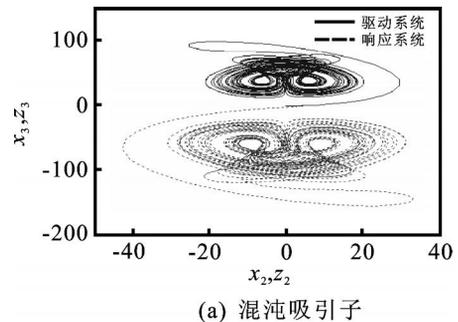


图 4 $\alpha = 1.5$ 时系统同结构同步仿真结果

由图可见,当 $\beta = 0.5$ 时,在时间 $t = 4s, z_1 = 0.5x_1, z_2 = 0.5x_2, z_3 = 0.5x_3$; 当 $\gamma = -1.5$ 时,在时间 $t = 5s, z_1 = -1.5x_1, z_2 = -1.5x_2, z_3 = -1.5x_3$. 可见,分数阶 Liu 混沌系统同结构广义同步速度快,误差曲线快速衰减.

4 分数阶混沌系统异结构广义同步

考虑分数阶 Liu 混沌系统和分数阶 Lü 混沌系统的异结构广义投影同步. 以系统 (3) 为驱动系统, 则受控的分数阶 Liu 混沌系统为

$$\begin{cases} dx_1/dt = a(x_2 - x_1) + u_1, \\ dx_2/dt = bx_1 - px_1x_3 + u_2, \\ dx_3/dt = -cx_3 + hx_1^2 + u_3. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ 为非线性控制向量. 令 $e_1 = x_1 - y_1, e_2 = x_2 - y_2, e_3 = x_3 - y_3$ 为广义同步时的向量误差.

定理 2 选取非线性反馈控制器

$$\begin{cases} u_1 = -ae_2 + (l - a)(y_2 - y_1), \\ u_2 = -ke_2 + (p^2 +)y_1y_3 - by_1 - qy_2, \\ u_3 = (c - m)y_3 - h^2y_1^2 + y_1y_2. \end{cases} \quad (9)$$

其中常数 $k > 0$. 则能实现驱动系统 (2) 和响应系统 (4) 对应的所有状态向量, 按比例渐近达到分数阶混沌系统异结构广义投影同步.

证明 将式 (9) 代入式 (8), 则响应系统 (8) 与驱动系统 (3) 的误差方程为

$$\begin{cases} de_1/dt = -ae_1, \\ de_2/dt = -ke_2 + be_1 - pe_1e_3 - py_1e_3 - py_3e_1, \\ de_3/dt = -ce_3 + he_1^2 + 2hy_1e_1. \end{cases} \quad (10)$$

对式 (10) 两边进行拉氏变换, 得到

$$\begin{cases} sE_1(s) - s^{-1}e_1(0) = -aE_1(s), \\ sE_2(s) - s^{-1}e_2(0) = -kE_2(s) + bE_1(s) - pE_1(s)E_3(s) - p(L(y_1e_3) + L(y_3e_1)), \\ sE_3(s) - s^{-1}e_3(0) = -cE_3(s) + hE_1^2(s) + 2hL(y_1e_1). \end{cases} \quad (11)$$

根据拉氏变换终值定理, 有

$$\begin{aligned} \lim_t e_1(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s e_1(0)}{s + a} = 0, \\ \lim_t e_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE_2(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-psE_1(s)E_3(s) - p(sL(y_1e_3) + sL(y_3e_1))}{s + k}, \\ \lim_t e_3(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2hsL(y_1e_1)}{s + c}. \end{aligned}$$

鉴于混沌系统的有界性, 设常数 $N > 0$, 使得混沌系统向量 $|y_1| \leq N, |y_3| \leq N$, 则有

$$\begin{aligned} |L(y_1e_3)| &\leq N|E_3(s)|, \\ |L(y_3e_1)| &\leq N|E_1(s)|, \\ |L(y_1e_1)| &\leq N|E_1(s)|. \end{aligned}$$

于是有 $\lim_t e_3(t) = 0$, 并有 $\lim_t e_2(t) = 0$. 从而说明在

非线性控制器 (9) 作用下, 可实现分数阶 Liu 混沌系统与分数阶 Lü 混沌系统的异结构广义投影同步.

同样采用近似误差为 2 dB 的逼近方式进行数值仿真, 分数阶算子取 $\alpha = 0.9$, 常数 $k = 1$, 比例因子 $\lambda = 2$, 仿真结果如图 5 所示.

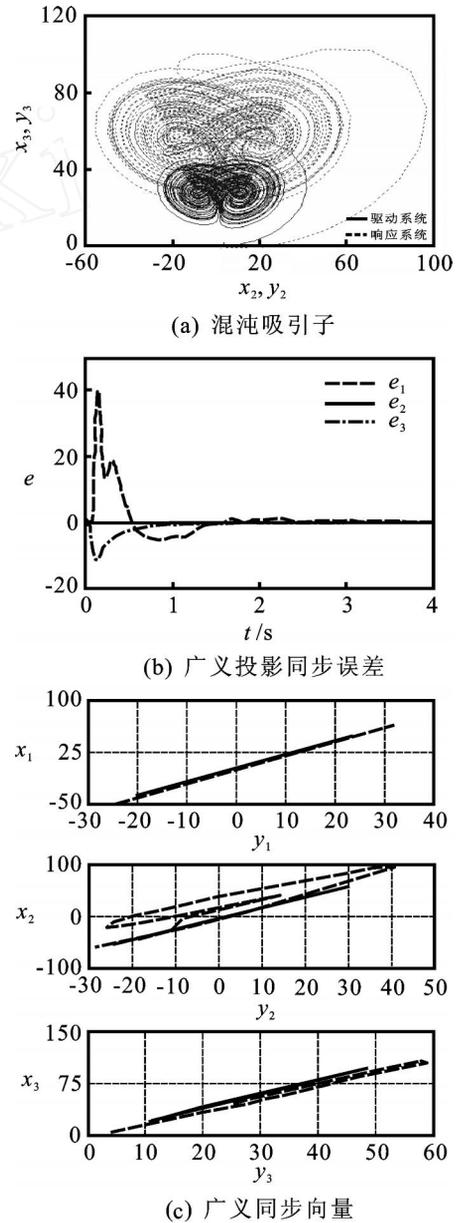


图 5 系统异结构广义投影同步仿真结果

可见, 随着时间的变化, 同步误差曲线 e_1, e_2 和 e_3 快速衰减到零. 当 $t = 5s$ 时, $x_1 = 2y_1, x_2 = 2y_2, x_3 = 2y_3$. 这说明很好地实现了两个分数阶混沌吸引子之间的异结构广义投影同步.

5 结 论

本文结合反馈控制法设计了两个非线性反馈控制器, 分别实现了分数阶混沌系统的同结构和异结构广义投影同步. 利用拉氏变换理论分析了系统同步时误差系统的稳定性, 通过改变比例因子, 获得与

原驱动系统的状态向量成比例的同步信号. 仿真图形丰富, 既有误差曲线, 又有驱动系统和响应系统对应的混沌吸引子, 还有所有对应状态向量的比例. 而文献[6-10]只能实现分数阶混沌系统的完全同步, 其中的仿真曲线大多是最基本的误差曲线或同步时状态向量的时序. 本文设计的控制器适用范围广, 简单灵活, 具有广阔的应用前景.

参考文献(References)

- [1] Ahmad W, Sprott J C. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems [J]. *Chaotic Solitons Fractals*, 2003, 16(2): 339-351.
- [2] Li C G, Chen G R. Chaos and hyperchaos in the fractional order Rossler equations[J]. *Physica A*, 2004, 341(1): 55-61.
- [3] Li C P, Peng G J. Chaos in Chen's system with a fractional order [J]. *Chaotic Solitons Fractals*, 2004, 22(2): 443-450.
- [4] 王发强, 刘崇新. 分数阶临界混沌系统及电路实验的研究[J]. *物理学报*, 2006, 55(8): 3922-3927.
(Wang F Q, Liu C X. Study on the critical chaotic system with fractional order and circuit experiment [J]. *Acta Physics Sinica*, 2006, 55(8): 3922-3927.)
- [5] L Ü J G. Chaotic dynamics of the fractional-order L Ü system and its synchronization [J]. *Physics Letters A*, 2006, 354(4): 305-311.
- [6] Peng G J. Synchronization of fractional order chaotic systems [J]. *Physics Letters A*, 2007, 363(6): 426-432.
- [7] Wang J W, Zhang Y B. Designing synchronization schemes for chaotic fractional-order unified systems [J]. *Chaotic Solitons Fractals*, 2006, 30(5): 1265-1272.
- [8] Li C P, Yan J P. The synchronization of three fractional differential systems [J]. *Chaotic Solitons Fractals*, 2007, 32(2): 751-757.
- [9] Yan J P, Li C P. On chaos synchronization of fractional differential equations [J]. *Chaotic Solitons Fractals*, 2007, 32(2): 725-735.
- [10] L Ü J G. Chaotic dynamics of the fractional-order keda delay system and its synchronization [J]. *Acta Physics Sinica*, 2006, 15(2): 301-305.

(上接第 1024 页)

参考文献(References)

- [1] Doyle J C. Robust and optimal control [C]. *Proc of 35th IEEE on Decision and Control*. Kobe, 1996, 2: 1595-1598.
- [2] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximation inverses [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(2): 301-320.
- [3] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P, et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831-847.
- [4] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
(Shen T L. H_∞ control theory and its application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.)
- [5] Zhou K, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control [M]. London: Prentice Hall, 1996.
- [6] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(1): 41-59.
- [7] Hara S, Iwasaki T, Shiohata D. Robust PID control using generalized KYP synthesis: Direct open-loop shaping in multiple frequency ranges [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, 26(1): 80-91.
- [8] Iwasaki T, Hara S, Yamauchi H. Dynamical system design from a control perspective: Finite frequency positive-realness approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1337-1354.
- [9] Iwasaki T, Hara S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma [J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(5/6): 415-434.
- [10] Dehghani A, Lanzon A, Anderson B D O. A two-degree-of-freedom H_∞ control design method for robust model matching [J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(10): 467-483.
- [11] Hammer J. Approximate model matching for nonlinear control systems [J]. *Int J of Control*, 2000, 73(18): 1671-1685.