

文章编号: 1001-0920(2008)09-1035-05

基于分布参数模型的柔性臂变结构力控制

曹小涛, 李元春

(吉林大学 通信工程学院, 长春 130022)

摘要: 提出一种基于受约束柔性臂分布参数模型的变结构力控制方法, 避免了集中参数模型的缺陷, 解决了系统存在模型不确定性和外部干扰影响下的力控制问题. 通过 Lyapunov 函数设计了系统的变结构控制器, 其中滑模面设计为系统转动角、转动角速度和柔性臂根部应变的线性组合. 利用线性算子半群理论和 LaSalle 不变集原理, 证明了闭环系统的渐近稳定性. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: 柔性臂; 变结构控制; 力控制; 线性算子半群

中图分类号: TP241

文献标识码: A

Variable structure force control of flexible manipulator based on distributed parameter model

CAO Xiaotao, LI Yuan-chun

(College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China. Correspondent: LI Yuan-chun, E-mail: liyc@email.jlu.edu.cn)

Abstract: In this paper, the variable structure force control method is proposed based on the distributed parameter model of constrained flexible manipulator, the drawbacks of lumped parameter model are avoided and the force stabilization problem of the system with uncertain model and disturbance is resolved. The variable structure controller is designed by using the Lyapunov function method, and the sliding surface is selected as a linear combination of joint angle, joint angle velocity and root strain of flexible manipulator. The asymptotically stability of the closed-loop system is proved by using the semigroup of linear operator and LaSalle invariance principle. Simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: Flexible manipulator; Variable structure control; Force control; Semigroup of linear operator

1 引言

近年来, 柔性臂建模与控制受到众多学者的关注. 柔性臂系统模型本质上是无穷维的分布参数系统, 且存在固有的振动特性, 其动力学行为非常复杂, 给系统分析和控制器设计带来了很大困难. 为此, 一些学者研究其简化的集中参数模型, 提出了奇异摄动^[1]、终端滑模^[2]、神经网络^[3]等控制策略. 然而, 利用简化的集中参数模型设计控制器, 存在控制和观测溢出问题, 且被忽略的剩余模态易使闭环系统不稳定.

为解决溢出等问题, 基于集中参数模型设计的控制器通常结构和阶次比较高, 不易于工程实现. 为此, 一些学者直接针对柔性臂的分布参数模型, 对于

抑制振动问题, 提出了边界反馈^[4]、剪切力反馈^[5]等方法; 对于位置和振动的混合控制问题, 提出了 PDS^[5]、非线性力矩反馈^[6]、自适应^[7]等方法.

柔性机械臂在从事装配、抛光、擦洗等工作中, 环境会对机械臂施加作用力. 太大的作用力容易损坏机械臂或工件, 因此必须考虑力和位置的混合控制问题. 受约束柔性臂系统是力、位置以及振动抑制的综合问题, 从而给系统的分析和控制带来更大的困难. 对于柔性臂的力和位置混合控制问题, 一些学者基于简化的集中参数模型, 研究了奇异摄动^[8]、鲁棒^[9]等方法, 但由于模型简化, 上述方法同样存在着溢出问题. 对于直接基于分布参数模型的力控制, 则很少有文献报导. 文献[10]提出一种应变反馈控制

收稿日期: 2007-06-18; 修回日期: 2007-12-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60375030, 60674091).

作者简介: 曹小涛(1980—), 男, 河南巩义人, 博士生, 从事机器人控制的研究; 李元春(1962—), 男, 长春人, 教授, 博士生导师, 从事智能机械与机器人控制等研究.

策略,但该方法是在系统模型精确已知的条件下提出的.由于实际系统存在着建模误差和干扰的影响,基于分布参数模型的鲁棒力控制问题的研究更有实际意义.

本文研究柔性臂力控制问题的分布参数模型,避免了集中参数模型的缺点.针对存在模型不确定性和外部干扰影响下的分布参数模型,提出一种新的变结构控制方法.设计滑模面为系统转动角、转动角速度和柔性臂根部应变的线性组合,并通过 Lyapunov 函数设计了系统的变结构控制策略.该控制器使系统在有限时间收敛到滑模面的同时,可保证系统的状态是有界的.当系统到达滑模面后,由不确定系统转化为一个参数已知的确定系统.利用线性算子半群理论和 LaSalle 不变集原理,证明了闭环系统是渐近稳定的.仿真结果表明,本文提出的变结构控制方法能镇定系统的位置和力,并有效地抑制系统的弹性振动.

2 问题描述

2.1 动力学模型

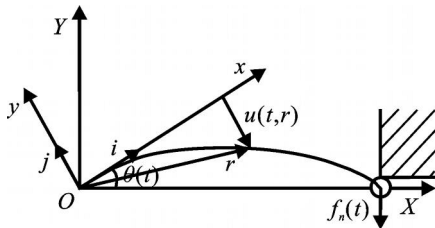


图 1 受约束柔性臂系统

如图 1 所示,本文研究的对象是水平面的受约束柔性臂系统,其中柔性臂的末端受一个固定平面约束.柔性臂的物理参数为:抗挠刚度 EI ,单位质量密度 ρ ,单位长度 l ,末端集中质量 M .以 $\theta(t)$ 表示转动角, $u(t, r)$ 表示柔性臂位置 r 处的弹性形变, $\tau(t)$ 表示控制力矩, J 和 N_g 分别表示电机的转动惯量和传动比, $f_n(t)$ 表示沿约束面法线方向的接触力.分别以下标 t 和 r 表示变量对 t 和 r 的偏导数.

为简化分析,考虑转动角满足 $\theta(t) = 0$,以及系统存在未建模动态和外部干扰 d .系统模型^[9,10]如下:

$$(\theta(t), u(t, l)) = l - u(t, l) = 0, \quad (1)$$

$$J \ddot{\theta}(t) + EI u_{rr}(t, 0) = N_g + d, \quad (2)$$

$$u_{tt}(t, r) + EI u_{rrrr}(t, r) = \rho u_{tt}(t, r), \quad (3)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u_r(t, 0) = 0, \quad u_{rr}(t, l) = 0, \quad (4)$$

$$EI u_{rr}(t, l) = f_n(t). \quad (5)$$

其中 λ 为拉格朗日乘子,满足 $\lambda(t) = f_n(t)$.式(1)为系统的约束方程,式(2)为系统的转动角方程,式(3)为系统的振动方程,式(4)和(5)为振动方程(3)

的边界条件.

引入新变量

$$y(t, r) = u(t, r) - r \theta(t), \quad (6)$$

则系统的动力学模型可转化为

$$-J y_{rr}(t, 0) + EI y_{rr}(t, 0) = N_g + d; \quad (7)$$

$$y_{tt}(t, r) + EI y_{rrrr}(t, r) = 0; \quad (8)$$

$$y(t, 0) = 0, \quad y(t, l) = 0,$$

$$y_r(t, 0) = -\theta(t), \quad y_{rr}(t, l) = 0; \quad (9)$$

$$EI y_{rr}(t, l) = f_n(t). \quad (10)$$

2.2 控制目标

本文的控制目标是:在受约束柔性臂系统(1)~(5)存在参数不确定性和外部干扰的条件下,设计控制力矩 $\tau(t)$ 使闭环系统渐近稳定.即系统从初始状态出发,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\theta(t) \rightarrow d$, $\dot{\theta}(t) \rightarrow 0$, $u(t, r) \rightarrow u_d(r)$.其中: d , \dot{d} 和 $u_d(r)$ 均为常数;下标 d 表示期望值.

对于系统(7)~(10),由式(6)可知控制目的是当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t, r) \rightarrow y_d(r)$, $\dot{y}(t, r) \rightarrow 0$.考虑系统处于静态,即当 $y_{tt}(t, r) = 0$ 时,容易解得

$$y_s(r) = \frac{s}{6EI} r(2l^2 - 3lr + r^2), \quad (11)$$

$$\dot{y}_s = -l^2 s / 3EI. \quad (12)$$

其中下标 s 表示静态值.如果选取系统的期望值满足 $d = \dot{y}_s$, $\dot{d} = \ddot{y}_s$, $u_d(r) = u_s(r)$,则表明期望值的选取必须满足数学关系(11)和(12).

为简化描述,本文以 $y(t, r)$ 表示 $y(t, r) - y_d(r)$.为了不至于混淆,对于式(7)中的 $y_{rr}(t, 0)$,用 $y_{rr}^1(t, 0)$ 来表示.

3 变结构控制器设计

对于系统(7)~(10),假设系统参数 J 和 N_g 是不确定的. J , N_g 和 d 满足以下假设:

假设 1 $N_g = a_1$, $J = a_2$, $|d| = a_3$. a_1 , a_2 和 a_3 均为已知正常数.

定义滑模面为系统转动角、角速度和柔性臂根部应变的线性组合,即

$$s = y_{rr}(t, 0) + k_1 y_r(t, 0) - k_2 y_{rr}(t, 0). \quad (13)$$

其中: $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 0$ 为设计参数, $y_{rr}(t, 0)$ 为柔性臂的根部应变值, $-y_r(t, 0) = \theta(t)$ 为系统的转动角.

如果 $k_2 = 0$,则式(13)就是传统的刚性臂控制所用的滑模面.加入 $y_{rr}(t, 0)$ 项是为了稳定系统,这将在下文中得到验证.

定理 1 对于系统(7)~(10),在假设 1 成立的前提下,设计滑模变结构控制器

$$\tau = \left[\frac{a_3}{a_1} + \frac{EI}{a_1} / y_{rr}^1(t, 0) + \left(k_1 \frac{a_2}{a_1} + \frac{EI}{k_2} \right) / y_{rr}(t, 0) \right] + \dots$$

$$k_2 \frac{a_2}{a_1} |y_{rr}(t, 0)| \operatorname{sgn}(s). \tag{14}$$

其中： $\gamma > 0$ 为设计参数， $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为符号函数。

系统将在有限时间收敛到滑模面 $s = 0$ ，并且系统状态是范数有界的。即满足

$$|y_{rr}| \leq M_0, \quad |y_r| \leq M_0, \\ (y_r(t, 0))^2 \leq M_0.$$

其中： $M_0 > 0$ 为某一特定常数， $\int_0^l \cdot^2 dr$ 。

证明 对于转动角方程(7)，考虑 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{J}{N_g} s^2.$$

对 s 沿时间 t 求导，由式(7) 和(14) 可得

$$\dot{V}_1 = \frac{J}{N_g} s \dot{s} = \\ - |s| + s \left[- \frac{1}{N_g} \dot{a} + \frac{E_l}{N_g} y_{rr}^1(t, 0) + \right. \\ \left. k_1 \frac{J}{N_g} y_{rr}(t, 0) - k_2 \frac{J}{N_g} y_{rr}(t, 0) \right] - |s| \left[\frac{a_2}{a_1} + \right. \\ \left. \frac{E_l}{a_1} |y_{rr}^1(t, 0)| + \left(k_1 \frac{a_2}{a_1} + \frac{E_l}{k_2} \right) |y_{rr}(t, 0)| + \right. \\ \left. k_2 \frac{a_2}{a_1} |y_{rr}(t, 0)| \right] - |s|.$$

由滑模变结构控制方法^[11]，上式表明式(7) 将在有限时间内收敛到滑模面 $s = 0$ 。对于整个系统(7) ~ (10)，考虑 Lyapunov 函数

$$V_2 = \frac{1}{2} E_l \int_0^l (y_{rr})^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^l (y_r)^2 dr + \\ \frac{1}{2} \frac{J}{N_g} s^2 + \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} E_l [y_r(t, 0)]^2,$$

则 V_2 沿时间 t 的导数为

$$\dot{V}_2 = - E_l y_{rr}(t, 0) y_r(t, 0) + \frac{J}{N_g} s \dot{s} + \\ \frac{k_1}{k_2} E_l y_r(t, 0) y_r(t, 0).$$

将式(13) 和(14) 代入上式，可得

$$\dot{V}_2 = \\ - \frac{E_l}{k_2} [y_{rr}(t, 0)]^2 - |s| + s \left[- \frac{1}{N_g} \dot{a} + \right. \\ \left. \frac{E_l}{N_g} y_{rr}^1(t, 0) + \left(k_1 \frac{J}{N_g} + \frac{E_l}{k_2} \right) y_{rr}(t, 0) - \right. \\ \left. k_2 \frac{J}{N_g} y_{rr}(t, 0) \right] - |s| \left[\frac{a_2}{a_1} + \frac{E_l}{a_1} |y_{rr}^1(t, 0)| + \right. \\ \left. \left(k_1 \frac{a_2}{a_1} + \frac{E_l}{k_2} \right) |y_{rr}(t, 0)| + k_2 \frac{a_2}{a_1} |y_{rr}(t, 0)| \right] \\ - \frac{E_l}{k_2} [y_{rr}(t, 0)]^2 - |s| \leq 0.$$

上式表明 V_2 是有界的，因此当控制器设计为式(14) 时，系统(7) ~ (10) 是 Lyapunov 稳定的。由 V_2

的结构可知，存在某一正常数 M_0 ，使得

$$|y_{rr}| \leq M_0, \quad |y_r| \leq M_0, \\ (y_r(t, 0))^2 \leq M_0.$$

4 渐近稳定性分析

以下证明当 $s = 0$ 时，闭环系统也是渐近稳定的。当 $s = 0$ 时，系统的闭环方程为

$$y_u(t, r) + E_l y_{rrr}(t, r) = 0, \tag{15}$$

$$y_{rr}(t, 0) + k_1 y_r(t, 0) - k_2 y_{rr}(t, 0) = 0, \tag{16}$$

$$y(t, 0) = 0, \quad y(t, l) = 0, \quad y_{rr}(t, l) = 0. \tag{17}$$

由控制器(14)，已将存在参数不确定性以及外部干扰的系统(7) ~ (10)，转化为参数确知的系统(15) ~ (17)。滑模面 $s = 0$ 构成了偏微分方程(15) ~ (17) 的一个新的边界条件。为分析闭环系统(15) ~ (17)，引入状态空间

$$H = \{ (u, v, u_r(0))^T \mid u \in H_0^1, \\ v \in L^2, u_r(0) \in R \}.$$

其中

$$L^2 = \{ f \in H^1(0, l) \mid R \mid \int_0^l f^2 dx < \infty \},$$

$$H^k = \{ f \in L^2 \mid f, f', \dots, f^{(k)} \in L^2 \},$$

$$H_0^k = \{ f \in H^k(0, l) \mid f(0) = 0 \}.$$

对于任意 $z, \hat{z} \in H$ ，定义内积

$$(z, \hat{z})_H = E_l \int_0^l u_r \hat{u}_r dr + \int_0^l v \hat{v} dr + \\ k_1 E_l u_r(0) \hat{u}_r(0) / k_2. \tag{18}$$

其中

$$z = (u, v, u_r(0))^T, \quad \hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}_r(0))^T.$$

则空间 H 按内积(18) 成为 Hilbert 空间。闭环系统(15) ~ (17) 可表示为 H 上的发展方程，即

$$\dot{Y} = AY, \quad Y(0) = Y_0. \tag{19}$$

其中： $Y = (y, y_r, y_r(t, 0))^T$ ，算子 $A \in H \rightarrow H$ 定义为

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \\ u_r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ - \frac{E_l}{k_2} u_{rrr} \\ v_r(0) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

则

$$D(A) = \\ \{ (u, v, u_r(0))^T \mid u \in H_0^4, v \in H_0^2, \\ u_r(0) \in R, u(l) = 0, u_{rr}(l) = 0, \\ v_r(0) + k_1 u_r(0) - k_2 u_{rr}(0) = 0 \}. \tag{21}$$

记系统收敛到滑模面的时间为 t_s ， t_s 时的 Y 值为 $Y(t_s)$ ，则 $Y_0 = (y(t_s, r), y_r(t_s, r), y_r(t_s, r))^T$ 表示发展方程(19) 的初始值。

对于算子 A ，给出如下引理：

引理 1 算子 A 是 H 上的耗散算子。

证明 对于任意 $z \in H$ ，由式(19) 和(20) 经直

接计算可得

$$z, Az_H = - \frac{E_l}{k_2} [v_r(0)]^2 \leq 0. \quad (22)$$

由式(22)可知算子 A 是 H 上的耗散算子.

不等式(22)表明对于闭环系统(15)~(17),如果定义 Lyapunov 函数 $V_3 = \frac{1}{2} Y^2_H$, 其中 \cdot_H 表示由内积(18)诱导的范数,则

$$\dot{V}_3 = Y, AY = - \frac{E_l}{k_2} [y_r(0)]^2 \leq 0, \quad (23)$$

即算子 A 耗散表明 $\dot{V}_3 \leq 0$.

引理2 存在 $\epsilon > 0$, 使得 $R(\epsilon I - A) = H$, 其中 $R(\epsilon I - A)$ 表示 $\epsilon I - A$ 的值域.

证明过程与文献[12]类似,从略.

由引理1,引理2和 Lumer-Phillips 定理^[13],可知如下定理成立:

定理2 算子 A 生成 H 上的 C_0 压缩半群.

为证明闭环系统是渐近稳定的,给出以下关于算子 A 的预解式 $(\epsilon I - A)^{-1}$ 的性质:

引理3 对于任意 $\epsilon > 0$, 算子 A 的预解式 $(\epsilon I - A)^{-1}$ 是紧的,其中 (A) 是算子 A 的预解集.

证明过程与文献[12]类似,从略.

由 LaSalle 不变集原理^[5],如果当 $t \rightarrow \infty$ 时系统(19)的解轨线在 H 中是预紧的,则系统(19)的解将收敛于最大不变子集 $M = \{z \in H \mid \dot{V}_3 = 0\}$. 由定理2和引理3可知,系统(19)的解轨线在 H 中是预紧的.为证明闭环系统是渐近稳定的,只需证明 M 仅包含零解.当 $\dot{V}_3 = 0$ 时,系统方程为

$$y_n(t, r) + E_l y_{rrr}(t, r) = 0, \quad (24)$$

$$k_1 y_r(t, 0) = k_2 y_{rr}(t, 0), \quad (25)$$

$$y(t, 0) = 0, y(t, l) = 0, y_{rr}(t, l) = 0, \quad (26)$$

$$y_r(t, 0) = 0. \quad (27)$$

系统(24)~(27)可写成发展方程的形式 $\dot{Y}_p = A_p Y_p$. 其中: $Y_p = (y, y_t)^T \in H_p$, H_p 定义为在 H 中忽略 $u_r(0)$ 项, A_p 定义为在 A 中忽略最后一行.而 $D(A_p)$ 是在式(21)中忽略 $u_r(0)$ 项,并将最后一个边界条件修改为 $k_1 u_r(0) - k_2 u_{rr}(0) = 0$. 内积 \cdot_{H_p} 定义为在式(18)中略去最后一项,空间 H_p 按内积 \cdot_{H_p} 成为 Hilbert 空间.通过分部积分,容易验证对于任意 $z_p \in D(A_p), \hat{z}_p \in D(A_p)$, 满足

$$z_p, A_p \hat{z}_p_{H_p} = - A_p z_p, \hat{z}_p_{H_p}.$$

由上式可知 A_p 是斜伴算子^[14].由文献[13]可知 A_p 生成一个 C_0 压缩半群.由文献[14]可知系统(24)~(27)的解可表示为

$$Y_p = \sum_j c_j e^{j t} j. \quad (28)$$

其中: j 是算子 A_p 的本征值, $j = (u_j, v_j)^T$ 为对应

于 j 的本征函数, $c_j \in C$ 由初始条件确定.

对于本征函数 j , 有 $u_{rj}(0) \neq 0$, 这可由反证法得到证明. 即若 $u_{rj}(0) = 0$, 则由 $A_p j = j j$ 可知以下方程成立:

$$j^2 u_j + E_l u_{rrrj} = 0; \quad (29)$$

$$u_j(0) = 0, u_j(l) = 0,$$

$$u_{rrj}(l) = 0, u_{rj}(0) = 0; \quad (30)$$

$$k_1 u_{rj}(0) - k_2 u_{rrj}(0) = 0. \quad (31)$$

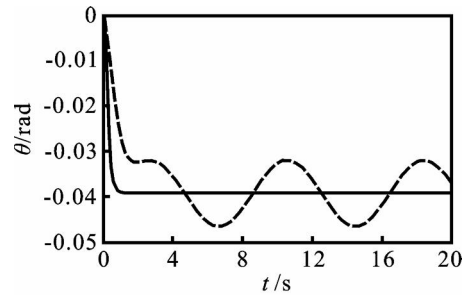
容易验证 $u_j(r) = 0$. 由 $v_j(r) = j u_j(r) = 0$ 可知, 当 $u_{rj}(0) = 0$ 时, $j = 0$. 这与 j 是本征函数相矛盾, 因此 $u_{rj}(0) \neq 0$. 由于 $v_{rj}(0) = j u_{rj}(0)$, 显然 $v_{rj}(0) \neq 0$. 由式(28)容易得到

$$y_{rr}(t, 0) = \sum_j c_j e^{j t} v_{rj}(0) = 0. \quad (32)$$

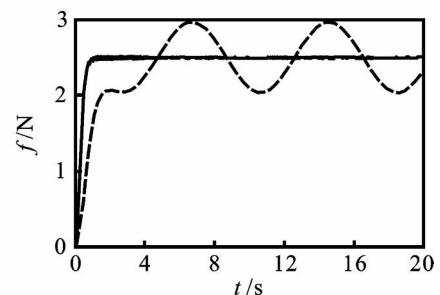
由于 $v_{rj}(0) \neq 0$, 由文献[6]可知 $c_j = 0$, 系统(24)~(27)仅有零解. 由 LaSalle 不变集原理可知以下定理成立:

定理3 闭环系统(15)~(17)是渐近稳定的.

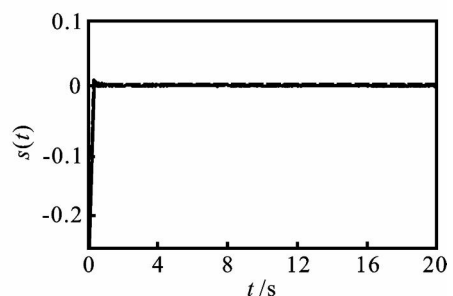
综合定理1和定理3,给出本文的主要结果如



(a) 关节角 $\theta(t)$



(b) 力 $f_n(t)$



(c) 滑模面 $s(t)$

图2 数值仿真结果

下:

定理 4 对于受约束单连杆柔性臂系统 (1) ~ (5), 在不确定参数和外部干扰满足假设 1 的条件下, 当变结构控制器设计为式 (14) 时, 闭环系统是渐近稳定的.

5 数值仿真结果

在数值仿真中, 系统参数选择 $l = 0.7 \text{ m}$, $m = 0.6 \text{ kg/m}$, $E_I = 10.4 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $J = 3.7 \text{ kg/m}$, $N_g = 1$; 系统未建模动态和外部干扰为 $d = 0.15 \times \sin(1.8t)$; 控制器参数选择 $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 0.2$, $k_1 = 2.6$, $k_2 = 0.68$, $\beta = 0.8$; 系统的初始角度和初始力均选为 0; 期望力 $f_d = 2.5 \text{ N}$. 系统在 20 s 内的仿真结果如图 2 所示. 其中: 实线为本文的控制策略, 虚线为文献 [10] 提出的控制策略.

由图 2 的仿真结果可以看出, 本文提出的控制策略, 能使受约束柔性臂系统在存在模型不确定性和外部干扰的情况下得到镇定, 系统的关节角和力渐近收敛到期望值, 并使柔性臂的振动得到抑制. 这表明本文提出的变结构控制策略是有效的. 与文献 [10] 提出的控制策略相比, 本文的控制策略解决了系统存在参数不确定性和外部干扰的鲁棒控制问题, 因而更有实用价值.

6 结 论

本文提出一种新的基于分布参数模型的柔性臂变结构力控制方法, 避免了传统的基于集中参数模型所带来的弊端, 解决了系统存在参数不确定性和外部干扰下的镇定问题. 通过在传统滑模面中增加一项柔性臂的根部应变值, 使系统的位置和力渐近收敛, 并使振动得到抑制. 理论分析和数值仿真验证了所提出的控制策略. 本文的控制策略结构简单, 便于工程实现.

参考文献 (References)

[1] 李元春, 陆佑方, 唐保健. 双连杆柔性臂轨迹跟踪的鲁棒控制[J]. 自动化学报, 1999, 25(3): 330-336.
(Li Y C, Lu Y F, Tang B J. Robust control for trajectory tracking of a two-link flexible manipulator[J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(3): 330-336.)
[2] 张袅娜, 冯勇, 孙黎霞. 双臂柔性机械手的终端滑模控

制[J]. 控制与决策, 2004, 19(10): 1142-1146.

(Zhang N N, Feng Y, Sun L X. Terminal sliding mode control of two-link flexible manipulators [J]. Control and Decision, 2004, 19(10): 1142-1146.)

- [3] Tian L F, Collins C. A dynamic recurrent neural network-based controller for a rigid-flexible manipulator system[J]. Mechatronics, 2004, 14(5): 471-490.
[4] Francisc C, Omer M. On the stabilization of a flexible beam with a tip mass [J]. SIAM J on Control and Optimization, 1998, 36(6): 1962-1986.
[5] Luo Z H, Guo B Z, Omer M. Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications [M]. London: Springer, 1999.
[6] Luo Z H, Feng D X. Nonlinear torque control of a single-link flexible robot [J]. J of Robotic Systems, 1999, 16(1): 25-35.
[7] Lee H H. A new trajectory control of a flexible-link robot based on a distributed-parameter dynamic model [J]. Int J of Control, 2004, 77(6): 546-553.
[8] Matsuno F, Yamamoto K. Dynamic hybrid position force control of a two degree-of-freedom flexible manipulator[J]. J of Robotic Systems, 1994, 11(5): 335-366.
[9] Matsuno F, Kasai S. Modelling and robust force control of constrained one-link flexible arms[J]. J of Robotic Systems, 1998, 15(8): 447-464.
[10] Endo T, Matsuno F. Dynamics based force control of one-link flexible arm [C]. SICE Annual Conf in Sapporo. Sapporo, 2004: 2736-2741.
[11] Slotine J E, Li W P. Applied nonlinear control [M]. New York: Prentice-Hall, 1991.
[12] 曹小涛, 李元春. 柔性臂协调运动系统的动态反馈镇定[J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 817-822.
(Cao X T, Li Y C. Dynamic feedback stabilization of cooperating flexible manipulators [J]. Control and Decision, 2008, 23(7): 817-822.)
[13] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
[14] Gohberg I, Goldberg S, Kaashoek M A. Classes of linear operators [M]. Basel: Birkhauser, 1990.