

文章编号: 1001-0920(2008)09-1040-05

# 一种改进的鲁棒约束预测控制器的综合设计方法

郑鹏远, 席裕庚, 李德伟

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200240)

**摘要:** 针对多包描述的不确定系统, 提出一种新的鲁棒约束预测控制器. 离线设计多包系统 worst-case 情况下性能最优的不变集, 在线求解多包系统无穷时域性能指标的 min-max 优化问题. 设计方法采用了时变的终端约束集, 扩大了初始可行域, 并能获得较优的控制性能. 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 鲁棒预测控制; 不变集; 时变终端约束集; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Improved synthesis approach of robust constrained model predictive controller

ZHENG Peng-yuan, XI Yu-geng, LI De-wei

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China. Correspondent: ZHENG Peng-yuan, E-mail: pyzheng@sjtu.edu.cn)

**Abstract:** An improved method of synthesizing constrained robust model predictive controller for systems with polytopic description is proposed. It off-line constructs invariant sets guaranteeing the optimal performance cost for the worst-case, and on-line solves the min-max optimization problem with infinite horizon performance cost. Adopting the time varying terminal constraint set, the initial feasible region can be enlarged and better performance is also achieved. Simulation examples show the effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** Robust model predictive control; Invariant set; Time-varying terminal constraint set; Linear matrix inequalities

### 1 引言

模型预测控制(MPC)是上世纪 70 年代发展起来的一种先进控制方法. 它对模型的要求低, 鲁棒性能好, 可以方便处理约束, 因而在实际工业过程中得到了广泛应用.

鲁棒预测控制已成为预测控制研究的热点之一. 文献[1]指出了约束预测控制稳定性分析中的 3 个要素: 终端约束集、终端代价函数和局部控制律. 利用这 3 个要素, 预测控制的稳定性问题得到了广泛的研究. [2]采用 LMI 方法求解无穷时域二次性能指标的 min-max 优化问题, 但需要在线求解多参数 LMI 优化问题, 当系统维数较高时, 该算法在线计算量较大, 不利于实际应用. 为了解决这一问题, 研究者们相继提出了一些改进的设计方法<sup>[3-8]</sup>. [3-5]离线确定一系列线性状态反馈控制律及其相对应

的椭圆不变集, 在线选择当前状态所处的最小椭圆不变集所对应的控制律, 使在线计算量大为减小. [6-8]采用离线设计、在线综合的方法设计预测控制器. [8]给出一种在线计算量较低的可行方法, 通过在离线设计的不变集外附加自由引导变量, 进一步扩大了初始可行域并改善了控制性能, 但其变时域控制过程始终选取固定的终端约束集, 而在当前状态进入约束集后, 其无穷时域控制输入固定为单一的状态反馈形式, 缺乏自由度进一步改进控制性能; 且在设计中, 所采用的多包不确定系统的标称系统一般情况下是未知的.

为更好地解决预测控制器初始可行域与控制性能之间的矛盾, 且使其对于标称系统未知的控制系统也具有适用性, 本文提出一种鲁棒约束预测控制器, 其终端约束集自初始时刻起即为时变的, 不但可

收稿日期: 2007-07-13; 修回日期: 2007-11-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474002, 60674041); 国家 863 计划项目(2006AA04Z173).

作者简介: 郑鹏远(1975—), 男, 河北沙河人, 博士生, 从事预测控制的研究; 席裕庚(1946—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事优化控制、智能机器人等研究.

有较大的初始可行域,而且能获得更优的控制性能.

### 2 问题描述

考虑时变/不确定系统

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k). \quad (1)$$

其中:  $x \in R^n$  和  $u \in R^m$  分别为系统状态和控制输入;  $[A(k), B(k)]$   $\in \text{Co}\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_L, B_L]\}$ . 输入约束为

$$\begin{aligned} |u_j(k+i)| &\leq u_{j,\max}, \\ i &= 0, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2a)$$

状态约束为

$$\begin{aligned} |s x(k+i+1)| &\leq s_{\max}, \\ i &= 0, s = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (2b)$$

通常,无穷时域预测控制的在线优化问题可表示为

$$\begin{aligned} \min_{u(k+i/k), i=0} \max_{[A(k+i), B(k+i)], i=0} J(k), \\ J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [x(k+i/k)^T L + \\ u(k+i/k)^T R], \\ \text{s.t. (1), (2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $L$  和  $R$  为正定加权矩阵.

为了有效地求解上述优化问题,文献[2]引入控制不变集设计鲁棒控制器,将优化问题(3)转化为如下 LMI 求解问题:

#### 算法 1<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} \min_{Q, Y, X}, \\ \text{s.t.} \begin{bmatrix} 1 & x(k/k)^T \\ x(k/k) & Q \end{bmatrix} \preceq 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_l^T + Y^T B_l^T & QL^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_l Q + B_l Y & Q & 0 & 0 \\ L^{1/2} Q & 0 & I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \preceq 0, \\ l = 1, 2, \dots, L; \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \preceq 0, X_{jj} \leq u_{j,\max}^2, j = 1, 2, \dots, m; \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} Z & (A_l Q + B_l Y) \\ (A_l Q + B_l Y)^T & Q \end{bmatrix} \preceq 0, \\ z_{ss} \leq s_{\max}^2, s = 1, 2, \dots, q, l = 1, 2, \dots, L. \quad (7)$$

集合  $(Q) = \{x \in R^n / x^T Q^{-1} x \leq 1, Q > 0\}$  即为系统(1)的椭圆不变集,其对应的反馈控制律为  $u(k/k) = Fx(k), F = YQ^{-1}$ .

对于高维系统,算法 1 在线计算量较大.因此文献[8]假设存在标称系统  $[A, B]$ ,采用离线设计、在线综合的方法设计了鲁棒预测控制器,即如下算法:

**算法 2<sup>[8]</sup>** 首先离线设计椭圆不变集  $(Q_1)$  和  $(Q_0)$ ,引入一给定半径的内切圆,要求  $(Q_1)$  覆盖该内切圆,以保证系统的初始可行域;  $(Q_0)$  则对应于系统无约束条件下的性能椭圆.

然后在线实施,以变时域控制驱动状态进入不变集  $(Q_1)$ .当控制时域缩减为  $N = 0$  时,以  $(Q_1)$  和  $(Q_0)$  的凸组合来优化当前时刻所对应的状态反馈律,将系统状态驱动到不变集  $(Q_0)$ .施加  $(Q_0)$  所对应的状态反馈律,使系统状态趋近于平衡点.

**注 1** 文献[8]的离线设计和在线优化均以标称系统存在为前提.对于多包系统而言,标称系统可能并不存在,因此这种假设限制了该方法的应用.此外,离线设计和在线优化还存在一定的保守性:一是由于事先无法知道该系统椭圆不变集的形状,引入内切圆对椭圆不变集的短轴长度形成了不必要约束,使整个设计较为保守;二是在线优化以固定不变集作为终端约束集,造成控制性能得不到有效改善.

### 3 改进的鲁棒约束预测控制器

基于上节分析,本节从实际系统出发,提出一种改进的离线设计和在线优化方法,在保持原有设计优点的同时,减少保守性,改善系统性能.

设计不变集  $(Q)$ ,可通过对其对应的性能指标上界赋值来保证初始可行域.即令

$$c = c, \quad (8)$$

分别设计多包系统 worst-case 情况下性能最优的椭圆不变集  $(Q_{INI})$  和  $(Q_0)$ .其中:  $(Q_{INI})$  包含  $(Q_0)$ ,决定了系统初始可行域的大小;  $(Q_0)$  用于改善系统的控制性能.

#### 3.1 离线设计

Step1: 设计椭圆不变集  $(Q_{INI})$ .为取得较大的初始可行域,要求设计的  $(Q_{INI})$  能覆盖较大范围,与其相对应的性能指标上界应取较大的数值.

选取  $c_1$ ,其值由系统要求的初始可行域大小决定.求解下列优化问题:

$$\max_{Q, X, Y} \log \det(Q), \text{ s.t. (5) } \sim (8).$$

得到  $(X_{INI}, Q_{INI}, Y_{INI})$ .

Step2: 求解系统无输入约束时的最优控制律.任取  $c_2$ ,求解下列优化问题:

$$\max_{Q, Y} \log \det(Q), \text{ s.t. (5), (8)}.$$

得到  $(Y_{OPT}, Q_{OPT}, Y_{OPT})$ .  $F_{OPT} = Y_{OPT} Q_{OPT}^{-1}$  即为系统无输入约束时的最优控制律.

Step3: 设计椭圆不变集  $(Q_0)$ ,使有约束优化问题所对应的反馈控制律  $F_0$  是无输入约束时的最优控制律  $F_{OPT}$ ,且其覆盖最大范围.这时的约束反馈控制律便为无约束最优控制律,即

$$F_0 = Y_0 Q_0^{-1} = Y_{OPT} Q_{OPT}^{-1} = F_{OPT}.$$

令  $\epsilon > 0$ ,  $Q_0 = B_{OPT}$ ,  $Q_0 = Q_{OPT}$ ,  $Y_0 = Y_{OPT}$ , 求解下列优化问题:

$$\max_x \log \det(Q), \text{ s. t. (5) } \sim \text{(7)}.$$

得到  $(Q_0, X_0, Y_0)$ .

注2 以上离线设计 ( $Q_{INI}$ ) 时, 首先给定不变集的性能指标上界值; 然后在保证性能指标的条件下, 求得能覆盖最大范围的椭圆不变集. 而文献[8]中 ( $Q_1$ ) 的设计, 是在给定椭圆不变集内切圆半径的前提下, 寻求性能指标的优化. 设计 ( $Q_{INI}$ ) 和 ( $Q_1$ ) 的本意是扩大系统的初始可行域, 因此本文作法显得更为合理. 此外, 由于减少了对椭圆不变集短轴的约束条件, ( $Q_{INI}$ ) 的设计比文献[8]中 ( $Q_1$ ) 引入内切圆的方法降低了保守性.

### 3.2 在线综合

对于不确定系统(1), 可得到系统的状态预测

$$\begin{bmatrix} x(k+1/k) \\ \dots \\ x(k+N/k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) & & & \\ & \dots & & \\ A(k+N-1) & \dots & A(k+1) & A(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B(k) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & 0 \\ A(k+N-1) & \dots & \dots & B(k+N-1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(k/k) \\ \dots \\ u(k+N-1/k) \end{bmatrix}.$$

上式可改写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ x(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}(k) \\ \overline{A}_N(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B}(k) \\ \tilde{B}_N(k) \end{bmatrix} \tilde{u}(k), \tag{9}$$

其中

$$\tilde{x}(k+1) = [x(k+1/k)^T, \dots, x(k+N-1/k)^T]^T.$$

由式(1)和(9), 系统矩阵  $[\overline{A}(k), \tilde{B}(k)]$  为一系列顶点的凸组合, 其顶点数为  $\tilde{L} = L^{N-1}$ .  $[\overline{A}_N(k), \tilde{B}_N(k)]$  作为终端状态  $x(k+N)$  的系统矩阵, 为一系列顶点的凸组合, 其顶点数为  $\tilde{L}_N = L^N$ . 即

$$[\overline{A}(k), \tilde{B}(k)] = \prod_{\tilde{\tau}=1}^{\tilde{L}} \tilde{\tau}(k) [\overline{A}_{\tilde{\tau}}, \tilde{B}_{\tilde{\tau}}],$$

$$\prod_{\tilde{\tau}} \tilde{\tau}(k) = 1, \tilde{\tau} = 1, 2, \dots, \tilde{L};$$

$$[\overline{A}_N(k), \tilde{B}_N(k)] = \prod_{\tilde{\tau}_N=1}^{\tilde{L}_N} \tilde{\tau}_N(k) [\overline{A}_{N, \tilde{\tau}_N}, \tilde{B}_{N, \tilde{\tau}_N}],$$

$$\prod_{\tilde{\tau}_N=1}^{\tilde{L}_N} \tilde{\tau}_N(k) = 1, \tilde{\tau}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N.$$

在控制时域  $N$  内, 输入约束为

$$|u_j(k+i/k)| \leq u_{j, \max}, \quad 0 \leq i \leq N-1, j = 1, 2, \dots, m. \tag{10a}$$

式(9)代入式(2b), 可得状态约束

$$|[\overline{A}_{\tilde{\tau}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{\tau}} \tilde{u}(k)]| \leq \tilde{r}, \tilde{\tau} = 1, 2, \dots, \tilde{L}; \tag{10b}$$

$$|s[\overline{A}_{N, \tilde{\tau}_N} x(k) + \tilde{B}_{N, \tilde{\tau}_N} \tilde{u}(k)]| \leq s_{\max}, \quad s = 1, 2, \dots, q, \tilde{\tau}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N. \tag{10c}$$

其中:  $\overline{\cdot}$  是由  $\tilde{L}$  组成的相应维数的块对角阵,  $\tilde{\cdot}$  是由  $\tilde{L}$  组成的相应维数的列向量,  $\tilde{r} = [r_1^T, \dots, r_q^T]^T$ ,  $s_{\max} = [s_{1, \max}, \dots, s_{q, \max}]^T$ .

对于离线设计得到的不变集 ( $Q_{INI}$ ) 和 ( $Q_0$ ), 容易得出  $(a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0)$  仍为系统的不变集. 以  $(a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0)$  作为终端约束, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k)^T \overline{A}_{N, \tilde{\tau}_N}^T + \tilde{u}(k)^T \tilde{B}_{N, \tilde{\tau}_N}^T \\ \overline{A}_{N, \tilde{\tau}_N} x(k) + \tilde{B}_{N, \tilde{\tau}_N} \tilde{u}(k) & a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0 \end{bmatrix} \leq 0, \quad \tilde{\tau}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N, \quad 0 \leq a_1 \leq 1, \quad 0 \leq a_2 \leq 1, \quad a_1 + a_2 = 1. \tag{11}$$

可将优化问题(3)转化为

$$\min_{\tilde{u}(k)} \max_{\tilde{A}(k+i), \tilde{B}(k+i)} \bar{J}(k), \quad \bar{J}(k) = x(k)^T \tilde{L} + \overline{A}(k) x(k) + \tilde{B}(k) \tilde{u}(k) + \tilde{u}(k)^T \tilde{R} + \overline{A}_N(k) x(k) + \tilde{B}_N(k) \tilde{u}(k) + b, \text{ s. t. (10), (11)}. \tag{12}$$

其中:  $P^* = (Q^*)^{-1}$ ,  $Q^* = a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0$ ,  $\tilde{L} = (a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0)^{-1}$ ;  $\tilde{L}$  和  $\tilde{R}$  分别是由  $L$  和  $R$  组成的相应维数的块对角阵.

由于  $(Q^*) = (a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0)$  仍为系统的不变集, 则由不变集理论得

$$\overline{A}_N(k) x(k) + \tilde{B}_N(k) \tilde{u}(k) \leq_{P^*} a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0.$$

令

$$\overline{A}(k) x(k) + \tilde{B}(k) \tilde{u}(k) \leq_{\tilde{L}} b + \tilde{u}(k)^T \tilde{R} \tilde{u}(k).$$

即

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}^{-1} & 0 & \overline{A}_{\tilde{\tau}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{\tau}} \tilde{u}(k) \\ 0 & \tilde{R}^{-1} & \tilde{u}(k) \\ x(k)^T \overline{A}_{\tilde{\tau}}^T + \tilde{u}(k)^T \tilde{B}_{\tilde{\tau}}^T & \tilde{u}(k)^T & b \end{bmatrix} \leq 0, \quad \tilde{\tau} = 1, 2, \dots, \tilde{L}. \tag{13}$$

从而优化问题(12)可化为

$$\min_{a_1, a_2, b, \tilde{u}(k)} x(k)^T \tilde{L} + b + a_1 Q_{INI} + a_2 Q_0, \text{ s. t. (10), (11), (13)}. \tag{14}$$

综合上述离线设计和在线综合, 给出如下鲁棒预测控制器:



**算法 3** 离线构造  $(Q_{INI}, X_{INI}, Y_{INI})$  和  $(u_0, X_0, Y_0)$ . 在  $k = 0$  时刻, 求解在线优化问题(14), 应用  $u(0/0)$ . 当  $k > 0$  时, 采取如下步骤:

Step1: 当  $N > 1$  时, 减小控制时域, 令  $N = N - 1$ . 求解优化问题(14), 应用  $u(k/k)$ .

Step2: 当  $N = 1$  时, 求解优化问题(14), 应用  $u(k/k)$ . 重复 Step2, 直至系统稳定到平衡点为止.

**注 3** 该预测控制器综合考虑了多包系统的所有顶点, 离线设计 worst-case 情况下性能最优的椭圆不变集, 对于标称系统未知情形也适用, 应用范围更为广泛. 在线实施时, 其终端约束集随系统状态进行优化, 并在当前状态进入约束集  $(Q_{INI})$  后, 取控制时域  $N = 1$ , 其控制输入始终存在一自由引导变量  $u(k/k)$ , 因此有效地改善了系统的控制性能.

**注 4** LMI 可通过内点法有效地进行求解, 其计算量为  $O(RS^3)^{[9]}$ . 其中  $R$  是 LMI 的行数,  $S$  是优化变量数. 算法 3 的计算量比算法 2 略有增加, 但却取得了更优的控制性能.

#### 4 稳定性分析

**定理 1** 对于受控系统(1), 如果算法 3 在初始时刻有可行解, 则算法 3 所设计的鲁棒预测控制器可使该系统渐近稳定.

**证明** 设  $k$  时刻存在可行解  $a_1^*, a_2^*$  和  $b^*$ ,  $\tilde{u}^*(k) = \{u^*(k/k), \dots, u^*(k+N-1/k)\}$ , 使系统终端状态  $x(k+N/k) \in (a_1^* Q_{INI} + a_2^* Q_0)$ . 在  $k+1$  时刻, 控制量  $u^*(k/k)$  已实施于系统, 控制时域  $N = N - 1$ . 取剩下的  $N - 1$  个控制量  $\tilde{u}^*(k+1) = \{u^*(k+1/k), \dots, u^*(k+N-1/k)\}$ , 以及  $a_1^*, a_2^*, b = b^* - x(k+1/k)^T L x(k+1/k) - u^*(k/k)^T R u^*(k/k)$  作为一组解, 则式(10), (11) 和(13) 仍得到满足, 因此这组解是  $k+1$  时刻的可行解.

当控制时域递减为  $N = 1$  时, 即由变时域控制切换为固定时域( $N = 1$ ) 控制. 设  $k$  时刻控制时域已递减为  $N = 1, u^*(k/k), a_1^*, a_2^*$  和  $b^*$  为  $k$  时刻的可行解, 则与其相对应的性能指标为

$$\bar{J}^*(k) = x^*(k/k)^T L + u^*(k/k)^T R + x^*(k+1/k)^T P^*$$

其中:  $P^* = (Q^*)^{-1}, Q^* = a_1^* Q_{INI} + a_2^* Q_0, \omega^* = (a_1^* Y_{INI} + a_2^* Y_0)$ .

由于  $[A(k), B(k)]$ , 总能找到一系列  $c_1, c_2, \dots, c_L, c_l = 1, c_l \geq 0$ , 使其满足  $[A(k), B(k)] = \sum_{l=1}^L c_l [A_l, B_l]$ . 在  $k+1$  时刻, 有  $x(k+1/k+1) = \sum_{l=1}^L c_l x_l(k+1/k)$ ,

$$x_l(k+1/k) = A_l x(k) + B_l u^*(k/k), \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

进而可构造  $u(k+1/k+1), a_1^*, a_2^*, b = u_{max}^2$  作为  $k+1$  时刻的一组解. 其中  $u(k+1/k+1) = F(k) x(k+1/k+1)$ . (15) 式中

$$F(k) = Y^* (Q^*)^{-1}, Y^* = a_1^* Y_{INI} + a_2^* Y_0, Q^* = a_1^* Q_{INI} + a_2^* Q_0,$$

$$u_{max} = [u_{1,max}, \dots, u_{j,max}, \dots, u_{m,max}]^T.$$

由于  $x(k+1/k+1) \in (a_1^* Q_{INI} + a_2^* Q_0)$ , 在状态反馈(15) 下,  $x(k+2/k+1) \in (a_1^* Q_{INI} + a_2^* Q_0)$ , 即仍满足式(11). 在控制时域  $N = 1$  时, 式(13) 可简化为  $u(k)^T R \leq b$ . 结合式(2) 可知,  $b = u_{max}^2$  一定能满足条件(13). 因此  $u(k+1/k+1), a_1^*, a_2^*$  和  $b$  是  $k+1$  时刻优化问题(14) 的可行解, 其相对应的性能指标为

$$\begin{aligned} \bar{J}(k+1) = & x(k+1/k+1)^T L + u(k+1/k+1)^T R + x(k+2/k+1)^T P^* = \\ & x^*(k+1/k)^T L + u^*(k+1/k)^T R + x^*(k+2/k)^T P^*. \end{aligned}$$

由文献[2] 知, 对于任何  $[A(k+i), B(k+i)] (i \geq 0)$ , 以固定的状态反馈  $F(k+i) = Y^* (Q^*)^{-1} (i \geq 0)$ , 则满足  $x^*(k+2/k)^T P^* - x^*(k+1/k)^T P^* + x^*(k+1/k)^T L + u^*(k+1/k)^T R \leq 0$ .

因此

$$\begin{aligned} \bar{J}(k+1) - \bar{J}^*(k) = & x^*(k/k)^T L - u^*(k/k)^T R < 0, \\ \bar{J}^*(k+1) - \bar{J}(k+1) < & \bar{J}^*(k). \end{aligned}$$

因为 Lyapunov 函数递减, 所以设计的鲁棒预测控制器可镇定系统(1), 使闭环系统渐近稳定.

#### 5 仿真验证

下面通过仿真验证控制算法的有效性. 采用文献[6] 中的参考系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

参数选取为:  $m_1 = m_2 = 1, 0.5 \leq k \leq 1.2$ , 输

入约束为  $\|u\| \leq 1$ ,  $L = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ,  $R = 0.1$ , 采样时间为  $0.1$  s, 初始状态  $x(0) = [0, 0, 1, 1]^T$ .

选取一系列结构参数值  $k(0.5 \leq k \leq 1.2)$ , 分别对算法 1 ~ 算法 3 进行仿真, 得到的控制性能值见表 1 (标称系统取  $k = 1, N = 2$ ).  $r_1 = 0.609$  是满足算法 2 可行的最小值, 在此取  $r_1 = 0.609$ ;  $c_1 = 2987$  是满足算法 3 可行的最小值, 在此取  $c_1 = 3000$ .

表 1 不同结构参数  $k$  和不同算法得到的性能指标

结构参数	算法 1	算法 2	算法 3
$1 + 0.2e^{-0.5t}\cos(10t)$	793	4851	275
1	793	4851	275
1.2	744	4624	222
0.5	1174	6331	709

选取  $k = 1 + 0.2e^{-0.5t}\cos(10t)$ ,  $c_1 = 3000, N = 2$ , 对算法 3 仿真得到闭环状态轨迹如图 1 所示.

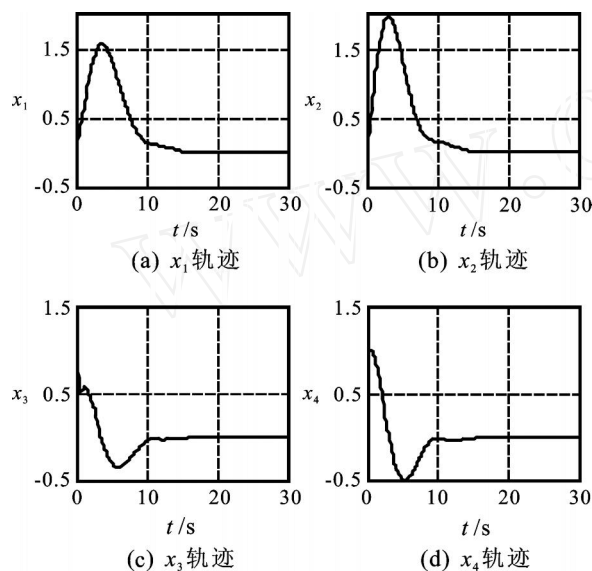


图 1 闭环状态轨迹

图 1 表明, 本文设计的控制器是一种稳定且有效的约束预测控制器. 由表 1 可知, 相比算法 1 和算法 2, 算法 3 取得了更优的控制性能.

## 6 结论

本文针对多包描述的不确定性系统, 采用离线设计、在线综合的方法, 设计了一种改进的鲁棒约束预测控制器. 该设计方法减少了以往文献设计方法的保守性, 具有更大的适用范围, 且一般能得到更优

的控制效果. 仿真算例验证了本文设计方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality [J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [2] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.
- [3] Wan Z Y, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities [J]. Automatica, 2003, 39(7): 837-846.
- [4] 丁宝苍, 邹涛, 李少远. 时变不确定系统的变时域离线鲁棒预测控制 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 240-244.  
(Ding B C, Zou T, Li S Y. Varying-horizon off-line robust predictive control for time-varying uncertain systems [J]. Control Theory and Applications, 2006, 23(2): 240-244.)
- [5] 丁宝苍, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合 [J]. 自动化学报, 2006, 32(2): 304-310.  
(Ding B C, Yang P. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal performance cost [J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 23(2): 240-244.)
- [6] Wan Z Y, Kothare M V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set [J]. Systems and Control Letters, 2003, 48(5): 375-383.
- [7] Pluyms B, Suykens J A, Moor B D. Min-max feedback MPC using a time-varying terminal constraint set and comments on "Efficient robust constrained model predictive control with a time-varying terminal constraint set" [J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(12): 1143-1148.
- [8] Wan Z Y, Pluyms B, Kothare M V, et al. Comments on "Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set" by Wan and Kothare [J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(7): 618-621.
- [9] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, et al. LMI control toolbox: For use with MATLAB [M]. Natick: The Mathworks, 1995.