第 24 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2009 年 1 月
Vol. 24 No. 1 Control and Decision Jan. 2009

文章编号: 1001-0920(2009)01-0076-05

时滞相关不确定随机系统的鲁棒 H∞控制

陆宏谦, 周武能
(东华大学 信息科学与技术学院, 上海 201620)

摘 要: 针对具有时变时滞和范数有界不确定性的随机系统,研究其随机镇定和鲁棒 H_∞控制问题. 设计状态反馈控制器,使得对所有可容许的不确定性,闭环系统随机稳定且满足给定的 H_∞性能指标. 利用线性矩阵不等式(LMI)及自由权矩阵技术得到系统镇定的一个充分条件,该充分条件由一组时滞相关的矩阵不等式表达. 最后通过仿真数例表明了所提出方法的有效性.

关键词: H_∞控制; 不确定系统; 鲁棒随机稳定; 线性矩阵不等式; 伊藤微分
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Delay-dependent robust H∞ control for uncertain stochastic systems

LU Hong-qian, ZHOU Wu-neng
(College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China. Correspondent: ZHOU Wu-neng, E-mail: wnzhou@dhu.edu.cn)

Abstract: This paper deals with the problems of robust stochastic stabilization and robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with a time-varying delay in the state and norm-bounded uncertainty. The problem is to design state feedback controllers such that the resulting closed-loop system is mean-square asymptotically stable for all admissible uncertainties, as well as satisfying a prescribed H_∞ performance. Delayed-dependent sufficient conditions for the stability of the system are derived by using linear matrix inequalities and introducing free weighting matrices. Finally, numerical examples show the effectiveness of the proposed method.

Key words: H_∞ control; Uncertain system; Robust stochastic stabilization; Linear matrix inequality; Ito differentiation

1 引 言

时滞系统的稳定性准则一般可分为两类:时滞无关稳定性准则和时滞相关稳定性准则. 由于许多实际系统中的时滞都是有界的,时滞相关的准则相对于时滞无关的准则,其保守性要低一些. 对于时滞系统稳定性的研究近年来得到了广泛的关注. 文献[1-3]利用自由权矩阵表示牛顿-莱布尼兹公式中各项的关系,获得了保守性较低的时滞相关的稳定条件. 文献[4,5]分别讨论了非线性系统和离散系统中的时滞现象.

近年来,随机模型的鲁棒稳定性分析已成为控制领域的一个重要研究内容. 文献[6,7]对于一类不确定随机时滞系统采用线性矩阵不等式(LMI)方法,分别获得了一类不确定随机时滞系统的稳定性条件. [8]讨论了一类具有时变时滞的伊藤(Ito)型随机系统的鲁棒 H_∞控制问题. [9]讨论了一类具有多时滞伊藤型随机系统的输出反馈控制问题. [10]研究了多时滞随机系统的状态反馈和滤波问题. 然而,这些有关随机系统的研究结果大多是时滞无关的.

时滞无关稳定控制要求系统对于任意大小的时滞都应保持稳定,因而具有较大的保守性,因此时滞相关不确定随机系统反馈控制研究具有重要意义. 本文研究具有时变时滞不确定性随机系统的鲁棒 H_∞控制问题,通过构造状态反馈控制器,使得对所有容许的不确定参数,闭环系统稳定并且满足给定的 H_∞性能指标. 本文利用线性矩阵不等式和自由权矩阵方法得到所考虑系统鲁棒 H_∞性能指标的一个充分条件,并且通过求解一组给定的线性矩阵不等式,得到了鲁棒 H_∞状态反馈控制器的设计方法.

收稿日期: 2007-11-26; **修回日期**: 2008-04-25.
基金项目: 国家 863 计划重点项目(2008AA042902).
作者简介: 陆宏谦(1976—),男,山东临沂人,博士生,从事广义系统、随机系统的研究; 周武能(1959—),男,湖北荆州人,教授,博士生导师,从事广义系统、随机系统等研究.

2 问题描述

考虑如下具有时变时滞的不确定随机系统:

(Σ):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x(t) = \\
&[(A+\Delta A(t))x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-\\
&\tau(t))+(B+\Delta B(t))u(t)+B_v v(t)]\mathrm{d}t+\\
&[(E+\Delta E(t))x(t)+(E_d+\Delta E_d(t))x(t-\\
&\tau(t))+E_v v(t)]\mathrm{d}\omega(t),
\end{aligned}\tag{1}$$

$$z(t) = Cx(t)+Du(t),\tag{2}$$

$$x(t) = \phi(t),\ \forall t\in[-h,0].\tag{3}$$

其中: $x(t)\in\mathrm{R}^n$ 是状态向量; $u(t)\in\mathrm{R}^m$ 是控制输入; $v(t)\in\mathrm{R}^p$ 是属于 $L_2[0,\infty)$ 的扰动输入; $z(t)\in\mathrm{R}^q$ 是控制输出; $\omega(t)$ 是满足 $\mathrm{E}\{\mathrm{d}\omega(t)\}=0$ 和 $\mathrm{E}\{\mathrm{d}\omega(t)^2\}=\mathrm{d}t$ 的一维布朗运动; A,A_d,B,B_v,C,D,E,E_d 和 E_v 是已知常矩阵; $\Delta A(t),\Delta A_d(t),\Delta B(t),\Delta E(t)$ 和 $\Delta E_d(t)$ 是适当维数的不确定矩阵, 且具有如下形式:

$$\begin{aligned}
&[\Delta A(t)\quad \Delta A_d(t)\quad \Delta B(t)\quad \Delta E(t)\quad \Delta E_d(t)] = \\
&MF(t)[N_a\quad N_{ad}\quad N_b\quad N_e\quad N_{ed}],
\end{aligned}\tag{4}$$

这里: M,N_a,N_{ad},N_b,N_e 和 N_{ed} 是适当维数的常矩阵; 而 $F(t)$ 是具有 Lesbesgue 可测元的不确定矩阵, 且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leq I,\ \forall t.\tag{5}$$

另外, 时滞 $\tau(t)$ 是满足条件

$$0<\tau(t)\leq h,\ \dot{\tau}(t)\leq\mu<1\tag{6}$$

的时变连续函数. 其中 μ 和 h 是常数, 并且初始条件 $\phi(t)$ 表示 $[-h,0]$ 上的连续初始向量函数.

系统(1) 的标称随机系统表示如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x(t) &= [A(t)x(t)+A_d x(t-\tau(t))]\mathrm{d}t+\\
&[Ex(t)+E_d x(t-\tau(t))]\mathrm{d}\omega(t).
\end{aligned}\tag{7}$$

引理 1[11]　给定适当维数矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}},H,E$ 和 $R=R^{\mathrm{T}}>0$, 则

$$Q+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0,$$

对任意满足 $F^{\mathrm{T}}F\leq R$ 的 F 成立, 当且仅当存在实数 $\lambda>0$, 使得

$$Q+\lambda HH^{\mathrm{T}}+\lambda^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0.$$

利用牛顿 - 莱布尼兹公式, 对于任意适当维数的矩阵 N_1 和 N_2, 有

$$\begin{aligned}
&2[x^{\mathrm{T}}(t)N_1+x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))N_2][x(t)-\\
&\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s-x(t-\tau(t))]=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

另一方面, 对于任意适当维数矩阵 $X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ * & X_{22}\end{bmatrix}\geq 0$, 有

$$\mu\xi^{\mathrm{T}}(t)X\xi(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t)X\xi(t)\mathrm{d}s\geq 0.\tag{9}$$

其中: " * "是由矩阵的对称性得到的矩阵块, 而

$$\xi(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))]^{\mathrm{T}}.$$

3 主要结果

首先考虑如下状态反馈控制器:

$$u(t)=Kx(t),\ K\in R^{m\times n}.\tag{10}$$

当系统(Σ) 中 $F(t)=0$ 和 $v(t)=0$ 时, 将控制器代入系统(1) 可以得到如下的闭环系统:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x(t) &= [A_{cK}(t)x(t)+A_d x(t-\tau(t))]\mathrm{d}t+\\
&[Ex(t)+E_d x(t-\tau(t))]\mathrm{d}\omega(t),
\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$A_{cK}=A+BK.\tag{12}$$

定理 1　给定标量 $h>0$ 和 $\mu<1$, 随机时滞系统(11) 是随机可镇定的, 如果存在正定矩阵 L,R, 半正定矩阵 W 和 $Y=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ * & Y_{22}\end{bmatrix}\geq 0$, 以及任意适当维数的矩阵 M_1,M_2 和 V, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & h(LA^{\mathrm{T}}+V^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}) & LE^{\mathrm{T}}\\ * & \Phi_{22} & hLA_d^{\mathrm{T}} & LE_d^{\mathrm{T}}\\ * & * & -hR & 0\\ * & * & * & -L\end{bmatrix}<0,\tag{13a}$$

$$\Psi=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & M_1\\ * & Y_{22} & M_2\\ * & * & LR^{-1}L\end{bmatrix}\geq 0.\tag{13b}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= LA^{\mathrm{T}}+AL+BV+V^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\\
&\quad M_1+M_1^{\mathrm{T}}+W+hY_{11},\\
\Phi_{12} &= A_dL-M_1+M_2^{\mathrm{T}}+Y_{12},\\
\Phi_{22} &= -M_2-M_2^{\mathrm{T}}-(1-\mu)W+hY_{22}.
\end{aligned}$$

此时系统的状态反馈控制律为

$$u(t)=Kx(t),\ K=VL^{-1}.\tag{14}$$

证明　构造如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$\begin{aligned}
V(x_t) &= x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s+\\
&\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}\tag{15}$$

其中 P,Q 和 Z 是待定正定矩阵. 根据伊藤公式计算式(15) 对时间的微分可得[12]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}V(x_t) = \\
&LV(x_t)\mathrm{d}t+[hg(x)\mathrm{d}\omega(t)]^{\mathrm{T}}f(x)+\\
&[h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)g(x)+2x(t)^{\mathrm{T}}Pg(x)]\mathrm{d}\omega(t).
\end{aligned}\tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
&f(x)=A_{cK}(t)x(t)+A_d x(t-\tau(t)),\\
&g(x)=Ex(t)+E_d x(t-\tau(t)),\\
&LV(x_t)=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x^{\mathrm T}(t)[PA_{cK}+A_{cK}^{\mathrm T}P]x(t)+ \\
& 2x^{\mathrm T}(t)PA_d x(t-\tau(t))+x^{\mathrm T}(t)Qx(t)- \\
& (1-\dot\tau(t))x^{\mathrm T}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t))+ \\
& hf(x)^{\mathrm T}Zf(x)-\int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z\dot x(s)\mathrm ds+ \\
& g(x)^{\mathrm T}Pg(x)\le \\
& x^{\mathrm T}(t)[PA_{cK}+A_{cK}^{\mathrm T}P]x(t)+ \\
& 2x^{\mathrm T}(t)PA_d x(t-\tau(t))+x^{\mathrm T}(t)Qx(t)- \\
& (1-\mu)x^{\mathrm T}(t-\tau(t))Qx(t-\tau(t))+ \\
& hf(x)^{\mathrm T}Zf(x)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z\dot x(s)\mathrm ds+ \\
& g(x)^{\mathrm T}Pg(x)+2[x^{\mathrm T}(t)N_1+x^{\mathrm T}(t-\tau(t))N_2]\times \\
& \Big[x(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x(s)\mathrm ds-x(t-\tau(t))\Big]+ \\
& h\xi^{\mathrm T}(t)X\xi(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\xi^{\mathrm T}(t)X\xi(t)\mathrm ds= \\
& \xi^{\mathrm T}(t)\Xi\xi(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\zeta^{\mathrm T}(t)\Theta\zeta(t)\mathrm ds.
\end{aligned}
$$

这里

$$
\Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12}\\ * & \Xi_{22}\end{bmatrix},\ \Theta=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & N_1\\ * & X_{22} & N_2\\ * & * & Z\end{bmatrix}.
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Xi_{11}= & PA_{cK}+A_{cK}^{\mathrm T}P+N_1+N_1^{\mathrm T}+Q+ \\
& hA_{cK}^{\mathrm T}ZA_{cK}+E^{\mathrm T}PE+hX_{11}, \\
\Xi_{12}= & PA_d-N_1+N_2^{\mathrm T}+Q+ \\
& hA_{cK}^{\mathrm T}ZA_d+E^{\mathrm T}PE_d+hX_{12}, \\
\Xi_{11}= & -N_2-N_2^{\mathrm T}-(1-\mu)Q+ \\
& hA_d^{\mathrm T}ZA_d+E_d^{\mathrm T}PE_d+X_{12}, \\
\xi(t)= & [x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-\tau(t))]^{\mathrm T}, \\
\zeta(t)= & [x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\quad \dot x^{\mathrm T}(s)]^{\mathrm T}.
\end{aligned}
$$

对式(13a)左乘和右乘 $\mathrm{diag}(L^{-1},L^{-1},R^{-1})$,对式(13b)左乘和右乘 $\mathrm{diag}(L^{-1},L^{-1},L^{-1})$,并设 $K=VL^{-1}$, $P=L^{-1}$, $Q=L^{-1}WL^{-1}$, $X=\mathrm{diag}(L^{-1},L^{-1})Y\mathrm{diag}(L^{-1},L^{-1})$, $Z=R^{-1}$, $N_1=L^{-1}M_1L^{-1}$, $N_2=L^{-1}M_2L^{-1}$. 根据 Schur 定理可得 $\Xi<0$, $\Theta\ge0$. 从而对于所有的 $[x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-\tau(t))]^{\mathrm T}\ne0$ 可以得到 $LV(x_t)<0$. 则根据文献[8]和[13]中的定义 1 可知闭环系统(11)是随机稳定的. □

注 1 因为式(13b)存在非线性项 $LR^{-1}L$,所以(13b)不是线性矩阵不等式. 为了解决此问题,一种简单的方法就是固定 R,也可以设定 $R=\varepsilon L(\varepsilon>0)$,然后通过一维搜索来求解不等式(13). 但这样的处理会带来一定的保守性. 为了降低保守性,也可以采用文献[14]中提出的算法,将定理 1 转化为如下的基于 LMI 的非线性最小化问题:

$$
\min\ \mathrm{Trace}(SS_1+LL_1+RR_1),
$$

$$
\text{s.t. 式(13a)和}\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & M_1\\ * & Y_{22} & M_2\\ * & * & S\end{bmatrix}\ge0,
$$

$$
\begin{bmatrix}S_1 & L_1\\ L_1 & R_1\end{bmatrix}\ge0,\ \begin{bmatrix}S & I\\ I & S_1\end{bmatrix}\ge0,
$$

$$
\begin{bmatrix}L & I\\ I & L_1\end{bmatrix}\ge0,\ \begin{bmatrix}R & I\\ I & R_1\end{bmatrix}\ge0,
$$

$$
L>0,\ S>0.
$$

当系统(Σ)中 $F(t)=0$, $V(t)\ne0$ 时,用控制律(10)可得如下闭环系统:

$$
\begin{cases}
\mathrm dx(t)=[A_{cK}(t)x(t)+A_dx(t-\tau(t))+ \\
\qquad B_vv(t)]\mathrm dt+[Ex(t)+E_dx(t- \\
\qquad \tau(t))+E_vv(t)]\mathrm d\omega(t), \\
z(t)=(C+DK)x(t), \\
x(t)=\phi(t),\ \forall(t)\in[-h,0],
\end{cases}
\tag{17}
$$

其中 $A_{cK}=A+BK$.

定理 2 给定标量 $\gamma>0$, $h>0$ 和 $\mu<1$,随机时滞系统(17)是鲁棒可镇定的,并具有 H_∞ 性能 γ,如果存在正定矩阵 L, R,半正定矩阵 W 和 $Y=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ * & Y_{22}\end{bmatrix}\ge0$,以及任意适当维数的矩阵 M_1, M_2 和 V,使得式(13b)和以下 LMI 成立:

$$
\Phi=\begin{bmatrix}
\Phi_{11} & \Phi_{12} & B_v & \Phi_{14} & LE^{\mathrm T} & \Phi_{16}\\
* & \Phi_{22} & 0 & hLA_d^{\mathrm T} & LE_d^{\mathrm T} & 0\\
* & * & -\gamma^2 I & 0 & E_v^{\mathrm T} & 0\\
* & * & * & -hR & 0 & 0\\
* & * & * & * & -L & 0\\
* & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix}<0.
\tag{18}
$$

其中:Φ_{11}, Φ_{12} 和 Φ_{22} 的定义与式(13)相同, $\Phi_{14}=h(LA^{\mathrm T}+V^{\mathrm T}B^{\mathrm T})$, $\Phi_{16}=LC^{\mathrm T}+V^{\mathrm T}D^{\mathrm T}$. 此时,状态反馈控制律为

$$
u(t)=Kx(t),\ K=VL^{-1}.\tag{19}
$$

证明 根据定理 1 和式(17),可以推出系统(Σ)在应用控制律(19)和 $F(t)=0$ 时的闭环系统是鲁棒随机稳定的.

以下证明对于任意非零 $v(t)\in L_2[0,\infty)$,下述不等式成立:

$$
\|z(t)\|_{E2}<\gamma\|v(t)\|_2,\tag{20}
$$

其中 $\|z(t)\|_{E2}$ 的定义可参阅文献[8]. 现假定零初始条件,即对于 $t\in[-h,0]$, $x(t)=0$. 根据伊藤微分公式可得

$$
\mathrm E\{v(x(t),t)\}=\mathrm E\Big\{\int_0^t LV(x(s),s)\Big\}\mathrm ds,\tag{21}
$$

其中 LV 的定义与定理 1 中的 LV 相似, E 表示数学

期望.

为了证明系统满足 H_∞ 性能(20),定义

$$J(t) = \mathrm{E}\left\{\int_0^t [z(s)^{\mathrm T} z(s) - \gamma^2 v(s)^{\mathrm T} v(s)]\mathrm{d}s\right\}, \tag{22}$$

其中 $t > 0$. 采用定理 1 的证明方法,可得以下结论:对于所有的 $t > 0$,有

$$\begin{aligned} J(t) &= \mathrm{E}\left\{\int_0^t [z(s)^{\mathrm T} z(s) - \gamma^2 v(s)^{\mathrm T} v(s) + \\ &\quad LV(x(s),s)]\mathrm{d}s\right\} - \mathrm{E}\{V(x(t),t)\} \le \\ &\quad \mathrm{E}\left\{\int_0^t [z(s)^{\mathrm T} z(s) - \gamma^2 v(s)^{\mathrm T} v(s) + \\ &\quad LV(x(s),s)]\mathrm{d}s\right\} < 0. \end{aligned} \tag{23}$$

根据式(21),(22)和(23),可推知式(20)成立. □

根据定理 2,可将结果推广到具有时变结构的不确定性系统(Σ). 将定理 2 推广,可得如下结论:

定理 3　给定标量 $\gamma > 0$, $h > 0$ 和 $\mu < 1$,随机时滞系统(Σ)是鲁棒可镇定且具有 H_∞ 性能 γ,如果存在正定矩阵 L, R,半正定矩阵 W 和 $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ * & Y_{22} \end{bmatrix} \ge 0$,以及任意适当维数的矩阵 M_1, M_2, V 和标量 $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$,使得式(13b)和以下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & B_v & \Pi_{14} & LE^{\mathrm T} & \Pi_{16} & \Pi_{17} & \Pi_{18} \\ * & \Pi_{22} & 0 & \Pi_{24} & LE_d^{\mathrm T} & 0 & \Pi_{27} & \Pi_{28} \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & E_v^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= LA^{\mathrm T} + AL + BV + V^{\mathrm T}B^{\mathrm T} + \\ &\quad M_1 + M_1^{\mathrm T} + W + hY_{11} + \lambda MM^{\mathrm T}, \\ \Pi_{12} &= A_d L - M_1 + M_2^{\mathrm T} + Y_{12}, \\ \Pi_{14} &= h(LA^{\mathrm T} + V^{\mathrm T}B^{\mathrm T} + \lambda MM^{\mathrm T}), \\ \Pi_{16} &= LC^{\mathrm T} + V^{\mathrm T}D^{\mathrm T}, \\ \Pi_{17} &= LN_a^{\mathrm T} + V^{\mathrm T}N_b^{\mathrm T},\ \Pi_{18} = LN_e^{\mathrm T}, \\ \Pi_{22} &= -M_2 - M_2^{\mathrm T} - (1-\mu)W + hY_{22}, \\ \Pi_{24} &= hLA_d^{\mathrm T},\ \Pi_{27} = LN_{ad}^{\mathrm T}, \\ \Pi_{28} &= LN_{ed}^{\mathrm T},\ \Pi_{44} = -hR + \lambda h^2 MM^{\mathrm T}, \\ \Pi_{55} &= \varepsilon MM^{\mathrm T} - L, \end{aligned}$$

此时,状态反馈控制律为

$$u(t) = Kx(t),\quad K = VL^{-1}. \tag{25}$$

证明　分别用 $A + MF(t)N_a$, $A_d + MF(t)N_{ad}$, $B + MF(t)N_b$, $E + MF(t)N_e$ 和 $E_d + MF(t)N_{ed}$ 替换式(18)中的 A, A_d, B, E 和 E_d,并利用 Schur 定理和引理 1 可以推出定理 3 成立. □

注 2　本文针对不确定随机时滞系统(Σ),根据定理 1～定理 3 分别提出了新的鲁棒随机稳定和鲁棒 H_∞ 控制的充分条件. 虽然在文献[8,9]中有相似的研究,但其结果都是时滞无关的,这可能导致系统在时滞有界或时滞较小时具有一定的保守性.

注 3　如果定理 3 中的 h, M_1, M_2 和 R 均为 0,则定理 3 可简化为文献[8]中定理 2 的形式. 因此,定理 3 可视为文献[8]中定理 2 在时滞相关条件下的推广.

4　数值实例

考虑具有范数有界不确定性的时变时滞随机系统(Σ),其系数矩阵具有如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & -1 \\ 0.3 & 0.3 & -1.2 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & -0.3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B_v = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & -0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} &C = [0.5\ \ 0.1\ \ 0],\ D = [0.1\ \ -0.3], \\ &F = \sin(3t),\ N_A = [0.1\ \ 0\ \ 0.1], \\ &N_{ad} = [0\ \ 0.1\ \ 0.1],\ N_e = [0.1\ \ 0.2\ \ 0], \\ &N_{ed} = [0\ \ 0.1\ \ 0.2],\ N_B = [0.2\ \ 0]. \end{aligned}$$

设 $R = 0.9L$,当 $\mu = 0.9$ 时,使用 LMI 工具箱中的 mincx 求解器求解定理 3 的矩阵变量,可以得到时滞 h 的最大上界为 0.8. 而文献[8]中定理 2 的结果与时滞 h 无关,通过 LMI 工具箱求解得到时滞变化率 μ 的最大上界是 0.6. 图 1 给出了当 $h = 0.8$ 时,定理 3 中的 γ 与时滞变化率 μ 的关系和文献[8]定理 2 中 γ 与时滞变化率 μ 的关系(由于当 $\mu = 0.6$ 时 γ 的取值较大,为便于观察,图 1 的纵坐标取值限定在 2).

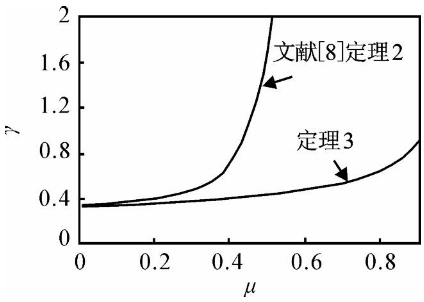

图 1 H∞性能指标 γ 与时滞变化率 μ 的关系

设 $R = 0.9L$,当 $\mu = 0.9$, $h = 0.8$ 时,用 LMI 工具箱求解矩阵不等式(24) 和(13b),可得到如下状态反馈控制器增益矩阵:

$$K = \begin{bmatrix} -0.5701 & -0.4199 & 0.4371 \\ -0.1926 & -1.1789 & 0.9133 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

将控制律 $u(t) = Kx(t)$ 应用于系统(Σ),并设 $\tau(t) = 0.4 + 0.4\sin((9/4)t)$ (满足 $\tau(t) \le 0.8$, $\dot{\tau}(t) \le 0.9$),可以得到系统的状态响应曲线如图 2 所示.

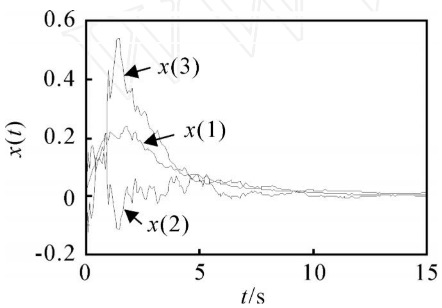

图 2 系统(Σ) 状态响应

以上仿真示例说明本文所提出的方法是有效的.

5 结 论

本文针对一类具有不确定参数的时变时滞随机系统,利用线性矩阵不等式及自由权矩阵技术,推导出所考虑系统鲁棒 H_∞ 随机镇定的充分条件,该充分条件由一组时滞相关的线性矩阵不等式表达. 通过 LMI 工具箱求解这些线性矩阵不等式,得到相应的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法. 数值仿真例子表明了本文所提出的控制器设计方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.

[2] He Y, Wang Q G, Xie L H, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay [J]. Automatic Control, 2007, 52(2): 293-299.

[3] 肖伸平, 吴敏. 线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性新判据[J]. 控制与决策, 2008, 23(1): 110-113.
(Xiao S P, Wu M. New delay-dependent robust stability criteria for linear systems with time-delay[J]. Control and Decision, 2008, 23(1): 110-113.)

[4] 郭亚锋, 李少远. 一类不确定非线性时变时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计[J]. 控制与决策, 2008, 23(3): 315-319.
(Guo Y F, Li S Y. Robust H_∞ filter designing for a class of uncertain nonlinear time-varying delay systems [J]. Control and Decision, 2008, 23(3): 315-319.)

[5] 李琴, 张庆灵, 安祎春. 不确定离散广义系统的时滞相关非脆弱无源控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 907-911.
(Li Q, Zhang Q L, An Y C. Delay-dependent nonfragile passive control for uncertain discrete-time singular systems[J]. Control and Decision, 2007, 22(8): 907-911.)

[6] Yue D, Han Q L. Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay, nonlinearity, and Markovian switching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(2): 217-222.

[7] Chen W H, Guan Z H, Lu X. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays: An LMI approach [J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(6): 547-555.

[8] Xu S Y, Chen T. Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(12): 2089-2094.

[9] Xu S Y, Chen T. H_∞ output feedback control for uncertain stochastic systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2004, 40(12): 2091-2098.

[10] Gershon E, Shaked U, Berman N. H_∞ control and estimation of retarded state-multiplicative stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(9): 1773-1779.

[11] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.

[12] Mao X, Koroleva N, Rodkina A. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations [J]. Systems and Control Letters, 1998, 35(5): 325-336.

[13] Kolmanovskii V B, Myshkis A D. Applied theory of functional differential equations [M]. Netherlands: Kluwer, 1992.

[14] He Y, Wang Q G, Lin C. An improved H_∞ filter design for systems with time-varying interval delay[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2006, 53(11): 1235-1239.