文章编号: 1001-0920(2009)01-0101-06

一类含分布与离散时滞的线性时滞控制系统的 H∞控制

柴　琳[a,b,c], 程　明[c], 费树岷[a,b], 翟军勇[a,b]
(东南大学 a. 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室, b. 自动化学院, c. 电气工程学院, 南京 210096)

摘　要: 针对一般时滞型线性系统,基于一种新型时变线性矩阵不等式方法,采用基于"descriptor form"的 Lyapunov-Krasovskii 泛函和带分布时滞记忆的状态反馈控制,研究了使该类系统稳定且满足 H_∞特性的控制器设计问题,并给出其可解的充分条件. 最后通过仿真例子验证了结论的有效性.

关键词: 分布时滞; 线性矩阵不等式; 基于 descriptor form 的 Lyapunov-Krasovskii 泛函; 带记忆状态反馈; H_∞控制
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

A type of H∞ control on a class of linear time-delay systems with discrete and distribute delays

CHAI Lin[a,b,c], *CHENG Ming*[c], *FEI Shu-min*[a,b], *ZHAI Jun-yong*[a,b]
(a. Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Engineering Systems of Ministry of Education, b. School of Automation, c. School of Electricity, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: CHAI Lin, E-mail: chailin_1 @163.com)

Abstract: Based on a new type of method of dynamical LMI, by using a kind of Lyapunov-Krasovskii functional and the memoryless and memory compound state feedback control, the problem of H_∞ controller design is discussed for the linear time-delay control systems with discrete and distribute delays. The sufficient condition of its solution is given. Finally, simulation results show the effectiveness of the conclusion.

Key words: Distributed delay; LMI; Lyapunov-Krasovskii functional based on descriptor form; Memory state feedback; H_∞ control

1 引　言

近年来,对于时滞系统的 H_∞控制已经取得了较大发展[1-9]. 在分布时滞系统的研究中[9-11],镇定控制和 H_∞控制往往采用无记忆状态反馈控制[9,11],即使采用了含分布时滞的状态反馈控制,得到的带记忆控制矩阵却为零解[10],这在分布时滞参数对系统性能影响较大时无能为力. 此外,以往研究的分布时滞系统中,分布时滞环节的特点往往不具有文献[12]中"有限时滞最普通的线性系统"的复杂特点[1-3,9],因此,针对该类线性时滞系统的带分布时滞记忆的 H_∞状态反馈控制的研究显得十分必要.

本文针对分布时滞环节具有文献[12]中的"有限时滞最普通的线性系统"特点的分布时滞系统进行 H_∞控制,在分析了以往对分布时滞系统进行带记忆控制为何只能得到零矩阵的原因之后,找到了如何提高可解性的方法,即让分布时滞参数同时出现在带记忆控制的记忆项和分布时滞记忆项的积分下限中,并使这两种带记忆状态反馈控制项的矩阵增益相同. 这样在推导得到的矩阵不等式中,该矩阵增益便不再为零项,从而表现出比无记忆状态反馈控制要好的可解性. 而对于具有"有限时滞最普通的线性系统"特点的分布时滞环节,为能在求导过程中充分体现该环节的特点,制定出针对该特性的基于"descriptor form"的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,进而得到了一个时变的线性矩阵不等式(DLMI). 通过一个仿真示例验证了关于上述复杂的分布时滞系统控制方案的有效性.

2 问题的提出

收稿日期: 2007-10-14; **修回日期**: 2008-03-20.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60835001); 国家自然科学基金项目(60574006,60804017); 教育部博士点基金项目(20070286039); 江苏省博士后基金项目(1660631171).
作者简介: 柴琳(1978—),女,南京人,博士后,从事时滞系统控制、自适应控制等研究; 费树岷(1961—),男,安徽宣城人,教授,博士生导师,从事非线性控制系统设计与综合、鲁棒控制等研究.

根据文献[12]中提出的“有限时滞最普通的线性系统”模型，考虑到实际中会出现的输入时滞情况，本文研究如下一种输入时滞的有限时滞最普通的线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau_1) + B_1 w(t) + \\ \qquad \displaystyle\int_{-r}^{0} A(t,\theta)\, x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \\ \qquad B_2 u(t-\tau_2),\ t > 0; \\ z(t) = Cx(t) + Du(t); \\ x(t) = \phi(t),\ \forall t \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t) \in R^{n}$ 为状态向量；$u(t) \in R^{n_2}$ 为控制输入向量；$w(t)$ 为定义在 $[-r, +\infty) \to R^{n_1}$ 上的均方有界的函数；$z(t) \in R^{n_3}$ 为系统受控向量；A, A_1, B_1, B_2, C, D 为具有相应适当维数的矩阵. $\forall t$，矩阵函数 $A(t,\theta)$ 关于 θ 可积，且存在映射在 $(-\infty, +\infty) \to R$ 上的函数 $a(t) > 0$，在 $(-\infty, +\infty)$ 的每个紧集上 Lesbesgue 可积，使得下式成立：

$$\theta \le \left\| \int_{-r}^{0} A(t,\theta)\phi(0)\,\mathrm{d}\theta \right\| \le a(t)\, \|\phi\|,$$
$$t \in R,\ \phi \in C([-r, 0], R^{n}). \tag{2}$$

本文的目的是：对于给定的常数 $\gamma > 0$，如何设计一个带记忆的状态反馈控制

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t-\tau_1) + K_3\left[x(t-r) + \int_{-r}^{0} x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\right], \tag{3}$$

使得系统(1)是渐近稳定的，且满足 $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$（这里 $\|\cdot\|_2$ 是 L_2 范数）. 这里之所以加入分布时滞记忆项 $K_3 \int_{-r}^{0} x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta$，是为了使控制器能够对系统(1)中的相应分布时滞项进行带记忆控制. 关于该种控制方法在可解性上的优越性可参考本文注 1 中的讨论.

3　主要结果

根据式(1)和(3)可得闭环系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau_1) + \\ \qquad B_2 K_2 x(t-\tau_1-\tau_2) + \\ \qquad B_1 w(t) + B_2 K_3\Big[x(t-r-\tau_2) + \\ \qquad \displaystyle\int_{-r}^{0} x(t-\tau_2+\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big] + B_2 K_1 x(t-\tau_2) + \\ \qquad \displaystyle\int_{-r}^{0} A(t,\theta)\, x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta,\ t > 0; \\ z(t) = (C + DK_1)x(t) + DK_2 x(t-\tau_1) + \\ \qquad DK_3\Big[x(t-r) + \displaystyle\int_{-r}^{0} x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big]; \\ x(t) = \phi(t),\ \forall t \in [-\tau, 0]; \\ \tau = \max\{\tau_1+\tau_2, \tau_2 + r\}. \end{cases} \tag{4}$$

采用文献[4]中的“描述形式”，令

$$\begin{cases} y(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau_1) + B_2 K_2 x(t- \\ \qquad \tau_1 - \tau_2) + B_2 K_3\Big[x(t-r-\tau_2) + \\ \qquad \displaystyle\int_{-r}^{0} x(t-\tau_2+\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big] + B_2 K_1 x(t-\tau_2) + \\ \qquad \displaystyle\int_{-r}^{0} A(t,\theta)\, x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta + B_1 w(t), \\ 0 = -y(t) + B_1 w(t) + (A_0 + A_1 + \\ \qquad B_2 K)\, x(t) - \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \overline{A_i} \int_{t-\tau_i}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s + \\ \qquad B_2 K_3 \displaystyle\int_{-r}^{0} x(t-\tau_2+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \\ \qquad \displaystyle\int_{-r}^{0} A(t,\theta)\, x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{cases} \tag{5}$$

其中：$K = \sum_{i=1}^{3} K_i$，$\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$，$\tau_4 = r + \tau_2$，$\overline{A_1} = A_1$，$\overline{A_i} = B_2 K_{i-1}$，$i = 2, 3, 4$.

对于系统(5)，考虑到原系统(1)的特性(2)的影响，选取如下泛函：

$$V(x_t, w_t) = V_1(x_t, w_t) + V_2(x_t, w_t) + V_3(x_t, w_t). \tag{6}$$

其中

$$V_1(x_t, w_t) = x^{\mathrm{T}} P x,$$

$$V_3(x_t, w_t) = \int_{t-\tau_2}^{t} x(s)^{\mathrm{T}} S_1 x(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$V_2(x_t, w_t) = \sum_{i=1}^{4} \int_{-\tau_i}^{0} \int_{t+\theta}^{t} y(s)^{\mathrm{T}} \overline{A_i}^{\mathrm{T}} Q_i^{-1} \overline{A_i}\, y(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \int_{-r}^{0} \int_{t-\tau_2+\alpha}^{t} x(\theta)^{\mathrm{T}} \overline{A_4}^{\mathrm{T}} Q_5^{-1} \overline{A_4}\, x(\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha + l \int_{-r}^{0} \int_{t+\theta}^{t} a^2(t) \sup_{-r \le \theta \le 0} \|x(\tau+\theta)\|^2\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta,$$

P 和 Q_i $(i = 1, \cdots, 5)$ 为正定矩阵，$l > 0$ 为正常数. 则 $V_1(x_t, w_t)$ 沿系统(6)的导数为

$$\dot{V}_1(x_t, w_t) = 2x^{\mathrm{T}} P y(t) =$$

$$2[x^{\mathrm{T}}\ \ y^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$2[x^{\mathrm{T}}\ \ y^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y \\ \overline{A}x - y + B_1 w \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{A_i} \end{bmatrix} \int_{t-\tau_i}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 K_3 \end{bmatrix} \int_{-r}^{0} x(t-\tau_2+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ \displaystyle\int_{-r}^{0} A(t,\theta)\, x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\rho_1+\rho_2-\sum_{i=1}^{4}\eta_i+2[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\begin{bmatrix}P & P_1\\ 0 & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ \bar A x-y+B_1w\end{bmatrix}.$$

其中

$$\bar A=A_0+A_1+B_2K=\sum_{i=0}^{4}\bar A_i,$$

$$\eta_i(t)=-2\int_{t-\tau_i}^{t}[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\bar P\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\bar A_i y(s)\,\mathrm ds,$$

$$\rho_1=2[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\begin{bmatrix}P & P_1\\ 0 & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \bar A_4\end{bmatrix}\int_{t-\tau_2-r}^{t-\tau_2}x(\theta)\,\mathrm d\theta,$$

$$\rho_2=2[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\bar P\int_{-r}^{0}\begin{bmatrix}0\\ A(t,\theta)x(t+\theta)\end{bmatrix}\mathrm d\theta.$$

令 $E=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\bar P=\begin{bmatrix}P & P_1\\ 0 & P_2\end{bmatrix}$,且满足 $E\bar P^{\mathrm T}=\bar PE$.

可得

$$\eta_i\le\tau_i[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\bar P\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}R_i[0\quad I]\bar P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\int_{t-\tau_i}^{t}y^{\mathrm T}(s)\bar A_i^{\mathrm T}R_i^{-1}\bar A_i y(s)\,\mathrm ds,\ i=1,\cdots,4;\qquad(7)$$

$$\rho_1\le r[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\bar P\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}R_5[0\quad I]\bar P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\int_{t-\tau_2-r}^{t-\tau_2}x(\theta)^{\mathrm T}\bar A_4^{\mathrm T}R_5^{-1}\bar A_4x(\theta)\,\mathrm d\theta;\qquad(8)$$

$$\rho_2\le[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\bar P\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}R_6[0\quad I]\bar P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\left\|\int_{-r}^{0}\sqrt{R_6^{-1}}A(t,\theta)x(t+\theta)\,\mathrm d\theta\right\|^2.\qquad(9)$$

由式(1)可知,对于每一个 t,分布时滞项

$$\int_{-r}^{0}A(t,\theta)x(t+\theta)\,\mathrm d\theta$$

中的 $x(t+\theta)$ 都 $\in C[-r,0]$,这与式(2)中的函数 $\phi(\theta)$ 是相符的.因此由式(2)可得

$$\rho_2\le[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}]\bar P\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}R_6[0\quad I]\bar P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+a^2(t)\lambda_{\max}(R_6^{-1})\sup_{-r\le\theta\le0}\|x(t+\theta)\|^2.\qquad(10)$$

此外

$$\begin{aligned}\dot V_2(x_t,w_t)={}&\sum_{i=1}^{4}\int_{-\tau_i}^{0}[y(t)^{\mathrm T}\bar A_i^{\mathrm T}Q_i^{-1}\bar A_iy(t)-\\&y(t+\theta)^{\mathrm T}\bar A_i^{\mathrm T}Q_i^{-1}\bar A_iy(t+\theta)]\mathrm d\theta+\\&rx(t-\tau_2)^{\mathrm T}\bar A_4^{\mathrm T}Q_5^{-1}\bar A_4x(t-\tau_2)-\\&\int_{t-\tau_2-r}^{t-\tau_2}x(\theta)^{\mathrm T}\bar A_4^{\mathrm T}Q_5^{-1}\bar A_4x(\theta)\,\mathrm d\theta+\\&l\int_{-r}^{0}[a^2(t)\sup_{-r\le\theta\le0}\|x(t)\|^2-\\&a^2(t)\sup_{-r\le\theta\le0}\|x(t+\theta)\|^2]\mathrm d\theta,\end{aligned}\qquad(11)$$

$$\dot V_3(x_t,w_t)=x(t)^{\mathrm T}S_1x(t)-x(t-\tau_2)^{\mathrm T}S_1x(t-\tau_2).\qquad(12)$$

取 $R_i=Q_i(i=1,\cdots,5)$, $R_6^{-1}=rlI$,即 $\lambda_{\max}(R_6^{-1})=rl$,由式(6)～(12)可得

$$\begin{aligned}&\dot V(x_t,w_t)=\\&\dot V_1(x_t,w_t)+\dot V_2(x_t,w_t)+\dot V_3(x_t,w_t)\le\\&[x^{\mathrm T}\quad y^{\mathrm T}\quad x(t-\tau_2)^{\mathrm T}\quad w^{\mathrm T}]\Xi_0\begin{bmatrix}x\\ y\\ x(t-\tau_2)\\ w\end{bmatrix}.\end{aligned}\qquad(13)$$

其中

$$\Xi_0=\begin{bmatrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & P_1B_1\\ * & \Sigma_3 & 0 & P_2B_1\\ * & * & \Sigma_4 & 0\\ * & * & * & 0\end{bmatrix},$$

$$\Sigma_1=P_1\bar A+\bar A^{\mathrm T}P_1+rla^2(t)I+\sum_{i=1}^{6}\tau_iP_1R_iP_1^{\mathrm T}+S_1,$$

$$\Sigma_2=P-P_1+\bar A^{\mathrm T}P_2+\sum_{i=1}^{6}\tau_iP_1R_iP_2^{\mathrm T},$$

$$\Sigma_3=-P_2-P_2^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^{4}\tau_i\bar A_i^{\mathrm T}Q_i^{-1}\bar A_i+\sum_{i=1}^{6}\tau_iP_2R_iP_2^{\mathrm T},$$

$$\Sigma_4=r\bar A_4^{\mathrm T}Q_5^{-1}\bar A_4-S_1,\ \tau_5=r,\ \tau_6=1.$$

为研究系统(1)的 H_∞ 特性,令初始值 $\phi(t)=0$,则对于 $T>0$ 及给定的常数 $\gamma>0$,有

$$\begin{aligned}J_T={}&\int_0^T(z^{\mathrm T}z-\gamma^2w^{\mathrm T}w)\,\mathrm dt\le\\&\int_0^T(z^{\mathrm T}z-\gamma^2w^{\mathrm T}w+\dot{\bar V}(x_t,w_t))\,\mathrm dt=\\&\int_0^T\Big\{\big[(C+DK_1)x(t)+DK_2x(t-\tau_1)+\\&DK_3\Big(x(t-r)+\int_{-r}^{0}x(t+\theta)\,\mathrm d\theta\Big)\big]^{\mathrm T}\times\\&\big[(C+DK_1)x(t)+DK_2x(t-\tau_1)+\\&DK_3\Big(x(t-r)+\int_{-r}^{0}x(t+\theta)\,\mathrm d\theta\Big)\big]-\\&\gamma^2w^{\mathrm T}w+\dot{\bar V}(x_t,w_t)\Big\}\mathrm dt.\end{aligned}\qquad(14)$$

其中

$$\bar V=V+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm T}(s)S_2x(s)\,\mathrm ds\mathrm d\theta+\int_{t-\tau_1}^{t}x(s)^{\mathrm T}S_3x(s)\,\mathrm ds+\int_{t-r}^{t}x(s)^{\mathrm T}S_4x(s)\,\mathrm ds,$$

$S_i(i=2,3,4)$ 为正定矩阵. 可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar V} = {} & \dot V + \int_{-r}^{0}[x^{\mathrm T}(t)S_2x(t) - \\
& x^{\mathrm T}(t+\theta)S_2x(t+\theta)]\mathrm d\theta + \\
& x(t)^{\mathrm T}(S_3+S_4)x(t) - x(t-\tau_1)^{\mathrm T}\times \\
& S_3x(t-\tau_1) - x(t-r)^{\mathrm T}S_4x(t-r). \qquad (15)
\end{aligned}
$$

将式(15)代入(14)可得

$$
\begin{aligned}
& J_T \le \\
& \int_0^T\int_{-r}^0\{[r(C+DK_1)x(t) + \\
& rDK_2x(t-\tau_1) + DK_3(rx(t-r) + \\
& x(t+\theta))]^{\mathrm T}[r(C+DK_1)x(t) + \\
& rDK_2x(t-\tau_1) + DK_3(rx(t-r) + \\
& x(t+\theta))] - r\gamma^2w^{\mathrm T}w + r\dot V + \\
& x^{\mathrm T}(t)(S_2+rS_3+rS_4)x(t) - \\
& x^{\mathrm T}(t+\theta)S_2x(t+\theta) - rx(t-\tau_1)^{\mathrm T}S_3x(t- \\
& \tau_1) - rx(t-r)^{\mathrm T}S_4x(t-r)\}\mathrm d\theta\mathrm dt \le \\
& \int_0^T\int_{-r}^0\tilde x^{\mathrm T}(t,\theta)\,\Xi(t)\,\tilde x(t,\theta)\,\mathrm d\theta\mathrm dt, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\tilde x^{\mathrm T}(t,\theta) = [& x^{\mathrm T} \quad y^{\mathrm T} \quad x^{\mathrm T}(t-\tau_1) \quad x^{\mathrm T}(t-\tau_2) \\
& x^{\mathrm T}(t-r) \quad x^{\mathrm T}(t+\theta) \quad w^{\mathrm T}].
\end{aligned}
$$

故当 $\Xi(t)<0$ 时可得 $J_T<0$. 由 Schur 补引理可得 $\Xi(t)<0$ 等价于如下矩阵不等式成立:

$$
\tilde\Xi(t) = \begin{bmatrix} \Xi & \tilde\Xi_1 & \cdots & \tilde\Xi_7 \\ \tilde\Xi_1^{\mathrm T} & M_1 & & \\ \cdots & & \ddots & \\ \tilde\Xi_7^{\mathrm T} & & & M_7 \end{bmatrix} < 0. \qquad (17)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& \tilde\Xi_i^{\mathrm T} = [0 \quad \overline{A_i} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_{4+i}],\ i=1,\cdots,4, \\
& M_i = -(r\tau_i)^{-1}Q_i,\ i=1,\cdots,4, \\
& M_5 = -(la^2(t))^{-1}I, \\
& M_6 = -r^{-2}Q_5,\ M_7 = -I, \\
& \tilde\Xi_5^{\mathrm T} = [1 \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_{10}], \\
& \tilde\Xi_6^{\mathrm T} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \overline{A_4} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_8], \\
& \tilde\Xi_7^{\mathrm T} = [r(C+DK_1) \quad 0 \quad rDK_2 \quad 0 \\
& \qquad rDK_3 \quad DK_3 \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_7],
\end{aligned}
$$

$$
\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \cdots & \Xi_{17} \\ * & \Xi_{22} & \cdots & \Xi_{27} \\ * & * & \ddots & \cdots \\ * & * & * & \Xi_{77} \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\Xi_{11} = {} & rP_1\overline{A} + r\overline{A}^{\mathrm T}P_1 + r\sum_{i=1}^{6}\tau_iP_1R_iP_1^{\mathrm T} + \\
& rS_1 + S_2 + rS_3 + rS_4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Xi_{12} = rP - rP_1 + r\overline{A}^{\mathrm T}P_2 + r\sum_{i=1}^{6}\tau_iP_1R_iP_2^{\mathrm T}, \\
& \Xi_{22} = -rP_2 - rP_2^{\mathrm T} + r\sum_{i=1}^{6}\tau_iP_2R_iP_2^{\mathrm T}, \\
& \Xi_{33} = -rS_3,\ \Xi_{44} = -rS_1, \\
& \Xi_{55} = -rS_4,\ \Xi_{66} = -S_2, \\
& \Xi_{77} = -r\gamma^2,\ \Xi_{17} = P_1B_1,\ \Xi_{27} = P_2B_1,
\end{aligned}
$$

其余项为 0.

由以上推导可得如下结论:

定理 1 对于一类同时含分布和离散时滞的输入时滞线性时滞系统(1),如果 $\forall t\in[-\tau,\infty]$ 存在矩阵 $U_i(t)(i=1,2,3)$ 及正定矩阵 $X(t)$, $Q_i(t)(i=1,\cdots,5)$ 和 $\overline{S}_j(t)(j=1,\cdots,4)$,使得线性矩阵不等式(19)成立,则线性时滞系统(1)在控制器(3)的作用下内部是渐近稳定的,且 H_∞ 性能指标小于给定的界 γ. 每一时刻的反馈增益矩阵为

$$
K_1(t) = U_i(t)X(t)^{-1},\ i=1,2,3.
$$

证明 由 Schur 补可知, $w(t)=0$ 时式(17)成立且包含了系统内部渐近稳定的解($\Xi_0<0$),因此线性时滞系统(1)内部是渐近稳定的,且 H_∞ 性能指标小于给定的界 γ. 对 $\tilde\Xi<0$ 两边同乘以矩阵 $\mathrm{diag}(X_1,\cdots,X_{14})$,其中 $X_1=P_1^{-1}$, $X_2=Y=P_2^{-1}$, $X_i=X=P^{-1}(i=3,\cdots,6)$, $X_i=I(i=7,\cdots,14)$. 由于式(6)中只要求 P_1 和 P_2 满足 $E\overline{P}^{\mathrm T}=\overline{P}E$,而没有其他限制,又考虑到要兼顾保守性和运算简便,可借鉴文献[5]中方法令 $P_1=(n_1/n_2)P$, $P_2=(1/n_2)P$,即 $X=(n_1/n_2)X_1=(1/n_2)Y$,其中 n_1, n_2 为正常数. 此外,注意到 $\tilde\Xi<0$ 中对应于 $x(t-\tau_2)$ 的项只有关于该向量的二次型项 $r^2\overline{A_4}^{\mathrm T}Q_5^{-1}\overline{A_4}-rS_1$,而没有该向量与 $\tilde x(t,\theta)$ 中其他向量的交叉项. 为方便求解,可令 $r^2\overline{A_4}^{\mathrm T}Q_5^{-1}\overline{A_4}-rS_1\le 0$,即

$$
\begin{bmatrix} rS_1 & \overline{A_4}^{\mathrm T} \\ \overline{A_4} & r^{-2}Q_5 \end{bmatrix} \ge 0. \qquad (18)
$$

对上式两边同乘以矩阵 $\mathrm{diag}(X\quad I)$,结合以上的分析可知 $\tilde\Xi<0$ 等价于如下时变 LMI 组:

$$
\hat\Xi(t) = \begin{bmatrix} \bar\Xi & \hat\Xi_1 & \cdots & \hat\Xi_6 \\ \hat\Xi_1^{\mathrm T} & \tilde M_1 & & \\ \cdots & & \ddots & \\ \hat\Xi_6^{\mathrm T} & & & \tilde M_6 \end{bmatrix} < 0, \qquad (19a)
$$

$$
\begin{bmatrix} r\overline{S}_1 & U_3^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} \\ B_2U_3 & r^{-2}Q_5 \end{bmatrix} \ge 0. \qquad (19b)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& \hat\Xi_1^{\mathrm T} = [0 \quad n_2A_1X \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_4], \\
& \hat\Xi_i^{\mathrm T} = [0 \quad n_2B_2U_{i-1} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_{3+i}],\ i=2,3,4,
\end{aligned}
$$

$$\widehat{\Xi}_5^{\mathrm{T}} = [(n_2/n_1)X \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_9],$$
$$\widetilde{M}_i = M_i,\ i = 1,\cdots,5,$$
$$\widetilde{M}_6 = -(la^2(t))^{-1}I,$$
$$\widehat{\Xi}_6^{\mathrm{T}} = [(n_2/n_1)r(CX + DU_1) \quad 0 \quad rDU_2 \quad rDU_3 \quad DU_3 \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_6],$$
$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & \cdots & \bar{\Xi}_{16} \\ * & \bar{\Xi}_{22} & \cdots & \bar{\Xi}_{26} \\ * & * & \ddots & \cdots \\ * & * & * & \bar{\Xi}_{66} \end{bmatrix},$$
$$\bar{\Xi}_{11} = r(n_2/n_1)(A_0 + A_1)X + r(n_2/n_1)\sum_{i=1}^{3}B_2U_i + r(n_2/n_1)X(A_0 + A_1)^{\mathrm{T}} + r(n_2/n_1)\sum_{i=1}^{3}(B_2U_i)^{\mathrm{T}} + r\sum_{i=1}^{5}\tau_iQ_i + l^{-1}I + (n_2/n_1)^2[r\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + r\bar{S}_3 + r\bar{S}_4],$$
$$\bar{\Xi}_{33} = -r\bar{S}_3,\ \bar{\Xi}_{44} = -r\bar{S}_4,\ \bar{\Xi}_{55} = -\bar{S}_2,$$
$$\bar{\Xi}_{12} = r(n_2/n_1)(n_2 - n_1)X + r(n_2/n_1)X(A_0 + A_1)^{\mathrm{T}} + r(n_2/n_1)\sum_{i=1}^{3}(B_2U_i)^{\mathrm{T}} + r\sum_{i=1}^{5}\tau_iQ_i + l^{-1}I,$$
$$\bar{\Xi}_{22} = -2n_2rX + r\sum_{i=1}^{5}\tau_iQ_i + l^{-1}I,$$
$$\bar{\Xi}_{66} = -r\gamma^2,\ \bar{\Xi}_{16} = B_1 = \bar{\Xi}_{26},$$
$$\bar{S}_i = XS_iX,\ i = 1,\cdots,4.$$

在具体仿真计算时,定义一采样时间间隔 T,每个计算时间点 $t = kT$, $-\frac{\tau}{T} \le k \le \frac{\bar{t}}{T}$,$\bar{t}$为仿真的终点时刻. 通过 Matlab 软件中的 LMI 工具箱,在各时间点把式(19) 中各个量当作常量来定义,在求得该时间点的可行解矩阵 $U_i(t)$ 和正定矩阵 $X(t)$ 之后,即可算得 $K_i(t) = U_i(t)X(t)^{-1}$, $i = 1,2,3$. 值得注意的是,如果某个时间点找不到矩阵 $U_i(t)$ 和正定矩阵 $X(t)$ 的可行解,则要将前一时间点的下一组可行解代入系统重新求得当前时间点的满足式(19) 的可行解. □

注 1　以往的研究所采用的反馈控制大多是无记忆控制[9,11] 或者无记忆积分控制[10],这不能充分反映分布时滞环节,而且以往的结论即使采用了无记忆积分控制,所得到的结果却是控制矩阵 $K = 0$[10]. 从文献[10] 中可以看出,这是因为加上该项后要求的 LMI 尽管包含 K,但其可解性与不包含时是一样的,因而求解这样的 LMI 得不到非零的 K 解. 而本文通过带记忆状态反馈控制器(3),让反映分布时滞的最大时滞常数 r 的记忆项和分布时滞记忆项的反馈矩阵均为 K_3,这样从式(17) 和(19) 均可看出,如果不加这两个记忆项,则当这样的不等式有解时,相应地加了这两个记忆项的不等式一定有解(只要令 $K_3 = 0$);反之却不一定成立. 因此,本文的可解性比以往的结论要好.

4　仿真实例

考虑与式(2) 相符的时滞系统,其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ -0.5556 & 0 & -0.5556 & 0.5556 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.85 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.85 \end{bmatrix},$$
$$B_1^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0],\ B_2^{\mathrm{T}} = [0 \quad 5 \quad 0 \quad 0],$$
$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1],\ D = 1,$$
$$\tau_1 = 0.1,\ \tau_2 = 0.008,\ r = 1.$$

选择仿真采样周期 $T = 0.001\,\mathrm{s}$,对于式(2) 中的 $a(t) = 0.0201\,t$, $\gamma = 0.46$. 将这些数据代入式(19),令 $n_1 = 1$, $n_2 = 0.1$,选取系统初始状态函数

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \\ \phi_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin(4\pi(t-\tau)/\tau) \\ -3\cos(4\pi(t-\tau)/\tau) \\ -3\cos(4\pi(t-\tau)/\tau) \\ -3\cos(4\pi(t-\tau)/\tau) \end{bmatrix},$$

其中 $\tau = \max\{\tau_1 + \tau_2, \tau_2 + r\} = 1.008$. 则可得系统状态 $x(t)$ 如图 1 所示.

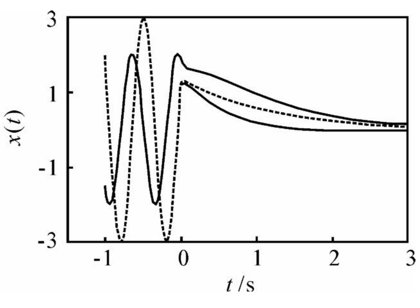

图 1　闭环系统状态图 x(t)

仿真过程中得到的时变控制矩阵为

$$K_i(t) = U_i(t)X(t)^{-1},\ i = 1,2,3.$$

即

$$K_1(t) = U_1(t)X(t)^{-1} =$$
$$[0.0742 \quad -0.5345 \quad 0.5993 \quad 0.7470],\ \cdots$$
$$[0.4061 \quad -0.6115 \quad 0.6988 \quad 0.4917];$$
$$K_2(t) = U_2(t)X(t)^{-1} =$$

$[0.0029\quad -0.0025\quad -0.0011\quad 0.0020],\cdots$
$[0.0059\quad -0.0091\quad 0.0102\quad 0.0075];$
$K_3(t) = U_3(t)X(t)^{-1} =$
$10^{-3}\times[0.7171\quad -0.5650$
$-0.2205\quad -0.4173],\cdots$
$10^{-3}\times[0.0263\quad -0.2024$
$-0.0243\quad -0.0409].$

如果控制器中没有反映分布时滞的记忆项

$$K_3\left[x(t-r)+\int_{-r}^{0}x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right],$$

则当 $\gamma = 0.47$ 时才能有解. 尽管这里的 K_3 比较小,但相对于文献[10]中值为 10 的负十几次方的积分控制矩阵 K 值而言,已经实现了从零解向非零解的飞跃.

5 结 论

本文针对一类含分布与离散时滞的线性时滞系统,研究了该系统的 H_∞ 控制问题. 通过基于 "descriptor form" 的 Lyapunov-Krasovskii 泛函和依赖于时滞的动态线性矩阵不等式(LMI)方法,针对系统特点使 LMI 体现出时变特性,而且根据分布时滞部分的特性提出了动态控制该类系统的方法,得到了闭环系统稳定且满足 H_∞ 性能指标的充分条件. 最后通过仿真实例验证了该方法的有效性.

参考文献(References)

[1] 杨斌, 陈绵云. 一类具有分布与离散时滞的控制系统的绝对稳定性[J]. 控制与决策, 2001, 16(3): 362-364.
(Yang B, Chen M Y. Absolute stability of a class of control systems with discrete and distributed delays[J]. Control and Decision, 2001, 16(3): 362-364.)

[2] Cao Jinde. Stability in a class of continuously distributed delays model[J]. J of Engineer in Mathematics, 1999, 16(3): 37-42.

[3] Li Qiong, Zhou Dongming. Stability of a continuously distributed delays model[J]. J of Yunnan University, 1997, 19(5): 451-455.

[4] Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. Systems and Control Letters, 2001, (43): 309-319.

[5] Shin Kanno, Gan Chen, Hiroshi Shibata, et al. Stabilization of input delayed systems via static state-feedback[C]. SICE Annual Conf in Fukui2003. Fukui: Fukui University, 2003: 162-166.

[6] Huijun Gao, Changhong Wang. Comments and further results on "A descriptor systems approach to H_∞ control of linear time-delay systems"[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(3): 520-525.

[7] 姜偕富, 徐立文. 不确定输入时滞系统的滞后相关型鲁棒控制[J]. 清华大学学报, 2003, 43(7): 912-915.
(Jiang X F, Xu L W. Delay-dependent robust H_∞ feedback control for uncertain systems with input delay [J]. J of Tsinghua University, 2003, 43(7): 912-915.)

[8] 柴琳, 费树岷, 辛云冰. 一类带未知输入时滞的多时滞非线性系统的对时滞参数的自适应 H_∞控制[J]. 自动化学报, 2006, 32(2): 237-245.
(Chai L, Fei S M, Xin Y B. Adaptive H_∞ control for a class of nonlinear time-delay systems with uncertain input delay[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2): 237-245.)

[9] Dong Yue, James Lam. Suboptimal robust mixed H_2/H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with distributed delays[J]. Computers & Mathematics with Application, 2004, 47(6): 1041-1055.

[10] Xie L, Fridman E, Shaked U. Robust H_∞ control of distributed delay systems with application to combustion control [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(12): 1930-1935.

[11] Qing-Long Han. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays[J]. Automatica, 2004, 40(10): 1791-1796.

[12] Jack Hale. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[13] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307-1317.