文章编号: 1001-0920(2009)01-0118-04

极小-极大-加系统(F,G,H)的能达能观性

朱忠熏[1], 陈文德[2], 宁 娣[1]
(1. 中南民族大学 计算机科学学院, 武汉 430074; 2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘 要: 在数字电路中,两个时间信号通过逻辑电路的"与"门相当于极大运算,"或"门相当于极小运算. 因此,极小-极大-加系统可用于数字电路的时间分析. 对于非线性极强的极小-极大-加系统(F, G, H),引入了分别能达和上限能观的概念. 利用图论的方法给出了极小-极大-加系统(F, G, H)的状态变量 x_t 为分别能达分量的充要条件,同时,还得到了 x_t 为上限能观分量的充要条件.

关键词: 离散事件动态系统; 极小-极大-加系统; 极大-加代数; 分别能达; 上限能观
中图分类号: O231 **文献标识码**: A

Reachability and observability of min-max-plus systems(F,G,H)

ZHU Zhong-xun[1], *CHEN Wen-de*[2], *NING Di*[1]
(1. Department of Computer Science, South Central for Nationalities, Wuhan 430074, China; 2. Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China. Correspondent: ZHU Zhong-xun, E-mail: zzxun73@163.com)

Abstract: In digital circuit, that two time signals pass through "and" door of logical circuit is about equal to max operation and "or" is min operation. Therefore, the min-max-plus systems can be used to the time analysis of digital circuit. In this paper, for min-max-plus systems (F, G, H), in which nonlinear are very strong, the conceptions of respective reachability and upper-level observability are introduced. The sufficient and necessary conditions for the state variable's respective reachability and upper-level observability of min-max-plus systems (F, G, H) are obtained respectively by using the graph theory method.

Key words: Discrete event dynamic systems; Min-max-plus systems; Max-plus algebra; Respective reachability; Upper-level observability

1 引 言

以制造系统、计算机网、通讯网等为应用背景的离散事件动态系统(DEDS),可用极大-加代数建模成线性系统(A, B, C),20 多年来,成果丰富. 以数字电路时间分析等为应用背景的极小-极大-加系统的理论正在开拓. 最早的模型是自治系统

$$x(k+1) = F(x(k)),$$

其中 $F(x)$ 是极小-极大函数. 有展开式

$$F(x) = \bigwedge_{r\in I}(A_r x),$$

A_r 是 $F(x)$ 的极大-加投影, $A_r \in D^{n\times n}$, $x(k) \in D^n$, $D = (R \cup \{-\infty\}, \vee, +)$ 称为极大-加代数,其中 $a \vee b = \max(a,b)$. I 是 $F(x)$ 所有极大-加投影指标 r 的集合. 对运算 $\wedge$ 规定 $a \wedge b = \min(a,b)$.

Olsder[1] 首先研究了自治系统的特征值问题. Gunawardena 等人[2,3] 对自治系统进行了系列研究,并证明了重要而基本的对偶定理[3]. Zhao 等人[4] 研究了极小-极大系统的结构和全局周期时间的存在性. Cheng 等人[5,6] 证明了极小-极大系统轨道的周期性,同时给出了计算周期时间的有效算法.

文献[7]首次提出了如下非自治极小-极大-加系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)) \vee B(u(k)), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases}$$

其中: $F(x)$ 同上, $B \in D^{n\times q}$, $C \in D^{p\times n}$, $u(k) \in D^q$, $y(k) \in D^p$. 该系统简记为(F, B, C). (F, B, C) 相对于(A, B, C) 是非线性的,因而更加困难和复杂. 文献[7]得到了(F, B, C) 的极点能合并配置的充要条

收稿日期: 2007-10-10; **修回日期**: 2008-02-26.
基金项目: 中南民族大学青年科研基金项目(YZQ06007).
作者简介: 朱忠熏(1973—),男,湖北通山人,讲师,博士生,从事离散事件动态系统、运筹学与控制论等研究; 陈文德(1941—),男,江苏苏州人,教授,博士生导师,从事离散事件动态系统、编码理论等研究.

件. 此后便开始了极小 - 极大- 加系统的控制理论的研究. 文献[8-12]系统地研究了 (F, B, C) 的能达能观性、极点(周期时间)配置和镇定等问题. 最近,陶跃刚和刘国平[13,14]研究了非自治极小 - 极大- 加系统

$$x(k+1) = F(x(k)) \vee G(u(k)),$$

得到了镇定且极点能配置的充分条件. 其中 $G(u)$ 是极小 - 极大函数,有展开式 $G(u) = \bigwedge_{s\in J}(B_s u)$,其他同 (F, B, C). 此系统简记为 (F, G). 系统 (F, G) 比 (F, B, C) 的非线性程度更强,更复杂.

能达能观性是控制理论中重要的基本概念. 对于极大 - 加系统 (A, B, C),王龙和郑大钟[15]提出了分别能达性;张梅和吴智铭[16]提出了分别能达性和上限能观性. 这些是与先前 Cohen 等人提出的结构能达能观性不同的概念. 对于系统 (A, B, C),这两类概念等价,但各自反映了系统的不同侧面. 文献[10]给出了极小 - 极大- 加系统 (F, B, C) 分别能达的定义与判据,指出它与结构能达不等价. 文献[12]给出了系统 (F, B, C) 上限能观的定义与判据,并改进了分别能达判据. 本文在此基础上研究更一般、非线性更强的极小 - 极大 - 加系统

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)) \vee G(u(k)), \\ y(k) = H(x(k)), \end{cases}$$

其中 $H(x)$ 是极小 - 极大函数. 有展开式 $H(x) = \bigwedge_{e\in E}(C_e x)$,其他同 (F, G). 此系统简记为 (F, G, H),并得到了该系统分别能达或上限能观的充要条件.

2　分别能达性

定义 1　对于极大 - 极小函数 $F(x) = \bigwedge_{r\in I}(A_r x)$,记 A_r 的 i 行 j 列元素为 $a_{ij}(r)$. 由 $F(x)$ 可以确定一个图,它有 n 个顶点 $1, 2, \cdots, n$. 规定:当 $a_{ij}(r) \neq -\infty$ 时,j 到 i 有弧,重为 $a_{ij}(r)$,且着颜色 r;当 $a_{ij}(r) = -\infty$ 时,j 到 i 没有着颜色 r 的弧. 此图称为 $F(x)$ 的着色有向伪图,简称 $F(x)$ 的图,记为 $g(F)$.

定义 2　在 $g(F)$ 中添加 $q + p$ 个点,即 $u_1, u_2, \cdots, u_q, y_1, \cdots, y_p$. 当 B_s 的 i 行 j 列元素 $b_{ij}(s) \neq -\infty$ 时,规定点 u_j 到点 i 有着颜色 s 的弧,重为 $b_{ij}(s)$;否则无弧. 当 C_e 的 i 行 j 列元素 $c_{ij}(e) \neq -\infty$ 时,规定点 j 到点 y_i 有着颜色 e 的弧,重为 $c_{ij}(e)$;否则无弧. 此图称为系统 (F, G, H) 的图,简记为 $g(F, G, H)$. 将 $u_1, u_2, \cdots, u_q$ 合并成一点 u,并保留各弧;将 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ 合并成一点 y,并保留各弧. 记所得图为 $g^*(F, G, H)$.

定义 3　在系统 (F, G, H) 中设 $x(0) = [x_1(0), \cdots, x_n(0)]^{\mathrm{T}} = \varnothing$,其中,$\varnothing = [-\infty, \cdots, -\infty]^{\mathrm{T}}$. 若对任意指定的实数 $\tilde{x}_t$,存在输入向量序列 $u(0), \cdots, u(k)$ 使得终态分量 $x_t(k+1) = \tilde{x}_t$,则称 x_t 是分别能达分量;否则称为非分别能达分量. 若每个分量都是分别能达的,则称该系统是分别能达的.

定义 4　在图 $g^*(F, G, H)$ 中,称点 t 为 N 步能达点,如果:

1) 对于每种颜色 r,从 u 到点 t 至少有一条长为 N 的路,路上第 1 段弧 uv 可着 J 中各色,而 v 到 t 是长为 $N - 1$ 的 r 色路;

2) 所有上述各条路中,对于每种颜色 r,至少有一条路中 t 的上邻点(即以点 t 为终点的弧的起点)为 $N - 1$ 步能达点.

为方便起见,对于每个 r,记上述定义中的所有为 $N - 1$ 步能达点的上邻点的集合为 $U_{N-1}(r) = \{j(r)\}$.

规定: + 总优先于 $\wedge$, $\vee$.

类似于文献[10],易得以下引理:

引理 1　系统 (F, G, H) 的状态分量 x_t 是分别能达的,当且仅当存在某个 $k \geq 0$,某个 $u \in D^q$,使得 $F^k(Gu)$ 的第 t 个分量 $\neq -\infty$,其中: $F^k(Gu)$ 表示

$$\underbrace{\bigwedge_{r\in I}\Big(A_r \bigwedge_{r\in I}\Big(A_r \cdots \bigwedge_{r\in I}(A_r Gu)\cdots\Big)\Big)}_{k\text{个}\bigwedge_{r\in I}},$$

$k = 0$ 时表示 Gu.

定理 1　系统 (F, G, H) 的 x_t 是分别能达的充要条件是存在一个 N,使得点 t 为图 $g^*(F, G, H)$ 中的 N 步能达点.

证明　1) 充分性. 设

$$B_s = \begin{bmatrix} b_{11}(s) & \cdots & b_{1q}(s) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1}(s) & \cdots & b_{nq}(s) \end{bmatrix},$$

则

$$Gu(0) = \bigwedge_{s\in J} B_s u(0) =$$

$$\bigwedge_{s\in J}\begin{bmatrix} b_{11}(s) & \cdots & b_{1q}(s) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1}(s) & \cdots & b_{nq}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(0) \\ \cdots \\ u_q(0) \end{bmatrix} =$$

$$\bigwedge_{s\in J}\Big(\bigvee_{1\leq j\leq q}(b_{\cdot j}(s) + u_j(0))\Big). \tag{1}$$

其中: $b_{\cdot j}(s)$ 表示 B_s 的第 j 列,$b_{\cdot j}(s) + u_j(0)$ 表示在 B_s 的第 j 列上每个分量上加 $u_j(0)$.

$N = 1$ 时,设 t 为一步能达点,对于每种色 s,存在一个 $j(s)$,使得 $b_{t,j(s)}(s) \neq -\infty$. 下面总取 $u(0) =$

$[0,0,\cdots,0]^T$,用$(Gu(0))_t$表示$Gu(0)$的第t个分量.由式(1),有

$$(Gu(0))_t = \bigwedge_{s\in J}\Big(\bigvee_{1\le j\le q} b_{tj}(s)\Big) \ge \bigwedge_{s\in J} b_{tj(s)}(s) \ne -\infty. \qquad (2)$$

由引理1可知,x_t是分别能达分量.

下面用归纳法证明.对于一般的N步能达点t有如下类似式(2)的式子成立:

$$(F^{N-1}Gu(0))_t \ne -\infty. \qquad (3)$$

假设$N=k$时,式(3)成立,则$N=k+1$时,有

$$(F^k(Gu(0)))_t = (F(F^{k-1}(Gu(0))))_t = \bigwedge_{r\in I}\Big(\bigvee_{1\le j\le n}(a_{t,j}(r) + (F^{k-1}(Gu(0)))_j)\Big) \ge \bigwedge_{r\in I}\Big(\bigvee_{j(r)\in U_k(r)}(a_{t,j(r)}(r) + (F^{k-1}(Gu(0)))_{j(r)})\Big).$$

因为点t为图$g^*(F,G,H)$中的$k+1$步能达点,对于每个$r\in I$,至少存在一个$j(r)\in U_k(r)$(其中$U_k(r)$表示k步能达点的集合),使得$a_{t,j(r)}(r)\ne -\infty$.由归纳假设$(F^{k-1}(Gu(0)))_{j(r)}\ne -\infty$,从而$(F^k(Gu(0)))_t \ne -\infty$.由引理1知,$x_t$是分别能达分量.

2) 必要性(反证法).假设x_t是分别能达分量,但对任意的N,点t不是图$g^*(F,G,H)$中的N步能达点.

$N=1$时,因点t不是图$g^*(F,G,H)$中的一步能达点,故存在一种色s_0,使得$b_{tj}(s_0) = -\infty$, $\forall j$.由(1)式知

$$(Gu(0))_t = \bigwedge_{s\in J}\Big(\bigvee_{1\le j\le q}(b_{tj}(s) + u_j(0))\Big) = \bigwedge_{s\in J\setminus s_0}\Big(\bigvee_{1\le j\le q}(b_{tj}(s) + u_j(0))\Big) \wedge \Big(\bigvee_{1\le j\le q}(b_{tj}(s_0) + u_j(0))\Big).$$

从而,对于任意的输入向量$u(0)$,均有$(Gu(0))_t = -\infty$.

下面用归纳法证明.对于一般的N,若t不是N步能达点,则对任意的$u(0)$,有

$$(F^{N-1}Gu(0))_t = -\infty. \qquad (4)$$

假设$N=k$时,点t不是图$g^*(F,G,H)$中的k步能达点,对任意的$u(0)$,有式(4)成立,则$N=k+1$时

$$(F^k(Gu))_t = (F(F^{k-1}(Gu)))_t = \bigwedge_{r\in I}\Big(\bigvee_{1\le j\le n}(a_{t,j}(r) + (F^{k-1}(Gu))_j)\Big).$$

设U_k表示所有k步能达点的集合,由归纳假设知,对任意的u,有

$$(F^{k-1}(Gu))_t = -\infty, \quad \forall j \notin U_k.$$

当任意一个$j\in U_k$时,因为点t不是图$g^*(F,G,H)$中的$k+1$步能达点,所以存在一种色$r_0(j)$,$a_{t,j}(r_0(j)) = -\infty$. $\forall j\in U_k$.从而,有

$$\Big(\Big(\bigwedge_{r\in I} A_r\Big)^k (Gu)\Big)_t = -\infty,$$

所以式(4)成立.由引理1知,x_t不是分别能达分量.矛盾!□

定理1给出了分别能达的图论判据与解释.

3 上限能观性

定义5 系统(F,G,H)的$B_s = \phi$, $\forall s\in J$,且在初态$x(0) = [x_1(0),\cdots,x_n(0)]^T$时,系统$(F,G,H)$输出有限序列$\{y(k)\}_{k=0}^N$.若存在一个$N$使得从$\{y(k)\}_{k=0}^N$可解出有上限的$x_t(0)$,则称$x_t$是上限能观分量;否则,称$x_t$是非上限能观分量.若系统$(F,G,H)$的$n$个分量都是上限能观分量,则称系统$(F,G,H)$是上限能观的.

定义6 在图$g^*(F,G,H)$中,点l称为点t的N步出口,是指:

1) 对于每种颜色r,点t到点l至少有一条长为N的r色路;

2) 所有上述各条路中,对于每种颜色r,至少有一条路中点l的上邻点是点t的$N-1$步出口.

当$N=0$时,规定t就是t的0步出口.

定理2 系统(F,G,H)的x_t是上限能观分量的充要条件是,存在一个N,使得图$g^*(F,G,H)$中至少有一个点t的N步出口l到输出点y有着E中各色的弧.

用类似于证明定理1的方法,但稍微复杂些,便可证明定理2.限于篇幅,略去定理2的证明.同时,可以得到定理1和定理2的矩阵描述,限于篇幅,略去.

4 结 论

对于非线性更强的极小-极大-加系统(F,G,H),本文给出了分别能达、上限能观的定义与判据,从而使中国学者针对线性的极大-加系统(A,B,C)提出的这两个概念在理论上得到了深化与拓展.

参考文献(References)

[1] Olsder G J. Eigenvalues of dynamic max-min systems [J]. Discrete Event Dynamic Systems, 1991, 1(2): 177-207.

[2] Gunawardena J. Min-max functions[J]. Discrete Event Dynamic Systems, 1994, 4(2): 377-406.

[3] Gaubert S, Gunawardena J. The duality theorem for min-max functions [J]. Comptes Rendus Academy Science, 1998, 326(1): 43-48.

[4] Zhao Q, Zheng D, Zhu X. Structure properties of min-max systems and existence of global cycle time [J].

IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(1): 148-151.

[5] Cheng Y, Zheng D. Ultimate periodicity of orbits for min-max systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1937-1940.

[6] Cheng Y, Zheng D. A cycle time computing algorithm and its applications in the structural analysis of min-max systems[J]. Discrete Event Dynamic Systems, 2004, 14(1): 5-30.

[7] Chen W. Cycle time assignment of nonlinear discrete event dynamic systems[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 2000, 13(2): 213-218.

[8] 陈文德. 非线性 DEDS 的能达性[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(增): 69-72.
(Chen W D. Reachability of nonlinear DEDS[J]. Control Theory and Application, 1999, 16(S): 69-72.)

[9] 陈文德. 非线性 DEDS 的周期时间配置与凝着色图[J]. 控制与决策, 2003, 18(5): 517-521.
(Chen W D. Cycle time assignment and total condensation coloring graph of nonlinear DEDS[J]. Control and Decision, 2003, 18(5): 517-521.)

[10] 陈文德, 陶跃钢. 非线性 DEDS 的能观能达性与着色图[J]. 科学通报, 2000, 45(22): 2457-2461.
(Chen W D, Tao Y G. The observability and reachability of nonlinear DEDS and coloring graph[J]. Chinese Science Bulletin, 2000, 45(22): 2457-2461.)

[11] Chen W, Tao Y, Yu H. Cycle time assignment of min-max systems using a state feedback[C]. Proc of IEEE Int Conf on Networking, Sensing and Control. Taibei, 2004: 688-693.

[12] Tao Y, Chen W. Cycle time assignment of min-max systems[J]. Int J of Control, 2003, 76(18): 1790-1799.

[13] Tao Y, Liu G. Sate feedback stabilization and majorizing achievement of min-max-plus systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(12): 2027-2033.

[14] Tao Y, Liu G. Cycle time assignability and feedback design for min-max-plus systems[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf 2005. Seville, 2005: 12-15.

[15] 王龙, 郑大钟. 极大代数上的线性系统理论[C]. 离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中的应用学术会议论文集. 北京: 清华大学出版社, 1988: 79-87.
(Wang L, Zheng D Z. Linear system theory of max algebra[C]. Proc of Conf on the Theory of DEDS and Applications in CIMS. Beijing: Tsinghua University Press, 1988: 79-87.)

[16] Zhang M, Wu Z. Controllability and observability problems in linear discrete event system model of FMS[C]. Proc of DEDS'91. Beijing: Int Academic Publishers, 1991: 267-270.

(上接第 117 页)

[3] 杨淑娥, 黄礼. 基于 BP 神经网络的上市公司财务预警模型[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 12-18.
(Yang S E, Huang L. Financial crisis warning model based on BP neural network[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2005, 25(1):12-18.)

[4] 孙星, 邱菀华, 唐葆君. 基于模糊识别与聚类的企业危机预警模型设计[J]. 控制与决策, 2006, 21(3): 267-270.
(Sun X, Qiu W H, Tang B J. Model design of enterprise crisis early-warning based on fuzzy recognition and clustering[J]. Control and Decision, 2006, 21(3): 267-270.)

[5] 邱菀华. 管理决策和应用熵学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
(Qiu W H. Management decision and entropy-weight means[M]. Beijing: China Machine Press, 2002.)

[6] 李兴斯. 非线性极大极小问题的一个有效解法[J]. 科学通报, 1991, 36(19): 1448-1451.
(Li X S. An efficient method for nonlinear minmax problems[J]. Chinese Science Bulletin, 1991, 36(19): 1448-1451.)

[7] 李兴斯. 一类不可微优化问题的有效解法[J]. 中国科学: A 辑, 1994, 24(4): 371-377.
(Li X S. An efficient method for a sort of non-differential optimization problem[J]. Science in China: Series A, 1994, 24(4): 371-377.)

[8] Ross K. Deterministic annealing for clustering, compression, classification, regression, and related optimization problems[J]. Proc of the IEEE, 1998, 86(11): 2210-2239.