

文章编号: 1001-0920(2009)10-1499-05

PSO 算法粒子运动轨迹稳定收敛条件分析

周龙甫^{1,2}, 师奕兵¹

(1. 电子科技大学 自动化工程学院, 成都 610054; 2. 解放军第 452 医院, 成都 610061)

摘要: 由于随机量的作用, 粒子群优化算法(PSO)中粒子的位置迭代是一个非线性动态离散过程, 单个粒子在随机量影响下的运动方程可转换为一个二阶变系数非齐次方程. 为此, 利用 Lyapunov 稳定定理对该方程的稳定性作了深入研究, 分析得到了使粒子运动稳定收敛的惯性权重和随机参数取值条件. 实验结果表明, 按照所得到的条件选择参数取值, 能使粒子运动轨迹快速稳定收敛. 该结果有助于实际应用中 PSO 算法参数的选择和调整.

关键词: 粒子群优化算法; 二阶变系数非齐次差分方程; Lyapunov 稳定; 稳定分析; 随机量

中图分类号: TP306

文献标识码: A

Analysis on stability conditions of particle's trajectory in PSO

ZHOU Long-fu^{1,2}, SHI Yi-bing¹

(1. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China; 2. The 452nd Hospital of PLA, Chengdu 610061, China. Correspondent: ZHOU Long-fu, E-mail: zhoulf_1977@163.com)

Abstract: In particle swarm optimization(PSO), due to the influence of random parameter, the iterative process of particle's position is a non-linear dynamic discrete process. Through substitution, the behavior of an individual particle, under the influence of random parameter, is modeled as a second order difference equation with variable coefficients. Then, the stability analysis of the equation is undertaken by using Lyapunov stability theory. And the result obtained from the analysis offers a more stringent condition on parameters selection in comparison to the existing results. Simulation results confirm the prediction of the theoretical analysis. And the derived conditions for stability are helpful for the selection and the adjustment of PSO parameters in practical application.

Key words: Particle swarm optimization; Second order non-homogeneous difference equation with variable coefficients; Lyapunov stability; Stability analysis; Rand parameter

1 引言

在 1995 年, Eberhart 和 Kennedy^[1]通过对鸟群捕食行为的研究提出了粒子群优化算法(PSO). PSO 算法目前已广泛应用于函数优化、神经网络训练、模糊系统控制以及其他遗传算法的应用领域. 对于 PSO 算法本身的理论研究主要包括单个粒子飞行轨迹分析和整个群体行为研究两方面, 即微观分析和宏观研究两个层面.

早在 1997 年, Kennedy^[2]就提到单个粒子的轨迹依赖于随机参数的取值, 而且随机参数的取值影响整个粒子群的搜索能力. 但这些参数如何影响单粒子轨迹和粒子群搜索能力的机制尚不明确. 由此拉开了对于 PSO 算法微观层面上, 各个参数对粒子轨迹收敛性研究的序幕. 在 1999 年, Ozcan 和

Mohan^[3]作了首次理论分析的尝试. 在没有考虑惯性权重, 且假设随机量、个体最佳位置(p_{best})及全局最佳位置(g_{best})为常数的前提下, 发现在一维空间中单粒子位置轨迹按照正弦规律变化. 文献[4]利用状态转移方程和微分方程对粒子的运动轨迹作了更深入的分析. 文献[5]使用差分方程及 Z 变换对 PSO 算法中粒子运动轨迹的稳定性作深入的研究, 并举例说明了 p_{best} 和 g_{best} 的变化以及随机量对粒子运动过程的影响. 以上研究都忽略了随机数的影响, 将粒子运动状态简化为线性, 重点关注惯性权重、学习因子对粒子轨迹稳定收敛的作用. 事实上, 正是随机量所带来的不确定性给整个粒子群带来了多样性和创新, 并且使得整个系统成为一个非线性系统. 在 2006 年, 文献[6]将粒子的动态特性视为非线性负

收稿日期: 2008-11-24; 修回日期: 2009-03-02.

基金项目: 教育部新世纪人才支持计划项目(NCET-05-0804); 国家 863 计划项目(2006AA06Z222).

作者简介: 周龙甫(1977—), 男, 成都人, 博士生, 从事模拟电路智能诊断的研究; 师奕兵(1964—), 男, 成都人, 教授, 博士生导师, 从事 VLSI 和电子系统的计算机辅助测试、电子测量仪器理论及设计技术等研究.

反馈系统,分析得到一组随机参数与惯性权重取值关系,但却与文献[4,5]的结果相矛盾.同时文献[6]中还列举了多个不满足所得取值关系而轨迹收敛的例子.随后,非线性反馈理论和Mason信号流图理论分别被引入到随机量对粒子轨迹稳定收敛影响的研究^[7,8],得到了与文献[4,5]相似的惯性权重与随机参数取值条件.

本文从粒子位置的基本迭代方程入手,将其转化为二阶变系数差分方程.然后,利用Lyapunov稳定定理对方程的零解稳定条件进行分析,研究控制粒子运动轨迹收敛的随机数取值条件,并给出了使粒子轨迹稳定收敛的PSO算法参数选择条件.

2 PSO算法及粒子运动轨迹数学模型建立

标准PSO算法^[9]的数学描述为:在 D 维搜索空间中, m 个粒子组成一个群体,第 i 个粒子在 D 维空间中的位置表示为 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$,每个粒子的飞行速度为 $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$, $i = 1, 2, \dots, m$.第 i 个粒子经历过的个体最好位置 p_{best} (有个体最佳适应度值)记为 p_b ,整个群体中,所有粒子的全局最佳位置 g_{best} (有群体最佳适应度值)记为 g_b .

每一代粒子的速度和位置迭代方程为

$$v(k+1) = \omega v(k) + \varphi_1(k)(p_b(k) - x(k)) + \varphi_2(k)(g_b(k) - x(k)), \quad (1)$$

$$x(k+1) = x(k) + v(k+1). \quad (2)$$

其中: ω 为惯性权重; $\varphi_1 = c_1 * \text{rand}(0,1)$, $\varphi_2 = c_2 * \text{Rand}(0,1)$, c_1 和 c_2 是学习因子, $\text{rand}(0,1)$, $\text{Rand}(0,1)$ 表示区间 $[0,1]$ 上的随机数.

搜索空间 D 的每一维是相互独立的,因此为了讨论方便,对算法的分析简化到一维进行.并且假设粒子群中除第 i 个粒子外其余粒子保持不动,仅对单个粒子的迭代过程进行研究.

通过迭代,由式(1)和(2)得到PSO算法中单个粒子的位置轨迹方程为

$$x(k+2) - [1 + \omega - \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1)]x(k+1) + \omega x(k) = \varphi_1(k+1)p_b(k+1) + \varphi_2(k+1)g_b(k+1). \quad (3)$$

由式(2)可知,粒子的速度轨迹可由 $v(k+1) = x(k+1) - x(k)$ 给出.因此,本文仅对式(3)进行分析,从粒子的位置轨迹入手讨论随机量取值对粒子稳定性的影响.从而,从微观层面来讨论在随机量影响下,单个粒子在搜索空间中的运动过程和特性.

3 随机量影响下粒子位置轨迹稳定条件分析

由式(3)可知,粒子的位置轨迹可用如下二阶变系数非齐次差分方程表示:

$$x_{k+2} + g(k)x_{k+1} + f(k)x_k = e_k. \quad (4)$$

其中: $k \in N$; g, f 为 N 上的实函数.

一般地,非齐次差分方程的解是它所对应的齐次方程的通解加上一个非齐次特解.对于式(4)所对应的二齐次方程 $x_{k+2} + g(k)x_{k+1} + f(k)x_k = 0$,它的等价方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k, \\ y_{k+1} = -f(k)x_k - g(k)y_k. \end{cases} \quad (5)$$

下面首先对方程(5)进行分析;然后再寻求式(4)的一个特解.进而,由式(4)解的稳定性条件得到粒子位置运动轨迹的稳定收敛条件.

3.1 二阶变系数齐次差分方程的Lyapunov分析

Lyapunov稳定定理^[10]是研究差分微分系统稳定性理论的重要且有效的工具.用类比法构造式(5)的Lyapunov函数,有

$$V(k, x, y) = [(1 + f(k))(1 + f^2(k) - g^2(k)(1 - f(k)))x^2 + 4g(k)f(k)xy + 2(1 + f(k))y^2]. \quad (6)$$

当

$$|f(k)| \leq b < 1, \quad (7)$$

$$(1 + f(k)) \geq a_0 > a \geq |g(k)| \quad (8)$$

时, $V(k, x, y)$ 为具有无穷小上界且径向无界的正定二次型,有

$$\begin{aligned} \Delta V(k, x, y) &= V(k+1, x_{k+1}, y_{k+1}) - V(k, x_k, y_k) = \\ &[-(1 - f(k))(1 + f(k))^2 - g^2(k) + 2f^2(k)\Delta f(k)]x^2(k) - 4f(k)f(k+1)\Delta g(k)x_k y_k + \\ &[-(1 - f(k+1))(1 + f(k+1))(1 + f(k)) - g^2(k) + \Delta f(k)(1 + f^2(k+1)) - 2g(k)(1 + f(k+1)\Delta g(k))]y^2(k) - \\ &(1 - f(k+1)(\Delta g(k))^2 y^2(k)) = \\ &[2f^2(k) + 2f(k+1)f(k) - (1 + f(k)) \times (1 + f^2(k)) + g^2(k)(1 - f(k))]x_k^2 + \\ &[1 + f(k+1) + f^2(k+1) + 2(1 - f(k)) + g^2(k)(1 - f(k+1))]y_k^2 = \\ &[-(1 - f(k))((1 - f(k))^2 - g^2(k)) + 2f(k)\Delta f(k)]x_k^2 + \\ &[-(1 - f(k+1))((1 + f(k+1))^2 - g^2(k)) + 2\Delta f(k)]y_k^2 \leq \\ &[-(1 - b)(a_0^2 - a^2) + 2(|\Delta f(k)| + |\Delta g(k)|)]x^2(k) + \\ &[-(1 - b)(a_0^2 - a^2) + 2(|\Delta f(k)| + 5|\Delta g(k)|)]y^2(k) \leq \\ &[-(1 - b)(a_0^2 - a^2) + 2m](x^2(k) + y^2(k)). \end{aligned} \quad (9)$$

由上式可得,当

$$|\Delta f(k)| + 5|\Delta g(k)| \leq m < \frac{1}{2}(1-b)(a_0^2 - a^2) \quad (10)$$

时, $\Delta V(k, x, y)$ 为负定二次型, 即 $V(k, x, y)$ 沿二阶变系数齐次差分方程 $x_{k+2} + g(k)x_{k+1} + f(k)x_k = 0$ 为负定二次型.

由 Lyapunov 渐近稳定性定理 2 可知, 在满足式 (7), (8), (10) 的条件下, 式 (5) 所示系统的零解大范围内一致渐进稳定, 即二阶变系数齐次差分方程 $x_{k+2} + g(k)x_{k+1} + f(k)x_k = 0$ 的零解大范围内一致渐进稳定.

观察粒子位置轨迹的二阶差分迭代方程, 即式 (3), 如果粒子的适应函数值已达到实验要求, 即粒子的位置已经使适应函数获得全局最大值(或最小值), 则该粒子的位置 $x(k+1) = x(k) = g_b$, 且 $p_b = g_b$. 这时粒子的位置就是式 (3) 的一个特解.

适应函数的全局极值点是确定的, 因此按上述方法找到的方程组的特解是稳定、非振荡的. 从而, 当方程 (3) 所对应的齐次方程组有渐进稳定解时, 方程 (3) 的通解也是渐进稳定的.

3.2 粒子位置迭代差分方程稳定条件分析

结合 3.1 节的分析结果与方程 (3) 的齐次方程, 有

$$\begin{aligned} g(k+1) &= \\ 1 + \omega - \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1), \end{aligned} \quad (11)$$

$$|f(k)| = |\omega|. \quad (12)$$

由此可得

$$\begin{aligned} |f(k)| &= |\omega| = \omega < 1, \\ (1 + f(k)) &= 1 + \omega \geq a_0 > a \geq |g(k)| = \\ |1 + \omega - \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1)|, \end{aligned} \quad (13)$$

并简化得到

$$0 \leq \varphi_1(k+1) + \varphi_2(k+1) < 2 + 2\omega, \quad (14)$$

$$|\Delta g(k)| \leq m < \frac{1}{10}(1-b)((1+b)^2 - a^2).$$

其中

$$\begin{aligned} |\Delta g(k)| &= |g(k+1) - g(k)| = \\ |\varphi_1(k+1) - \varphi_1(k) + \varphi_2(k+1) - \varphi_2(k)| \times \\ \frac{1}{10}(1-b)((1+b)^2 - a^2) &= \\ \frac{1}{10}(1-\omega)((1+\omega)^2 - a^2) &< \\ \frac{1}{10}(1-\omega)((1+\omega)^2 - (1+\omega - \\ \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1))^2) &= \\ \frac{1}{10}(1-\omega)(\varphi_1(k+1) + \varphi_2(k+1)) \times \end{aligned}$$

$$(2 + 2\omega - \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1)).$$

因此迭代方程中随机量的取值还要满足以下条件:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(k+1) - \varphi_1(k) + \varphi_2(k+1) - \varphi_2(k)| &< \\ \frac{1}{10}(1-\omega)(\varphi_1(k+1) + \varphi_2(k+1)) \times \\ (2 + 2\omega - \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1)). \end{aligned} \quad (15)$$

通过上述分析可知, 当变量取值满足式 (13) ~ (15) 时, 粒子的位置渐进稳定, 粒子位置运动轨迹收敛.

综上所述, 为了使粒子的位置运动轨迹稳定收敛, 算法中的变量取值条件为:

- 1) $0 < \omega < 1$;
- 2) $0 < \varphi_1(k+1) + \varphi_2(k+1) < 2 + 2\omega$;
- 3) $|\varphi_1(k+1) - \varphi_1(k) + \varphi_2(k+1) - \varphi_2(k)| < \frac{1}{10}(1-\omega)(\varphi_1(k+1) + \varphi_2(k+1))(2 + 2\omega - \varphi_1(k+1) - \varphi_2(k+1)).$

将上述条件与文献[4,5]所得的最终结果相比较, 条件 1) 与文献[4,5]所得的最终结果完全一致; 文献[4,5]中关于惯性权重 ω 的取值条件是当随机量取值不变情况下条件 2) 的一个特例. 本文和文献[4,5]从不同的分析角度, 相互验证了所得成果的正确性. 为了使粒子运动轨迹稳定, 本文的条件 3) 进一步约束了随机量的取值.

一般而言, 研究者在 PSO 算法研究和使用中通常取 $\omega \approx 0.729, c_1 = c_2 \approx 1.49445$. 该组参数在测试函数以及许多实例中均取得了不错的效果. 显然, 该组参数取值满足条件 1) 和条件 2).

4 实验及讨论

下面给出几个不同参数设定条件下的仿真实例. 测试程序使用 Matlab 7.0 编写并在 1.73GHz, 512MB PC 上运行, 以下所有图形均由 Matlab 程序生成.

参数设定 1): 随机量取值固定, $\varphi_1(k) = \varphi_2(k) = 1.25, \omega = 0.5$, 并且满足上述全部条件. 在初始参数为 $p_b = 5, g_b = 8, x(0) = 1, x(1) = 2$ 的条件下, 粒子的位置变换过程均呈阻尼振荡, 最终稳定为 6.5, 处于稳定状态, 如图 1 所示.

参数设定 2): 优化问题为 $f(x) = x^2 + (\sin x)^2$, 搜索空间为 $[-100, 100]$. $c_1 = c_2 = 1.5, \omega = 0.9$, 并且满足条件 1) 和条件 2). 实验以随机量取值是否满足条件 3), 即随机量取值是否受限展开.

图 2(a) 和图 2(b) 分别给出了某次运算中粒子是否在条件 3) 限制下的位置运动过程. 图 2(a) 中的粒子位置运动收敛, 很快达到全局最优点. 图 2(b)

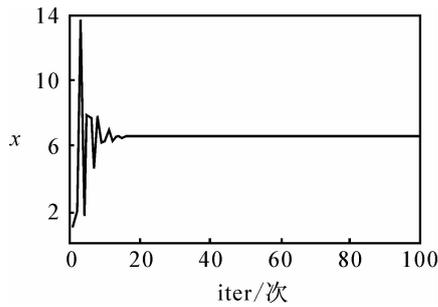
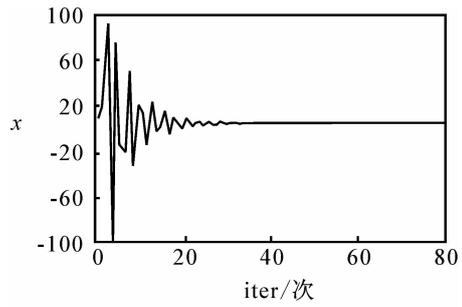
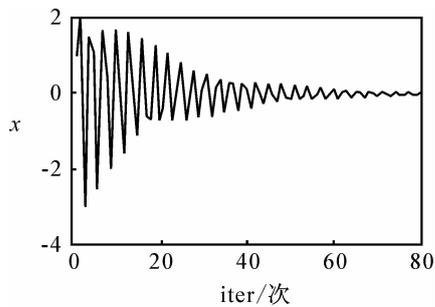


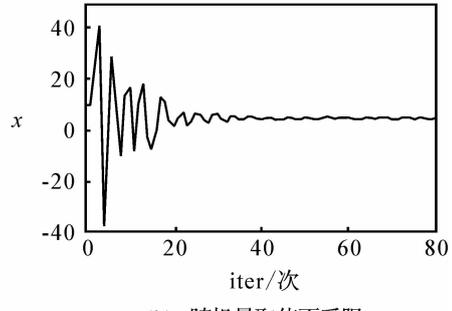
图 1 粒子位置轨迹



(a) 随机量取值受限

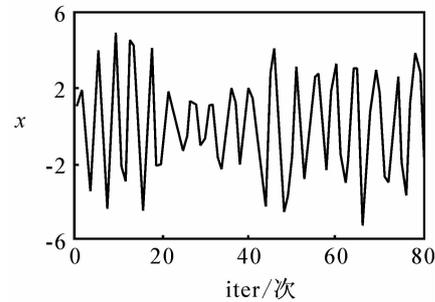


(a) 随机量取值受限



(b) 随机量取值不受限

图 3 粒子位置轨迹



(b) 随机量取值不受限

图 2 粒子位置轨迹

中粒子由于系统参数中存在随机量而一直处于运动状态中。

参数设定 3): 优化问题为 Sphere 函数 $f(x) =$

$\sum_{i=1}^n x_i^2$, 搜索空间为 $[-100, 100]$, $c_1 = c_2 = 1.5$. ω 按余弦规律取值, 即

$$\omega = \omega_{\min} (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \times \frac{1 + \cos((\text{iter} - 1)\pi / (\text{maxstep} - 1))}{2}$$

其中: $\omega_{\min} = 0.3$, $\omega_{\max} = 0.9$, iter 是当前迭代次数, 最大迭代次数 maxstep 设定为 80 次. 实验以随机量取值是否满足条件 3), 即随机量取值是否受限展开。

图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了当 ω 按余弦规律减小时, 某次运算中粒子是否在条件 3) 限制下的位置运动过程. 如图 3(a) 所示, 在随机量取值受限时, 粒子迭代 35 次就收敛到全局最优点, 而在图 3(b) 中, 粒子由于随机量取值不加限制, 需迭代 56 次才可收敛到全局最优点。

由上面的仿真实例可以看出, 当 PSO 参数满足所给出的稳定收敛条件时, 粒子的运动轨迹迅速地收敛到固定点. 当 PSO 参数不满足所给出的条件时, 粒子的运动轨迹发散、不稳定或是要经过更多次的迭代才可以收敛. 显然, 随机性的选择是否满足条件 3) 决定了粒子运动轨迹能否快速稳定收敛。

5 结 论

本文直接面对 Kennedy 提出的随机参数 φ 如何影响单粒子轨迹的问题, 着眼于随机量对粒子运动轨迹的影响. 文中应用数学领域中经典的分析非线性系统稳定性的 Lyapunov 稳定定理, 直接从分析粒子位置迭代的非线性差分方程入手, 从一个不同的角度对单个粒子的位置轨迹稳定性条件进行了研究. 重点讨论了使粒子位置稳定收敛的随机量取值条件, 得到了一组约束 PSO 算法参数取值, 使粒子运动轨迹收敛的条件。

与前人研究成果相对比, 本文所得到的稳定条件包含了文献[4,5]在不考虑随机量影响特定条件下所取得的研究成果. 同时, 取得了与文献[7,8]相同的随机参数与惯性权重的取值关系, 并且进一步限定了促使粒子运动轨迹稳定收敛的随机参数取值条件. 仿真实验验证了本文理论推导所取得的结果. 文中得到的参数取值条件对通过调整参数提高 PSO 算法的效率有一定的指导意义, 也有助于在实际应用中对 PSO 算法参数的选择和使用。

参考文献 (References)

[1] Eberhart R, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[C]. Proc of the Sixth Int Symposium on

- Micro Machine and Human Science. Nagoya, 1995: 39 - 43.
- [2] Kennedy J. The particle swarm: Social adaptation of knowledge[C]. Proc of 1997 Int Conf Evolutionary Computation. Indianapolis, 1997: 303-308.
- [3] Ozcan E, Mohan C K. Particle swarm optimization: Surfing the waves[C]. Proc of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. Washington DC, 1999: 1939-1944.
- [4] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm — Explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6 (1): 58-73.
- [5] 李宁, 孙德宝, 邹彤, 等. 基于差分方程的 PSO 算法粒子运动轨迹分析[J]. 计算机学报, 2006, 29(11): 2052-2061.
(Li N, Sun D B, Zou T, et al. An analysis for a particle's trajectory of PSO based on difference equation [J]. Chinese J of Computers, 2006, 29(11): 2052-2061.)
- [6] Kadirkamanathan V, Selvarajah K, Fleming P J. Stability analysis of the particle dynamics in particle swarm optimizer [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2006, 10(3): 245-255.
- [7] Samal N R, Konar A, Das S, et al. A closed loop stability analysis and parameter selection of the particle swarm optimization dynamics for faster convergence [C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation, Singapore, 2007: 1769-1776.
- [8] Samal N R, Konar A, Nagar A. Stability analysis and parameter selection of a particle swarm optimizer in a dynamic environment [C]. 2nd UKSIM European Symposium on Computer Modeling and Simulation. Liver pool, 2008: 21-27.
- [9] Bratton D, Kennedy J. Defining a standard for particle swarm optimization [C]. IEEE Swarm Intelligence Symposium. Honolulu, 2007: 120-127.
- [10] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979: 684.
(The edition group for mathematics handbook. Mathematics handbook[M]. Beijing: Higher Education Press, 1979: 684.)

~~~~~

(上接第 1498 页)

- [8] 曾玲, 曾三云. 给出方案优先序的模糊多属性决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(5): 113-118.  
(Zeng L, Zeng S Y. Fuzzy multiple attribute decision making method with alternative priority[J]. Engineering Theory and Practice, 2007, 27(5): 113-118.)
- [9] 徐泽水. 基于方案达成度和综合度的交互式多属性决策法[J]. 控制与决策, 2002, 17(4): 435-438.  
(Xu Z S. Interactive method based on alternative achievement scale and alternative comprehensive scale for multi-attribute decision making problems[J]. Control and Decision, 2002, 17(4): 435-438.)
- [10] 易平涛, 郭亚军. 权数非独裁性条件下基于竞争视野优化的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(11): 1259-1263.  
(Yi P T, Guo Y J. Multiattribute decision making method based on competitive view optimization under condition of weights nondictatorship[J]. Control and Decision, 2007, 22(11): 1259-1263.)
- [11] 余雁, 梁樑. 基于 Nash 均衡约束的竞争性评估方法研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(1): 8-13.  
(Yu Y, Liang L. Study of competitive assessment approach based on restriction of Nash equilibrium[J]. J of Management Sciences in China, 2006, 9(1): 8-13.)
- [12] Sexton T R, Silkman R H, Hogan A J. Data envelopment analysis: Critique and extensions [M]. Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis. San Francisco CA: Jossey Bass, 1986: 73-105.
- [13] Kim S H, Han C H. An interactive procedure for multi-attribute group decision making procedure with incomplete information[J]. Computers and Operational Research, 1999, 26 (8): 755-772.
- [14] Doyle J R, Green R H. Cross evaluation in DEA: Improving discrimination among DMUs[J]. INFOR, 1995, 33(3): 205-222.
- [15] 王美强, 梁樑. CCR 模型中决策单元的区间效率值及其排序[J]. 系统工程, 2008, 26(4): 109-112.  
(Wang M Q, Liang L. The constructing and ranking of interval efficiency of DMUs in CCR model[J]. Systems Engineering, 2008, 26(4): 109-112.)