

文章编号: 1001-0920(2009)10-1517-05

基于跟踪微分器的离散滑模控制器

孙彪, 孙秀霞

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

摘要: 利用跟踪微分器设计了一种新的离散滑模控制器, 可以从不连续的指令信号中合理提取连续信号及微分信号, 且不需要利用线性外推的方法预测指令信号下一时刻的值及其微分. 与基于趋近律的离散滑模控制器进行的对比仿真表明, 所设计的控制器在保持传统滑模控制固有强鲁棒性的同时, 控制器的输出几乎不存在抖振现象, 而且在跟踪不连续的指令信号时, 系统表现出良好的动态品质.

关键词: 跟踪微分器; 离散滑模控制; 趋近律; 鲁棒性; 抖振

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Discrete-time sliding mode controller based on tracking differentiator

SUN Biao, SUN Xiu-xia

(Engineering College, Air Force University of Engineering, Xi'an 710038, China. Correspondent: SUN Biao, E-mail: sunbiao2001@sina.com)

Abstract: Tracking differentiator is used to design a new discrete-time sliding mode controller. This controller can obtain continuous signal and differential signal logically from discontinuous order signal, and need not use the linear prediction method to predict the value and differential signal of the order signal at next time. The new controller is contrasted to reaching-law discrete-time sliding mode controller by simulation. Simulation results show that the output signal of the new controller hardly contains chattering phenomenon, and the controller can retain powerful robustness of the common discrete-time sliding mode control at the same time. The controlled system achieves excellent dynamic performance when tracking discontinuous order signal.

Key words: Tracking differentiator; Discrete-time sliding mode control; Reaching-law; Robustness; Chattering

1 引言

滑模变结构控制(VSC)的滑动模态可以设计, 且与对象参数及扰动无关, 这就使处于滑模运动的系统具有良好的鲁棒性^[1]. 但是, 该方法的缺点在于当状态轨迹到达滑模面后, 难以严格地沿着滑模面向平衡点滑动, 而是在滑模面两侧来回穿越, 从而产生高频抖振. 这种抖振在理论上是无限快的, 没有任何机构能够实现, 同时高频抖振很容易激发系统的未建模特性, 影响系统的控制性能^[2,3].

跟踪微分器(TD)是自抗扰控制器的重要组成部分. 最初提出 TD 的目的是为了解决如下工程问题: 从不连续或带有随机噪声的量测信号中合理提取连续信号及其微分信号^[4-6]. 经过对 TD 进一步研究之后, 发现它具有优越的滤波性能, 并逐渐将其发展为便于利用计算机计算的“快速离散 TD”^[7,8].

本文利用 TD 设计了一种新的离散滑模控制器, 可以从不连续的指令信号中合理提取连续信号及微分, 并且不需要预测指令信号下一时刻的值及微分^[6,7]. 与基于趋近律的离散滑模控制器进行对比的仿真结果表明, 本文设计的控制器在保持传统滑模控制固有强鲁棒性的同时, 控制器的输出几乎不存在抖振现象, 而且在跟踪不连续的指令信号时, 系统表现出良好的动态品质.

2 离散时间系统滑模控制

目前, 对离散滑模变结构的研究主要采用趋近律方法^[9]. 对于连续的滑模变结构控制, 常用的趋近律为指数趋近律, 即

$$\dot{s}(t) = -\epsilon \text{sign}(s(t)) - qs(t), \quad \epsilon > 0, q > 0. \quad (1)$$

针对二阶离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (2)$$

收稿日期: 2008-11-03; 修回日期: 2009-01-07.

作者简介: 孙彪(1981—), 男, 山东淄博人, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 孙秀霞(1962—), 女, 山东潍坊人, 教授, 博士生导师, 从事飞行控制等研究.

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix},$$

得到离散指数趋近律为

$$\frac{s(k+1) - s(k)}{T} = -\varepsilon \text{sign}(s(k)) - qs(k), \quad (3)$$

$$s(k+1) = (1 - qT)s(k) - \varepsilon T \text{sign}(s(k)). \quad (4)$$

其中: $\varepsilon > 0, q > 0, 1 - qT > 0, T$ 为采样周期. 可以证明

$$\begin{aligned} [s(k+1) - s(k)]\text{sign}(s(k)) &< 0, \\ [s(k+1) + s(k)]\text{sign}(s(k)) &> 0, \end{aligned} \quad (5)$$

满足离散滑模控制的存在性和到达性条件^[10].

下面分两种情况给出离散滑模面的设计:

1) 使系统(2)从任意初始状态恢复到平衡位置时,滑模面设计为

$$s(k) = C_e x(k), \quad (6)$$

其中 $C_e = [c \ 1], c > 0$. 有

$$s(k+1) = C_e x(k+1) = C_e A x(k) + C_e B u(k). \quad (7)$$

将式(4)代入(7)得

$$\begin{aligned} (1 - qT)s(k) - \varepsilon T \text{sign}(s(k)) = \\ C_e A x(k) + C_e B u(k). \end{aligned} \quad (8)$$

得到趋近律离散滑模控制律为

$$\begin{aligned} u(k) = \\ - (C_e B)^{-1} [C_e A x(k) - (1 - qT)s(k) + \\ \varepsilon T \text{sign}(s(k))]. \end{aligned} \quad (9)$$

2) 使系统(2)跟踪指令信号 $r_c(k)$ 时,滑模面设计为

$$s(k) = C_e E(k). \quad (10)$$

其中

$$E(k) = R(k) - x(k), R(k) = \begin{bmatrix} r_c(k) \\ dr_c(k) \end{bmatrix},$$

$dr_c(k)$ 表示指令信号 $r_c(k)$ 的变化率. 此时有

$$\begin{aligned} s(k+1) = C_e [R(k+1) - x(k+1)] = \\ C_e [R(k+1) - A x(k)] - C_e B u(k). \end{aligned} \quad (11)$$

将式(4)代入(11)得

$$\begin{aligned} u(k) = \\ (C_e B)^{-1} \{C_e [R(k+1) - A x(k)] - \\ (1 - qT)s(k) + \varepsilon T \text{sign}(s(k))\}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$R(k+1) = \begin{bmatrix} r_c(k+1) \\ dr_c(k+1) \end{bmatrix},$$

$r_c(k+1)$ 和 $dr_c(k+1)$ 用线性外推的方法获得,即

$$\begin{aligned} r_c(k+1) &= 2r_c(k) - r_c(k-1), \\ dr_c(k+1) &= 2dr_c(k) - dr_c(k-1). \end{aligned} \quad (13)$$

为了减轻控制器输出的抖振,可以用饱和函数 $\text{sat}(s)$ 代替式(9)和(12)中的符号函数 $\text{sign}(s)$.

3 利用 TD 的离散滑模控制器设计

TD 的离散化公式为^[7,8]

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T x_2(k), \\ x_2(k+1) = \\ x_2(k) + T \times \text{fhan}(x_1(k) - \\ v(k), x_2(k), e, h). \end{cases} \quad (14)$$

其中: $v(k)$ 为 TD 的输入信号; $x_1(k)$ 为 $v(k)$ 的跟踪信号; $x_2(k)$ 为 $x_1(k)$ 的导数, 可视为 $v(k)$ 的导数; T 为系统采样时间; e 为决定 x_1 跟踪信号 v 快慢的参数, e 越大, 跟踪速度越快, 但是当 v 被噪声污染时, 会使信号被更大的噪声污染; h 为决定滤波效果的因子, 一般而言, h 越大, 滤波效果越好, 但是 h 越大, 会使 x_1 跟踪信号 v 的相位损失越大; $\text{fhan}(x_1, x_2, e, h)$ 称为 TD 的最速控制综合函数^[8], 为

$$\begin{aligned} d &= eh; \\ d_0 &= hd; \\ y &= x_1 + h x_2; \\ a_0 &= \sqrt{d^2 + 8e|y|}; \\ a &= \begin{cases} x_2 + \frac{(a_0 - d)}{2} \text{sign}(y), & |y| > d_0; \\ x_2 + y/h, & |y| \leq d_0; \end{cases} \\ \text{fhan} &= - \begin{cases} e \text{sign}(a), & |a| > d; \\ ea/d, & |a| \leq d. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

利用 TD 设计的离散滑模控制器主要受以下两点的启发:

1) 滑模变结构控制产生抖振的最主要原因在于, 当系统的状态轨迹到达滑模面后, 难以严格地沿着滑模面向平衡点滑动, 而是在滑模面两侧来回穿越. 在自抗扰控制器的研究过程中发现, 针对以下二阶离散系统:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + T u. \end{cases}$$

如果令 $u = \text{fhan}(x_1(k), x_2(k), e, h)$, 按照这个差分方程推导, 就能使该离散系统的状态从初始位置以有限步到达原点并停止不动^[6].

2) 从式(12)可以看出, 离散滑模控制律需要求解指令信号的微分和预测下一时刻的指令值. 而 TD 可以从不连续或带随机噪声的量测信号中合理提取连续信号及其微分. 工程中常用线性外推的方法预测下一时刻的指令值, 但是当指令信号不连续或受噪声干扰时, 该方法获取的预测值误差很大, 甚至无法应用.

本文设计的控制器利用了两个 TD. 第 1 个 TD 用来获取指令信号的微分, 即

$$r_i(k) = r_i(k-1) + T dr_i(k-1),$$

$$\begin{aligned} dr_i(k) = & \\ dr_i(k-1) + T \times fhan(r_i(k-1) - & \\ r_c(k-1), dr_i(k-1), e_r, h_r). & \end{aligned} \quad (16)$$

其中： $r_i(k)$ 表示指令信号 $r_c(k)$ 的跟踪信号； $dr_i(k)$ 表示 $r_i(t)$ 的微分，视作 $r_c(k)$ 的微分。

第 2 个 TD 与式(10) 相结合，使切换函数 $s(k)$ 快速到达零，并且得到 $s(k)$ 的微分 $ds(k)$ 。有

$$\begin{aligned} s(k-1) = C_s E(k-1), \\ E(k-1) = \begin{bmatrix} r_i(k-1) - x_1(k-1) \\ dr_i(k-1) - x_2(k-1) \end{bmatrix}, \\ s(k) = s(k-1) + T ds(k-1), \\ ds(k) = \\ ds(k-1) + T \times fhan(s(k-1), ds(k-1), e_s, h_s). \end{aligned} \quad (17)$$

以下列二阶连续系统为例，推导控制律：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f(x_1(t), x_2(t), t) + bu(t) + w(t), \end{cases} \quad (18)$$

其中 $w(t)$ 为噪声干扰信号。根据式(10) 得

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & \\ c[\dot{r}_c(t) - \dot{x}_1(t)] + \ddot{r}_c(t) - \dot{x}_2(t) = & \\ \dot{c}r_c(t) + \ddot{r}_c(t) - cx_2 - & \\ [f(x_1(t), x_2(t), t) + bu(t) + w(t)] = & \\ -cx_2 - f(x_1(t), x_2(t), t) - bu(t) + \dot{c}r_c(t) + & \\ \ddot{r}_c(t) - w(t). & \end{aligned} \quad (19)$$

从而得到控制律

$$\begin{aligned} u(t) = & \\ -\frac{1}{b}[\dot{s}(t) + cx_2(t) + f(x_1(t), x_2(t), t)] + & \\ \frac{1}{b}[\dot{c}r_c(t) + \ddot{r}_c(t) - w(t)]. & \end{aligned} \quad (20)$$

式(20) 中的第 2 部分与系统状态变量无直接关系，可全部视为噪声干扰。简化后的控制律为

$$\begin{aligned} u(t) = & \\ -\frac{1}{b}[\dot{s}(t) + cx_2(t) + f(x_1(t), x_2(t), t)]. & \end{aligned} \quad (21)$$

离散化后为

$$\begin{aligned} u(k) = & \\ -\frac{1}{b}[ds(k) + cx_2(k) + f(x_1(k), x_2(k), k)]. & \end{aligned} \quad (22)$$

式(16)，(17) 和(22) 构成了一种新的离散滑模控制器。可以看出，这种控制器不需要预测指令信号下一时刻的值及其微分。

4 对比仿真

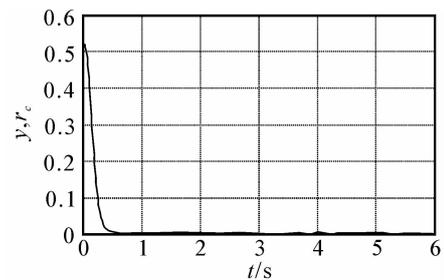
针对以下二阶离散系统：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T \times x_2(k), \\ x_2(k+1) = \\ x_2(k) + T \times [-25x_2(k) + 133u(k) + w(k)], \\ y(k) = x_1(k). \end{cases} \quad (23)$$

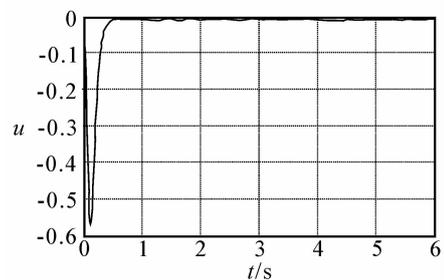
其中： $x(k)$ 的初值为

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

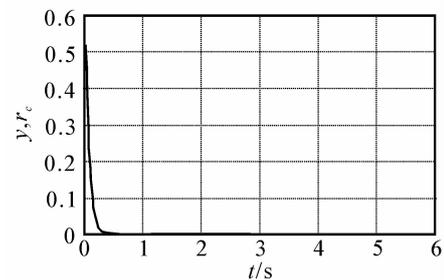
采样时间 $T = 0.001s$ ； $w(k)$ 为噪声干扰，取值为



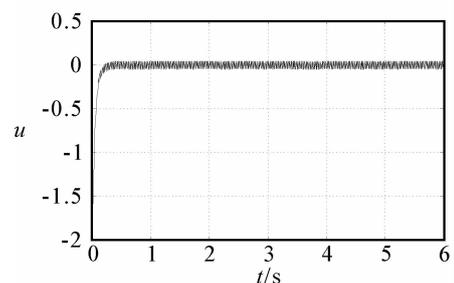
(a) 利用TD时的位置跟踪



(b) 利用TD的控制器输出



(c) 利用趋近率的位置跟踪



(d) 利用趋近率的控制器输出

图 1 $r_c = 0$ 时的仿真结果

$$\begin{aligned} \omega(k) = & \cos(0.6kT)x_1(k) + \cos(0.7kT)x_2(k) + \\ & 0.5\text{sign}(kT) + n(k); \end{aligned} \quad (24)$$

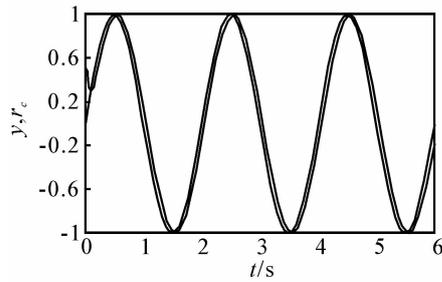
$n(k)$ 为 $[-1, 1]$ 内的白噪声。

采用趋近律离散滑模控制器与本文设计的控制器进行对比。取式(4)中的参数 $\epsilon = 5, q = 30$ 和(6)中的参数 $c = 15$ 。根据式(14), TD 中需要调整的参数分别为 e 和 h , 其中滤波因子 h 的取值和系统的采样时间 T 有关, h 的取值范围大致为 $3T \sim 10T^{[8]}$ 。本文取 $e_r = e_s = 800, h_r = h_s = 7T$ 。仿真时, 指令信号

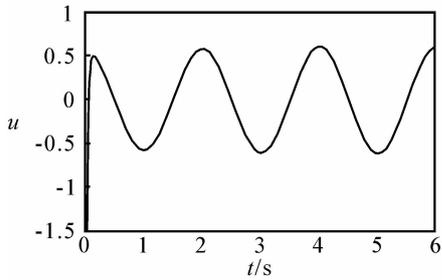
r_c 分别取为零、正弦信号和方波信号, 仿真结果如图 1 ~ 图 3 所示。

从图 1 可以看出, 两种控制器均可使系统输出 y 无超调地恢复到零, 但是趋近律离散滑模控制器的输出 u 有明显的抖振; 而利用 TD 设计的控制器在系统达到稳态后, 控制器的输出 u 虽然没有完全达到零值, 但是抖振大为减轻。

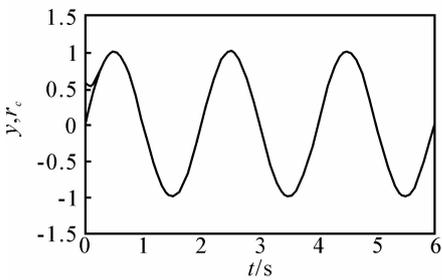
从图 2 可以看出, 利用 TD 设计的控制器在跟踪正弦信号时, 存在少许的相位滞后, 但是控制器的输出已经基本上不存在抖振问题; 而趋近律滑模控制



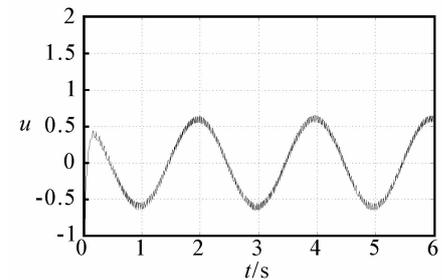
(a) 利用TD时的位置跟踪



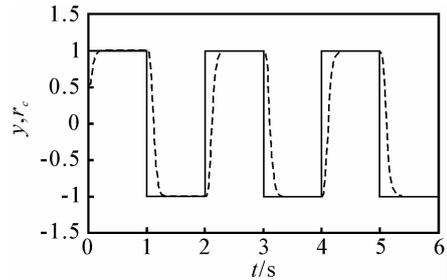
(b) 利用TD的控制器输出



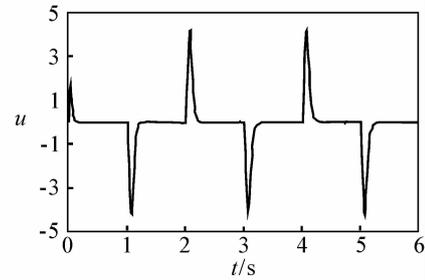
(c) 利用趋近率的位置跟踪



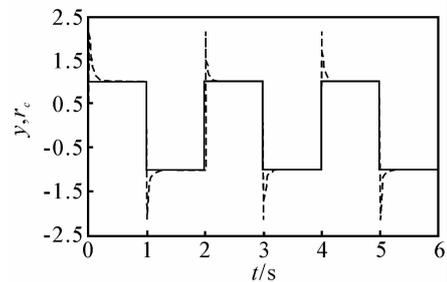
(d) 利用趋近率的控制器输出



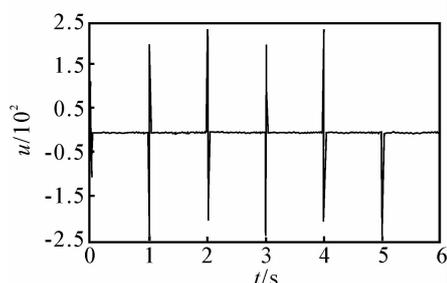
(a) 利用TD时的位置跟踪



(b) 利用TD的控制器输出



(c) 利用趋近率的位置跟踪



(d) 利用趋近率的控制器输出

图 2 r_c 为正弦信号时的仿真结果

图 3 r_c 为方波信号时的仿真结果

器虽然实现了对正弦信号的完美跟踪,但其控制器输出的高频抖振仍然没有消失。

从图 3 可以看出,利用 TD 设计的控制器实现了对方波信号无超调的跟踪,控制器的输出幅值在 $[-5, 5]$ 之间,且不存在抖振现象。趋近律离散滑模控制器需要利用线性外推的方法预测指令信号下一时刻的值及其微分。由于方波信号不连续且在阶跃处微分不存在,导致了系统的输出超调很大,且控制器的输出达到了 10^3 这个数量级,从而使得这种控制器在实际工程中无法应用。

5 结 论

滑模控制具有强鲁棒性,但是控制器输出存在的高频抖振影响了这种控制方法在实际工程中的应用。本文利用 TD 设计的新型离散滑模控制器,能够从不连续或带随机噪声的量测信号中合理提取连续信号及微分,且不需要预测指令信号下一时刻的值及微分。与趋近律的离散滑模控制器相比,本文设计的控制器最大的优点是在保持强鲁棒性的同时,控制器的输出基本上不存在抖振现象。数值仿真结果还表明,本文设计的控制器在跟踪不连续的指令信号时,也能表现出良好的动态品质。

参考文献 (References)

- [1] 刘金琨. 滑模变结构控制 Matlab 仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(Liu J K. Matlab simulation for sliding mode control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.)
- [2] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407-417.
(Liu J K, Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control [J]. Control Theory and Application, 2007, 24(3): 407-417.)
- [3] Young K D, Utkin V I, Ozguner U. A control engineer's guide to sliding mode control [J]. IEEE Trans on Control Systems, 1999, 7(3): 328-342.
- [4] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用[J]. 控制与决策, 1998, 13(1): 19-23.
(Han J Q. Active disturbance rejection controller and it's applications [J]. Control and Decision, 1998, 13(1): 19-23.)
- [5] 黄一, 张文革. 自抗扰控制器的发展[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 485-492.
(Huang Y, Zhang W G. Development of active disturbance rejection controller [J]. Control Theory and Application, 2002, 19(4): 485-492.)
- [6] 韩京清. 自抗扰控制技术[J]. 前沿科学, 2007, (1): 24-31.
(Han J Q. Active disturbance rejection control technique [J]. Frontier Science, 2007, (1): 24-31.)
- [7] 韩京清, 黄远灿. 二阶跟踪-微分器的频率特性[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 71-74.
(Han J Q, Huang Y C. Frequency characteristic of second-order tracking-differentiator [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 71-74.)
- [8] 武利强, 林浩, 韩京清. TD 滤波性能研究[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(4): 651-654.
(Wu L Q, Lin H, Han J Q. Study of tracking differentiator on filtering [J]. J of System Simulation, 2004, 16(4): 651-654.)
- [9] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control system [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [10] Sarpurk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control system [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(10): 930-932.
- [5] Peer E S, Van den Bergh F, Engelbrecht A. Using neighborhood with the guaranteed convergence PSO [C]. Proc of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium, Indiana, 2003: 235-242.
- [6] 孟红记, 郑鹏, 梅国晖, 等. 基于混沌序列的粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2006, 21(3): 263-266.
(Meng H J, Zheng P, Mei G H, et al. Particle swarm optimization algorithm based on chaotic series [J]. Control and Decision, 2006, 21(3): 263-266.)
- [7] Fan S K S, Liang Y C, Zahara E. Hybrid simplex search and particle swarm optimization for the global optimization of Multimodal Functions [J]. Engineering Optimization, 2004, 36(4): 401-418.
- [8] Parsopoulos K E, Vrahatis M N. Initializing the particle swarm optimizer using the nonlinear simplex method [C]. Advances in Intelligent Systems, Fuzzy Systems, Evolutionary Computation. Athens, 2002: 216-221.
- [9] 李勇军, 袁小芳, 孙炜. 动态分级的并行混沌优化算法研究[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(12): 2690-2694.
(Li Y J, Yuan X F, Sun W. Dynamic hierarchical parallel chaotic optimization algorithms [J]. J of System Simulation, 2007, 19(12): 2690-2694.)
- [10] 王芳, 邱玉辉. 一种引入单纯形法算子的新颖粒子群算法[J]. 信息与控制, 2005, 34(5): 517-522.
(Wang F, Qiu Y H. A novel particle swarm algorithm using the simplex method operator [J]. Information and Control, 2005, 34(5): 517-522.)

(上接第 1516 页)