

文章编号: 1001-0920(2009)10-1549-06

一类区间时变输入时滞与状态时滞线性系统的稳定性研究

王新梅, 裴海龙

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640)

摘要: 研究一类具有区间时变输入时滞与状态时滞线性系统的稳定性问题. 通过选择合理的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 基于积分等式方法(积分等式由自由权矩阵构造而成), 以 LMI 的形式给出时滞相关的稳定性充分条件, 并进行了相关控制器的设计. 所得结论对时滞导数没有任何限制, 可用于快时变时滞系统. 同时, 积分等式方法较积分不等式方法更优, 保守性更低. 最后, 通过数值比较及仿真表明了所提出方法的有效性和优越性.

关键词: 区间时变; 积分等式; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP27

文献标识码: A

Stabilization analysis of interval time-varying state and input delays systems

WANG Xin-mei, PEI Hai-long

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China.

Correspondent: WANG Xin-mei, E-mail: qiuqixixi@163.com)

Abstract: This paper considers the stabilization of interval time-varying state and input delays systems. Based on appropriate Lyapunov-Krasovskii function and integral equality approach, in which integral equality is constructed with free weighting matrices, the sufficient conditions for delay-dependent stabilization are derived in terms of LMI and the controller is also designed. The results have no restriction on the derivatives of the time-varying delay and can be applied to quick time-varying delays systems. At the same time, the new improved integral equality approach is much less conservative than integral inequality approach. Finally, the numerical example and simulation show the effectiveness and feasibility of the method.

Key words: Interval time-varying; Integral equality approach; Linear matrix inequality

1 引言

时滞存在于大量的动态系统中, 比如远程控制系统、网络传输系统、电力系统、化学系统以及生物系统等, 若忽略时滞将会对系统的性能产生很大的影响. 现有的研究时滞系统稳定性的成果基本分为两大类: 时滞相关和时滞独立. 由于时滞相关准则利用了时滞信息, 它们的保守性相对较低, 而时滞相关稳定条件通常都是通过变换得出的, 比如中立变换、参数变换等. 还有一种就是利用 Leibniz-Newton 公式, 通过在 $\dot{V}(t)$ 中适当地添加一些零项、引入辅助变量并利用广义的状态变量, 也可以得出保守性较小的结果^[1-3]. 在目前的研究成果中, 有些结果要求系统时滞参数的导数小于 1. 但在很多实际系统中, 可能无法预知时滞参数导数的情况, 如遥操作系统

和网络控制系统中的时滞参数变化很快, 有时时滞参数的导数甚至可能不存在, 这时已有方法可能就不适用了. 然而, 这些系统中时滞参数的上界和下界往往可以知道, 所以研究这种具有区间时变时滞系统的稳定性问题已经成为时滞系统研究的一个新方向. 同时, 具有输入时滞与状态时滞线性系统的鲁棒镇定问题也是 2003 年法国学者 Richard^[4] 在 Automatica 上发表的关于时滞系统的综述文章里提到过的 4 个公开问题之一, 即: 考虑同时具有状态时滞与输入时滞的线性系统 $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_d x(t-h) + \mathbf{B}_1 u(t) + \mathbf{B}_2 u(t-h)$, 如果矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ 与 $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_d, \mathbf{B}_1)$ 不能控, 如何利用输入时滞项 $\mathbf{B}_2 u(t-h)$ 进行有效控制. 当 $\mathbf{A}_d = 0$ 时, 系统只含输入时滞, 对于这类系统, 常常采用 Artstein 模型退化

收稿日期: 2008-12-05; 修回日期: 2009-02-27.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60736024); 国家自然科学基金项目(60574004).

作者简介: 王新梅(1979—), 女, 湖北黄石人, 博士生, 从事时滞系统稳定性分析的研究; 裴海龙(1965—), 男, 河南邓县人, 教授, 博士生导师, 从事嵌入式系统分析与应用、智能机器人系统的研究.

方法,将原来系统变成无时滞的线性系统.但这类方法只适用于参数模型完全已知的情形,如果系统含有不确定性或时滞是变化的,该方法不再有效,即使模型精确已知,Artstein 模型退化方法得到的控制器具有分布时滞,这类控制器也不易实现.当 $\mathbf{A}_d \neq 0$ 时,对于这类系统的研究并不多见.文献[5]针对线性时变输入和状态时滞系统,利用一类新型的积分不等式得到了该类系统的无记忆状态反馈情况下的稳定性充分条件;[6] 研究了一类时变输入和状态时滞 T-S 模糊系统的保成本控制;[7] 研究了一类时变状态和输入奇异时滞系统的稳定性问题;[8] 研究了一类时变状态和输入时滞 T-S 模糊系统的鲁棒 H_∞ 控制.总而言之,对时变输入和状态时滞系统的稳定性研究并不多见,而且已有的研究有不同程度的保守性.

本文对具有区间时变输入时滞与状态时滞线性系统的稳定性问题进行研究.通过选择合理的 Lyapunov-Krasovskii 函数结合辅助变量和广义状态法^[1,3],基于积分等式方法(积分等式由自由权矩阵构造而成),以 LMI 的形式给出时滞相关的稳定性充分条件及相关控制器设计.本文结论不必检验矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ 与 $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_d, \mathbf{B}_1)$ 是否能控或能稳,只要给定的 LMI 可解,就一定能找到无记忆状态反馈控制器使原系统镇定.本文具有两个特点:1) 本文结论对时滞的导数没有任何限制(即不用讨论时变时滞是否可微),同时也可用于具有快时变时滞系统;2) 运用积分等式方法,解决了稳定性问题中保守性的根源问题.

2 预备知识及问题描述

2.1 问题描述

考虑如下名义的时滞系统:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1x(t - \tau_1(t)) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{B}_1u(t - \tau_2(t)). \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^m$ 为状态变量, $u(t) \in R^n$ 为控制输入, $\tau_i(t)$ 为区间时变时滞且满足

$$0 < \tau_{i \min} \leq \tau_i(t) \leq \tau_{i \max}, \tau_{i \max} = \max_i(\tau_{i \max}).$$

$\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_1$ 是合适维数常数实矩阵.作如下定义:

$$\tau_{i,1/2} = \frac{1}{2}(\tau_{i \max} + \tau_{i \min}), \delta_i = \frac{1}{2}(\tau_{i \max} - \tau_{i \min}),$$

则有 $\tau_i(t) = \tau_{i,1/2} + \delta_i m_i(t)$, 其中

$$m_i(t) = \begin{cases} \frac{2\tau_i(t) - (\tau_{i \max} + \tau_{i \min})}{\tau_{i \max} - \tau_{i \min}}, & \tau_{i \max} > \tau_{i \min}; \\ 0, & \tau_{i \max} = \tau_{i \min}. \end{cases}$$

由此可得

$$|m_i(t)| \leq 1, \tau_i(t) \in [\tau_{i,1/2} - \delta_i, \tau_{i,1/2} + \delta_i]. \quad (2)$$

考虑无记忆状态反馈控制器 $u(t) = \mathbf{K}x(t)$, 下面讨论该类系统在控制器作用下稳定的充分条件.

2.2 相关引理

引理 1 给定常数 $d > 0$, 对于任意合适维数的矩阵 $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$, 变量 $\mathbf{g}(s), \zeta(t)$, 下列等式成立:

$$\begin{aligned} & - \int_{t-d}^t \mathbf{g}^T(s) \mathbf{W} \mathbf{g}(s) ds = \\ & 2\zeta^T(t) \mathbf{V} \int_{t-d}^t \mathbf{g}(s) ds + d\zeta^T(t) \mathbf{U} \zeta(t) - \\ & \int_{t-d}^t (\zeta^T(t) \mathbf{g}^T(s)) \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} \\ * & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \mathbf{g}(s) \end{bmatrix} ds. \end{aligned}$$

证明 将

$$\begin{aligned} \zeta^T(t) \mathbf{V} \int_{t-d}^t \mathbf{g}(s) ds &= \int_{t-d}^t \mathbf{g}^T(s) \mathbf{V}^T \zeta(t) ds, \\ \int_{t-d}^t \zeta^T(t) \mathbf{U} \zeta(t) ds &= d\zeta^T(t) \mathbf{U} \zeta(t) \end{aligned}$$

代入引理 1 中, 等式的右边展开即可得证. \square

3 主要结果

定理 1 考虑具有区间时变输入和状态时滞的系统(1), 假设 $\tau_{i,1/2}, \delta_i$ 是已知正数, 若存在合适维数的正定对称阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i (i = 1, 2)$, 辅助变量 $\mathbf{M}_{1j}, \mathbf{M}_{2j}, \mathbf{N}_{1j}, \mathbf{N}_{2j}, \mathbf{W}_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ 以及矩阵 \mathbf{K} , 使得以下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \Psi & \tau_{1,1/2} \mathbf{M}_1 & \tau_{2,1/2} \mathbf{M}_2 \\ * & -\tau_{1,1/2} \mathbf{R}_1 & 0 \\ * & * & -\tau_{2,1/2} \mathbf{R}_2 \rightarrow \\ * & * & * \\ * & * & * \\ & 2\delta_1 \mathbf{N}_1 & 2\delta_2 \mathbf{N}_2 \\ & 0 & 0 \\ \leftarrow & 0 & 0 \\ & -2\delta_1 \mathbf{S}_1 & 0 \\ & * & -2\delta_2 \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (3)$$

其中

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{1,1} & \Psi_{1,2} & \Psi_{1,3} & \Psi_{1,4} & \Psi_{1,5} \\ * & \Psi_{2,2} & \Psi_{2,3} & \Psi_{2,4} & \Psi_{2,5} \\ * & * & \Psi_{3,3} & \Psi_{3,4} & \Psi_{3,5} \\ * & * & * & \Psi_{4,4} & \Psi_{4,5} \\ * & * & * & * & \Psi_{5,5} \rightarrow \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \psi_{1,6} & \psi_{1,7} & \psi_{1,8} & \psi_{1,9} & \psi_{1,10} \\ \psi_{2,6} & \psi_{2,7} & \psi_{2,8} & \psi_{2,9} & \psi_{2,10} \\ \psi_{3,6} & \psi_{3,7} & \psi_{3,8} & \psi_{3,9} & \psi_{3,10} \\ \psi_{4,6} & \psi_{4,7} & \psi_{4,8} & \psi_{4,9} & \psi_{4,10} \\ \psi_{5,6} & \psi_{5,7} & \psi_{5,8} & \psi_{5,9} & \psi_{5,10} \\ \psi_{6,6} & \psi_{6,7} & \psi_{6,8} & \psi_{6,9} & \psi_{6,10} \\ * & \psi_{7,7} & \psi_{7,8} & \psi_{7,9} & \psi_{7,10} \\ * & * & \psi_{8,8} & \psi_{8,9} & \psi_{8,10} \\ * & * & * & \psi_{9,9} & \psi_{9,10} \\ * & * & * & * & \psi_{10,10} \end{array} \right],$$

$$\begin{aligned} \psi_{1,1} &= M_{21} + M_{21}^T + M_{11} + M_{11}^T + W_1(A + BK) + (A + BK)^T W_1^T + Q_1 + Q_2, \\ \psi_{1,2} &= M_{12}^T + M_{22}^T - M_{11} + (A + BK)^T W_2^T, \\ \psi_{1,3} &= M_{13}^T + M_{23}^T - M_{21} + (A + BK)^T W_3^T, \\ \psi_{1,4} &= M_{14}^T + M_{24}^T + N_{11} + (A + BK)^T W_4^T, \\ \psi_{1,5} &= M_{15}^T + M_{25}^T - N_{11} + (A + BK)^T W_5^T, \\ \psi_{1,6} &= M_{16}^T + M_{26}^T + N_{21} + (A + BK)^T W_6^T, \\ \psi_{1,7} &= M_{17}^T + M_{27}^T - N_{21} + (A + BK)^T W_7^T, \\ \psi_{1,8} &= M_{18}^T + M_{28}^T + (A + BK)^T W_8^T - W_1 + P, \\ \psi_{1,9} &= M_{19}^T + M_{29}^T + (A + BK)^T W_9^T + W_1 A_1, \\ \psi_{1,10} &= M_{110}^T + M_{210}^T + (A + BK)^T W_{10}^T + W_1 B_1 K, \\ \psi_{2,2} &= -M_{12}^T - M_{12} - Q_1, \psi_{2,3} = -M_{13}^T - M_{22}, \\ \psi_{2,4} &= -M_{14}^T + N_{12}, \psi_{2,5} = -M_{15}^T - N_{12}, \\ \psi_{2,6} &= -M_{16}^T + N_{22}, \psi_{2,7} = -M_{17}^T - N_{22}, \\ \psi_{2,8} &= -M_{18}^T - W_2, \psi_{2,9} = -M_{19}^T + W_2 A_1, \\ \psi_{2,10} &= -M_{110}^T + W_2 B_1 K, \\ \psi_{3,3} &= -M_{23}^T - M_{23} - Q_2, \\ \psi_{3,4} &= -M_{24}^T + N_{13}, \psi_{3,5} = -M_{25}^T - N_{13}, \\ \psi_{3,6} &= -M_{26}^T + N_{23}, \psi_{3,7} = -M_{27}^T - N_{23}, \\ \psi_{3,8} &= -M_{28}^T - W_3, \psi_{3,9} = -M_{29}^T + W_3 A_1, \\ \psi_{3,10} &= -M_{210}^T + W_3 B_1 K, \psi_{4,4} = N_{14}^T + N_{14}, \\ \psi_{4,5} &= N_{15}^T - N_{14}, \psi_{4,6} = N_{16}^T + N_{24}, \\ \psi_{4,7} &= N_{17}^T - N_{24}, \psi_{4,8} = N_{18}^T - W_4, \\ \psi_{4,9} &= N_{19}^T + W_4 A_1, \psi_{4,10} = N_{110}^T + W_4 B_1 K, \\ \psi_{5,5} &= -N_{15}^T - N_{15}, \psi_{5,6} = -N_{16}^T + N_{25}, \\ \psi_{5,7} &= -N_{17}^T - N_{25}, \psi_{5,8} = -N_{18}^T - W_5, \\ \psi_{5,9} &= -N_{19}^T + W_5 A_1, \psi_{5,10} = -N_{110}^T + W_5 B_1 K, \\ \psi_{6,6} &= N_{26}^T + N_{26}, \psi_{6,7} = N_{27}^T - N_{26}, \\ \psi_{6,8} &= N_{28}^T - W_6, \psi_{6,9} = N_{29}^T + W_6 A_1, \\ \psi_{6,10} &= N_{210}^T + W_6 B_1 K, \\ \psi_{7,7} &= -N_{27}^T - N_{27}, \psi_{7,8} = -N_{28}^T - W_7, \\ \psi_{7,9} &= -N_{29}^T + W_7 A_1, \psi_{7,10} = -N_{210}^T + W_7 B_1 K, \\ \psi_{8,8} &= -W_8 - W_8^T + \tau_{1,1/2} R_1 + \tau_{2,1/2} R_2 + 2\delta_1 S_1 + 2\delta_2 S_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{8,9} &= -W_9^T + W_8 A_1, \psi_{8,10} = -W_{10}^T + W_8 B_1 K, \\ \psi_{9,9} &= W_9 A_1 + A_1^T W_9^T, \psi_{9,10} = W_9 B_1 K + A_1^T W_{10}^T, \\ \psi_{10,10} &= W_{10} B_1 K + (B_1 K)^T W_{10}^T, \\ M_1^T &= [M_{11}^T, M_{12}^T, \dots, M_{110}^T], \\ M_2^T &= [M_{21}^T, M_{22}^T, \dots, M_{210}^T], \\ N_1^T &= [N_{11}^T, N_{12}^T, \dots, N_{110}^T], \\ N_2^T &= [N_{21}^T, N_{22}^T, \dots, N_{210}^T]. \end{aligned}$$

则系统(1)在状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ 的作用下渐近稳定.

证明 由 Leibniz-Newton 公式,有

$$x(t - \tau_{i,1/2}) - x(t - \tau_i(t)) = \int_{t-\tau_i(t)}^{t-\tau_{i,1/2}} \dot{x}(s) ds.$$

定义 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_t) =$$

$$\begin{aligned} &x^T(t) P x(t) + \sum_{i=1}^2 \left(\int_{t-\tau_{i,1/2}}^t x^T(s) Q_i x(s) ds + \int_{-\tau_{i,1/2}}^0 ds \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) R_i \dot{x}(\theta) d\theta + \int_{-\tau_{i,1/2}-\delta_i}^{-\tau_{i,1/2}+\delta_i} ds \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\theta) S_i \dot{x}(\theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

其中: $P > 0, Q_i > 0, R_i > 0, S_i > 0, i = 1, 2$. 该函数关于时间 t 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) + \sum_{i=1}^2 (x^T(t) Q_i x(t) - x^T(t - \tau_{i,1/2}) Q_i x(t - \tau_{i,1/2})) + \sum_{i=1}^2 (\tau_{i,1/2} \dot{x}^T(t) R_i \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_{i,1/2}}^t \dot{x}^T(\theta) R_i \dot{x}(\theta) d\theta + 2\delta_i \dot{x}^T(t) S_i \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_{i,1/2}-\delta_i}^{t-\tau_{i,1/2}+\delta_i} \dot{x}^T(\theta) S_i \dot{x}(\theta) d\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

引入广义状态

$$\begin{aligned} \xi^T(t) &= [x^T(t), x^T(t - \tau_{1,1/2}), x^T(t - \tau_{2,1/2}), x^T(t - \tau_{1,1/2} + \delta_1), x^T(t - \tau_{1,1/2} - \delta_1), x^T(t - \tau_{2,1/2} + \delta_2), x^T(t - \tau_{2,1/2} - \delta_2), \dot{x}^T(t), x^T(t - \tau_1(t)), x^T(t - \tau_2(t))] \end{aligned}$$

和辅助变量

$$\begin{aligned} M_1^T &= [M_{11}^T, M_{12}^T, \dots, M_{110}^T], \\ M_2^T &= [M_{21}^T, M_{22}^T, \dots, M_{210}^T], \\ N_1^T &= [N_{11}^T, N_{12}^T, \dots, N_{110}^T], \\ N_2^T &= [N_{21}^T, N_{22}^T, \dots, N_{210}^T], \\ W^T &= [W_1^T, W_2^T, \dots, W_{10}^T]. \end{aligned} \quad (5)$$

添加以下零项:

$$2\xi^T(t) M_1 [x(t) - x(t - \tau_{1,1/2}) - \int_{t-\tau_{1,1/2}}^t \dot{x}(s) ds] = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \psi'_{1,7} &= \widetilde{M}_{17}^T + \widetilde{M}_{27}^T - \widetilde{N}_{21} + r_7(\mathbf{V}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T), \\
 \psi'_{1,8} &= \widetilde{M}_{18}^T + \widetilde{M}_{28}^T + r_8(\mathbf{V}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) - \\
 &\quad r_1\mathbf{V}^T + \widetilde{P}, \\
 \psi'_{1,9} &= \widetilde{M}_{19}^T + \widetilde{M}_{29}^T + r_9(\mathbf{V}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) + r_1\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{1,10} &= \widetilde{M}_{110}^T + \widetilde{M}_{210}^T + r_{10}(\mathbf{V}\mathbf{A}^T + \\
 &\quad \mathbf{Y}^T\mathbf{B}^T) + r_1\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \\
 \psi'_{2,2} &= -\widetilde{M}_{12}^T - \widetilde{M}_{12} - \widetilde{Q}_1, \quad \psi'_{2,3} = -\widetilde{M}_{13}^T - \widetilde{M}_{22}, \\
 \psi'_{2,4} &= -\widetilde{M}_{14}^T + \widetilde{N}_{12}, \quad \psi'_{2,5} = -\widetilde{M}_{15}^T - \widetilde{N}_{12}, \\
 \psi'_{2,6} &= -\widetilde{M}_{16}^T + \widetilde{N}_{22}, \quad \psi'_{2,7} = -\widetilde{M}_{17}^T - \widetilde{N}_{22}, \\
 \psi'_{2,8} &= -\widetilde{M}_{18}^T - r_2\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{2,9} = -\widetilde{M}_{19}^T + r_2\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{2,10} &= -\widetilde{M}_{110}^T + r_2\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \\
 \psi'_{3,3} &= -\widetilde{M}_{23}^T - \widetilde{M}_{23} - \widetilde{Q}_2, \\
 \psi'_{3,4} &= -\widetilde{M}_{24}^T + \widetilde{N}_{13}, \quad \psi'_{3,5} = -\widetilde{M}_{25}^T - \widetilde{N}_{13}, \\
 \psi'_{3,6} &= -\widetilde{M}_{26}^T + \widetilde{N}_{23}, \quad \psi'_{3,7} = -\widetilde{M}_{27}^T - \widetilde{N}_{23}, \\
 \psi'_{3,8} &= -\widetilde{M}_{28}^T - r_3\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{3,9} = -\widetilde{M}_{29}^T + r_3\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{3,10} &= -\widetilde{M}_{210}^T + r_3\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \quad \psi'_{4,4} = \widetilde{N}_{14}^T + \widetilde{N}_{14}, \\
 \psi'_{4,5} &= \widetilde{N}_{15}^T - \widetilde{N}_{14}, \quad \psi'_{4,6} = \widetilde{N}_{16}^T + \widetilde{N}_{24}, \\
 \psi'_{4,7} &= \widetilde{N}_{17}^T - \widetilde{N}_{24}, \quad \psi'_{4,8} = \widetilde{N}_{18}^T - r_4\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{4,9} &= \widetilde{N}_{19}^T + r_4\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{4,10} = \widetilde{N}_{110}^T + r_4\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \\
 \psi'_{5,5} &= -\widetilde{N}_{15}^T - \widetilde{N}_{15}, \quad \psi'_{5,6} = -\widetilde{N}_{16}^T + \widetilde{N}_{25}, \\
 \psi'_{5,7} &= -\widetilde{N}_{17}^T - \widetilde{N}_{25}, \quad \psi'_{5,8} = -\widetilde{N}_{18}^T - r_5\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{5,9} &= -\widetilde{N}_{19}^T + r_5\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{5,10} = -\widetilde{N}_{110}^T + r_5\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \\
 \psi'_{6,6} &= \widetilde{N}_{26}^T + \widetilde{N}_{26}, \quad \psi'_{6,7} = \widetilde{N}_{27}^T - \widetilde{N}_{26}, \\
 \psi'_{6,8} &= \widetilde{N}_{28}^T - r_6\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{6,9} = \widetilde{N}_{29}^T + r_6\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{6,10} &= \widetilde{N}_{210}^T + r_6\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \quad \psi'_{7,7} = -\widetilde{N}_{27}^T - \widetilde{N}_{27}, \\
 \psi'_{7,8} &= -\widetilde{N}_{28}^T - r_7\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{7,9} = -\widetilde{N}_{29}^T + r_7\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \\
 \psi'_{7,10} &= -\widetilde{N}_{210}^T + r_7\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \\
 \psi'_{8,8} &= -r_8\mathbf{V}^T - r_8\mathbf{V} + \tau_{1,1/2}\widetilde{\mathbf{R}}_1 + \\
 &\quad \tau_{2,1/2}\widetilde{\mathbf{R}}_2 + 2\delta_1\widetilde{\mathbf{S}}_1 + 2\delta_2\widetilde{\mathbf{S}}_2, \\
 \psi'_{8,9} &= -r_9\mathbf{V} + r_8\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T, \quad \psi'_{8,10} = -r_{10}\mathbf{V} + r_8\mathbf{B}_1\mathbf{Y}, \\
 \psi'_{9,9} &= r_9\mathbf{A}_1\mathbf{V}^T + r_9\mathbf{V}\mathbf{A}_1^T, \\
 \psi'_{9,10} &= r_9\mathbf{B}_1\mathbf{Y} + r_{10}\mathbf{V}\mathbf{A}_1^T, \\
 \psi'_{10,10} &= r_{10}\mathbf{B}_1\mathbf{Y} + r_{10}\mathbf{Y}^T\mathbf{B}_1^T, \\
 \widetilde{\mathbf{M}}_1^T &= [\widetilde{M}_{11}^T, \widetilde{M}_{12}^T, \dots, \widetilde{M}_{110}^T], \\
 \widetilde{\mathbf{M}}_2^T &= [\widetilde{M}_{21}^T, \widetilde{M}_{22}^T, \dots, \widetilde{M}_{210}^T], \\
 \widetilde{\mathbf{N}}_1^T &= [\widetilde{N}_{11}^T, \widetilde{N}_{12}^T, \dots, \widetilde{N}_{110}^T], \\
 \widetilde{\mathbf{N}}_2^T &= [\widetilde{N}_{21}^T, \widetilde{N}_{22}^T, \dots, \widetilde{N}_{210}^T].
 \end{aligned}$$

则系统(1)在状态反馈控制器 $u(t) = \mathbf{Y}\mathbf{V}^{-T}x(t)$ 的作用下渐近稳定。

证明 在定理 1 结论的基础上,考虑辅助变量线性化. 对此,令 $\mathbf{W}_1 = r_1\mathbf{W}, \mathbf{W}_2 = r_2\mathbf{W}, \dots, \mathbf{W}_{10} = r_{10}\mathbf{W}$. 同时令 $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{V}, \mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{V}^T$, 在 LMI(3) 的左右分别乘以 $\text{diag}\{\mathbf{V}, \mathbf{V}, \dots, \mathbf{V}\}$ 及其转置矩阵, 并令

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathbf{M}}_{1,j} &= \mathbf{V}\mathbf{M}_{1j}\mathbf{V}^T, \quad \widetilde{\mathbf{M}}_{2,j} = \mathbf{V}\mathbf{M}_{2j}\mathbf{V}^T, \quad \widetilde{\mathbf{N}}_{1,j} = \mathbf{V}\mathbf{N}_{1j}\mathbf{V}^T, \quad \widetilde{\mathbf{N}}_{2,j} \\
 &= \mathbf{V}\mathbf{N}_{2j}\mathbf{V}^T. \text{ 由此定理得证. } \square
 \end{aligned}$$

注 1 从定理 1 和定理 2 中可以看出,本文结果对时滞参数的导数没有作任何限制,对时滞参数没有要求,更接近于实际情况。

注 2 本文运用积分等式方法,解决了稳定性问题中保守性的根源问题. 由定理 1 和定理 2 及仿真算例的数据比较表明,本文提出的方法保守性更低。

注 3 本文结论无须检验矩阵对 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 与 / 或 $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1, \mathbf{B})$ 是否能控或能稳,只要给定 LMI 可解,就一定能找到无记忆状态反馈控制器使原系统镇定。

4 仿真算例

算例 1 考虑如下系统:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1x(t - \tau_1(t)) + \mathbf{B}u(t) + \\
 &\quad \mathbf{B}_1u(t - \tau_2(t)).
 \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.2 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T, \quad \mathbf{B}_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

显然,上述系统中 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 与 $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1, \mathbf{B})$ 都不稳定. 利用本文结果产生的无记忆状态反馈控制器 $u(t) = \mathbf{Y}\mathbf{V}^{-T}x(t)$ 可使该系统渐近稳定. 然而,利用文献[9-11]的方法均不能找到使该系统渐近稳定的控制器. 文献[5]针对相同的模型得到了局部最优解,但对系统状态时滞有硬性规定 $\dot{\tau}_1(t) \leq d < 1$, 而且在处理交叉项问题上,使用了不同程度的不等式放缩. 由本文定理可以看出,本文结论对时滞导数没有任何限制,在处理交叉项上也没有使用不等式放缩,从而保守性降低. 本算例仿真取 $\tau_1(t) \in [0.6, 0.8], \tau_2(t) \in [0.6, 1]$, 令 $r_1 = r_2 = \dots = r_{10} = 1$, 初始状态 $x(0) = [-1 \ -1 \ 1 \ 1]^T$. 根据定理 2 可得控制器增益 $\mathbf{K} = [-0.2010 \ -0.5135 \ -0.8172 \ -0.6063]$, 仿真结果如图 1 所示。

算例 2 考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1x(t - h) + \mathbf{B}u(t).$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [0 \ 1]^T.$$

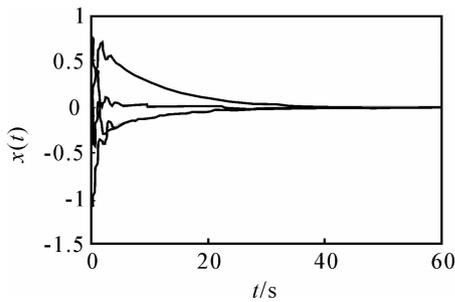


图 1 闭环系统的状态曲线

仿真依据定理 2 的结论,在 LMI(8) 中去掉与 $x^T(t - \tau_{2,1/2})$, $x^T(t - \tau_{2,1/2} + \delta_2)$, $x^T(t - \tau_{2,1/2} - \delta_2)$, $x^T(t - \tau_2(t))$ 相关的项,将定理 2 作退化处理. 本文算例仿真取 $h = 6.206$, 系统初始状态 $x(0) = [-0.1 \ 0.1]^T$, 控制器增益 $K = [0.3353 \ -2.5561]$. 仿真曲线如图 2 所示.

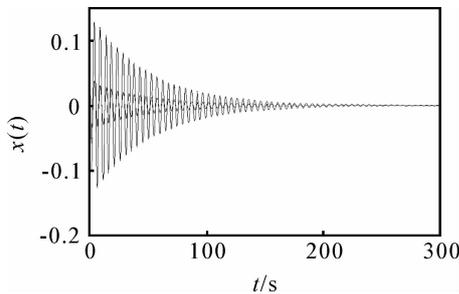


图 2 闭环系统的状态曲线

对比文献[12-14] 计算出来的时滞上限,结果如表 1 所示. 显然,本文方法的保守性更低.

表 1 本文方法与文献[12-14] 的对比结果

方法	时滞上限	控制器增益 K
文献[13]	1.408	Not provided
文献[12]	1.510	$[-58.31 \ -294.9]$
文献[14]	6.000	$[-70.18 \ -77.67]$

5 结 论

本文研究一类具有区间时变输入和状态时滞系统的稳定性问题. 通过选择合理的 Lyapunov-Krasovskii 函数并基于积分等式方法,以 LMI 的形式给出时滞相关的稳定性充分条件及相关控制器设计,尤其是在处理交叉项时避开了一般方法中需要放缩的缺点. 后续工作希望采取更合适的时滞分割法,并结合积分等式法系统地分析多时滞系统的稳定性.

参考文献 (References)

[1] Sun J, Ma B P, Zhu X M. Robust control for uncertain system with state and input delay[J]. Proc of the 4th Int Conf on Machine Learning and Cybernetics

Guangzhou: IEEE Press, 2005: 1202-1207.
 [2] Jiang X F, Han Q L, Yu X H. Robust H_∞ control for uncertain takagi-sugeno fuzzy systems with interval time-varying delay[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(2): 321-331.
 [3] Yue D, Han Q L. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay[J]. Automatica, 2005, 41(2): 233-240.
 [4] Richard J. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems [J]. Automatica, 2003, 39(10): 1667-1694.
 [5] Zhang X M, Wu M, She J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays[J]. Automatica, 2005, 41(8): 1405-1412.
 [6] Chen B, Liu X P, Tong S C, et al. Guaranteed cost control of T-S fuzzy systems with state and input delays [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(20): 2251-2267.
 [7] Jiang Z H, Gui W H, Xie Y F, et al. Delay-dependent stabilization of singular linear continuous-time systems with time-varying state and input delays[C]. IEEE Int Conf on Control and Automation. Guangzhou: IEEE Press, 2007: 1862-1867.
 [8] Yu Ker-Wei, Lien Chang-Hua. Robust H_∞ control for uncertain T-S fuzzy systems with state and input delays [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37(3): 150-156.
 [9] Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed state and control[J]. Automatica, 1995, 31(9): 1349-1351.
 [10] Kim J H, Jeung E T, Park H B. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control Input[J]. Automatica, 1996, 32(9): 1337-1339.
 [11] Han Q L, Mehdi D. Comments on robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input[J]. Automatica, 1998, 32(12): 1665-1666.
 [12] Fridman E, Shaked U. An improvement stabilization method for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.
 [13] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control; Constant and time-varying delays[J]. Int J of Control, 2003, 76(9): 48-60.
 [14] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制——自由权矩阵方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
 (Wu M, He Y. Robust control of time — delay systems-free weighting matrices[M]. Beijing: Science Press, 2008.)