第 24 卷 第 10 期 控 制 与 决 策 2009 年 10 月
Vol. 24 No. 10 Control and Decision Oct. 2009

文章编号：1001-0920(2009)10-1555-04

一类连续时间 Markov 跳跃系统鲁棒 H_∞ 故障估计

丁 强[1]，钟麦英[2]
(1. 山东大学 控制科学与工程学院，济南 250061；2. 北京航空航天大学 惯性技术与导航仪器系，北京 100191)

摘 要：研究了受 L_2 范数有界未知输入影响的一类线性连续时间 Markov 跳跃系统鲁棒 H_∞ 故障估计问题. 应用自适应观测器作为故障估计器，将鲁棒 H_∞ 故障估计问题归结为随机 H_∞ 滤波问题. 推导并证明了问题可解的充分条件，并通过求解线性矩阵不等式得到了 H_∞ 故障估计器参数矩阵的解. 最后，数字算例验证了所提方法的有效性.

关键词：Markov 跳跃系统；故障估计；自适应观测器；线性矩阵不等式
中图分类号：TP273 **文献标识码**：A

Robust H_∞ fault estimation for a class of continuous-time Markovian jump systems

DING Qiang[1]，*ZHONG Mai-ying*[2]
(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China; 2. Department of Inertia Technology and Navigation Guidance Instrument, Beihang University, Beijing 100191, China. Correspondent: ZHONG Mai-ying, E-mail: myzhong@sdu.edu.cn)

Abstract: The problem of robust H_∞ fault estimation is studied for a class of continuous-time Markovian jump systems with L_2 norm bounded unknown input. By using an adaptive observer as a fault estimator, the design of robust H_∞ fault estimator is formulated as a stochastic H_∞ filtering problem. A sufficient condition for the existence of a robust H_∞ fault estimator is derived by applying matrix inequality technique, and a solution to the parameter matrices of the fault estimator can be obtained by solving a set of linear matrix inequalities. A numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Markovian jump system; Fault estimation; Adaptive observer; Linear matrix inequality

1 引 言

对于基于解析模型的线性定常系统故障诊断问题的研究，已近 40 年，取得了大量研究成果[1-4]. 基于 H_∞ 优化技术的研究成果大致可分为两类：即 H_∞/H_∞ 或 H_∞/H_- 最小化问题和 H_∞ 滤波描述.

Markov 跳跃系统是一类可用来描述因突发性环境变化或元件损坏等导致结构发生突变的系统，如电力系统、生产制造系统、通讯系统等. 40 多年来，众多学者对 Markov 跳跃系统鲁棒控制以及滤波等问题开展了大量研究[5-8]. 特别是，随着对系统安全可靠性要求的不断提高，对有关 Markov 跳跃系统故障诊断问题的研究引起了越来越多的重视[9-11]. 文献[9]设计了基于观测器的故障检测滤波器，并将故障检测滤波器的设计问题归结为 H_∞/H_- 最小化问题；[10]基于 H_∞ 滤波方法，研究了离散时间 Markov 跳跃系统的故障检测问题，该方法较适用于一定频率范围的 H_∞ 故障估计问题；[11]将[10]中的方法推广并应用于时滞离散 Markov 跳跃系统故障检测问题. 注意到，上述结果是针对离散时间 Markov 跳跃系统故障检测问题的研究，并且从容错控制的角度分析故障估计更有意义. 但对于有关连续时间 Markov 跳跃系统故障估计问题的研究目前很少见.

本文将文献[4]中基于自适应观测器的故障诊断方法推广应用于解决连续时间 Markov 跳跃系统的鲁棒 H_∞ 故障估计问题，推导并证明了问题可解的充分条件，并通过求解线性矩阵不等式(LMI) 给出参数矩阵的解.

2 问题描述

考虑如下连续时间 Markov 跳跃系统：

收稿日期：2008-12-12；**修回日期**：2009-03-23.
基金项目：国家 973 计划项目(2009CB724002)；国家自然科学基金项目(60774071,60736025).
作者简介：丁强(1978—)，男，山东枣庄人，博士生，从事 Markov 跳跃系统故障诊断的研究；钟麦英(1965—)，女，山东博兴人，教授，博士生导师，从事故障诊断与容错控制等研究.

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(\theta(t))x(t)+B(\theta(t))u(t)+\\ \qquad B_d(\theta(t))d(t)+B_f(\theta(t))f(t),\\ y(t)=C(\theta(t))x(t)+D_d(\theta(t))d(t)+\\ \qquad D_f(\theta(t))f(t),\\ x(0)=x_0,\ \theta(0)=i_0.\end{cases}\tag{1}$$

其中：$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$，$y(t)\in R^p$，$d(t)\in R^{n_d}$ 和 $f(t)\in R^{n_f}$ 分别为状态、控制输入、测量输出、未知输入和故障向量. 假定 $d(t)$，$f(t)$ 均为 L_2 范数有界信号，$f(t)$ 的一阶导数 $\dot{f}(t)$ 存在且 L_2 范数有界. $\{\theta(t)\}$ 为在有限状态集 $\Xi=\{1,2,\cdots,N\}$ 上取值的连续时间齐次 Markov 过程，状态转移概率为

$$\Pr\{\theta(t+\Delta)=j\mid\theta(t)=i\}=\\ \begin{cases}\lambda_{ij}\Delta+o(\Delta),\ i\neq j;\\ 1+\lambda_{ii}\Delta+o(\Delta),\ i=j.\end{cases}$$

其中：$\Delta>0$，$\lim\limits_{\Delta\to0}o(\Delta)/\Delta=0$；$\lambda_{ij}\geqslant0(i\neq j)$ 为从模态 i 到模态 j 的转移速率，满足 $\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=0$. 对于 $\theta(t)=i\in\Xi$，$A(\theta(t))$，$B(\theta(t))$，$B_d(\theta(t))$，$B_f(\theta(t))$，$C(\theta(t))$，$D_d(\theta(t))$，$D_f(\theta(t))$ 均为适当维数的实常数矩阵. 对于任意适当维数的参数矩阵 $F(\theta(t))$，记 $F(\theta(t))=F_i$，$\forall\,\theta(t)=i\in\Xi$，为简便起见，不再详细介绍.

定义 1[5] 系统(1) 在 $u(t)=0$，$d(t)=0$，$f(t)=0$ 时，若对于任意的初始状态 x_0 和初始模态 $i_0\in\Xi$，满足 $\lim\limits_{t\to\infty}E\{\|x(t)\|^2\}=0$，则称系统(1) 为均方稳定.

构造如下形式的故障估计器：

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t)=A(\theta(t))\hat{x}(t)+B(\theta(t))u(t)+\\ \qquad B_f(\theta(t))\hat{f}(t)+L(\theta(t))(\hat{y}(t)-y(t)),\\ \hat{y}(t)=C(\theta(t))\hat{x}(t)+D_f(\theta(t))\hat{f}(t),\\ \dot{\hat{f}}(t)=M(\theta(t))\hat{f}(t)+N(\theta(t))(\hat{y}(t)-y(t)).\end{cases}\tag{2}$$

其中：$\hat{x}(t)$，$\hat{y}(t)$ 分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的估计；$\hat{f}(t)$ 为故障估计信号；$L(\theta(t))$，$M(\theta(t))$ 和 $N(\theta(t))$ 为待设计的参数矩阵.

定义 $e(t)=\hat{x}(t)-x(t)$，$r_f(t)=\hat{f}(t)-f(t)$，由式(1) 和(2) 可得

$$\begin{cases}\dot{\eta}(t)=A_\eta(\theta(t))\eta(t)+B_\eta(\theta(t))w(t),\\ r_f(t)=C_\eta\eta(t).\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$\eta(t)=[e^{\mathrm{T}}(t)\quad r_f^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$w(t)=[d^{\mathrm{T}}(t)\quad f^{\mathrm{T}}(t)\quad \dot{f}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$A_\eta(\theta(t))=A_{\eta i},B_\eta(\theta(t))=B_{\eta i},C_\eta=[0\quad I],$$

$$A_{\eta i}=\begin{bmatrix}A_i+L_iC_i & B_{fi}+L_iD_{fi}\\ N_iC_i & M_i+N_iD_{fi}\end{bmatrix},$$

$$B_{\eta i}=\begin{bmatrix}-B_{di}-L_iD_{di} & 0 & 0\\ -N_iD_{di} & M_i & -I\end{bmatrix}.$$

本文研究的鲁棒 H_∞ 故障估计问题可归结为求解参数矩阵 L_i，M_i 和 N_i，使误差系统(3) 在 $w(t)=0$ 时均方稳定，且在零初始条件下满足

$$\|r_f\|_{2,\mathrm{E}}<\gamma\|w\|_2.\tag{4}$$

其中：$\|r_f\|_{2,\mathrm{E}}=\left\{\mathrm{E}\left[\int_0^\infty r_f^{\mathrm{T}}(t)r_f(t)\mathrm{d}t\right]\right\}^{1/2}$，$\gamma>0$ 为给定标量.

3 H_∞ 故障估计器设计

为证明本文主要结论，首先给出如下引理.

引理 1[5] 考虑如下系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(\theta(t))x(t)+B(\theta(t))w(t),\\ y(t)=C(\theta(t))x(t)+D(\theta(t))w(t),\\ x(0)=x_0,\ \theta(0)=i_0.\end{cases}$$

其中：$x(t)$，$y(t)$，$\theta(t)$，$A(\theta(t))$，$B(\theta(t))$，$C(\theta(t))$ 如系统(1) 中所定义；$w(t)\in R^m$ 为 L_2 范数有界信号，对于任意 $\theta(t)=i\in\Xi$，$D(\theta(t))$ 为适当维数实常数矩阵. 给定 $\gamma>0$，如果存在矩阵 $P_i>0(i=1,2,\cdots,N)$ 满足

$$\begin{bmatrix}A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_j+C_i^{\mathrm{T}}C_i & P_iB_i+C_i^{\mathrm{T}}D_i\\ B_i^{\mathrm{T}}P_i+D_i^{\mathrm{T}}C_i & -\gamma^2I+D_i^{\mathrm{T}}D_i\end{bmatrix}<0,$$

则该系统均方稳定且在零初始条件下满足

$$\|y\|_{2,\mathrm{E}}<\gamma\|w\|_2.$$

引理 2[7] 给定对称矩阵 $\Psi_i=\Psi_i^{\mathrm{T}}\in R^{n\times n}$ 和矩阵 $H_i\in R^{m\times n}(i=1,2,\cdots,k)$，则

$$x_i^{\mathrm{T}}\Psi_ix_i<0,\ \forall\,x_i\in R^n:H_ix_i=0,x_i\neq0$$

成立的充分必要条件是：存在矩阵 $L_i\in R^{n\times m}(i=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$\Psi_i+L_iH_i+H_i^{\mathrm{T}}L_i^{\mathrm{T}}<0.$$

由引理 1 和引理 2 可得鲁棒 H_∞ 故障估计问题可解的充分条件以及参数矩阵 L_i，M_i 和 N_i 的求解方法.

定理 1 给定 $\gamma>0$，如果存在矩阵 $X_i>0$，矩阵 L_i，M_i，N_i 和标量 $\beta_i(i=1,2,\cdots,N)$ 满足如下矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix}-2\beta_iI+C_\eta^{\mathrm{T}}C_\eta & A_{\eta i}^{\mathrm{T}}+\beta_iX_i & 0 & \Lambda_i^{\mathrm{T}}\\ A_{\eta i}+\beta_iX_i & \lambda_{ii}X_i & B_{\eta i} & 0\\ 0 & B_{\eta i}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2I & 0\\ \Lambda_i & 0 & 0 & -\bar{X}_i\end{bmatrix}<0,\tag{5}$$

则系统(3) 均方稳定且在零初始条件下满足性能指标(4)，其中

$$\Lambda_i=[\sqrt{\lambda_{i1}}I\cdots\ \sqrt{\lambda_{i,i-1}}I\ \sqrt{\lambda_{i,i+1}}I\cdots\ \sqrt{\lambda_{iN}}I]^{\mathrm{T}},$$

$\bar{X}_i = \mathrm{diag}\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_N\}.$

证明　给定 $\gamma > 0$，由引理 1 可知，如果存在矩阵 $P_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, N)$ 满足

$$\begin{bmatrix} A_{\eta i}^{\mathrm{T}} P_i + P_i A_{\eta i} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P_j + C_\eta^{\mathrm{T}} C_\eta & P_i B_{\eta i} \\ B_{\eta i}^{\mathrm{T}} P_i & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

则误差系统(3) 均方稳定且在零初始条件下满足式(4).

由 Schur 补引理可得，式(6) 等价于

$$\Theta_i^{\mathrm{T}} \Omega_i \Theta_i < 0. \tag{7}$$

其中

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} C_\eta^{\mathrm{T}} C_\eta & A_{\eta i}^{\mathrm{T}} & 0 & \Lambda_i^{\mathrm{T}} \\ A_{\eta i} & \lambda_{ii} P_i^{-1} & B_{\eta i} & 0 \\ 0 & B_{\eta i}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & 0 \\ \Lambda_i & 0 & 0 & -\bar{Q}_i \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_i = [\sqrt{\lambda_{i1}} I \ \cdots \ \sqrt{\lambda_{i,i-1}} I \ \sqrt{\lambda_{i,i+1}} I \ \cdots \ \sqrt{\lambda_{iN}} I]^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_i^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I & P_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_i = \mathrm{diag}\{P_1^{-1}, \cdots, P_{i-1}^{-1}, P_{i+1}^{-1}, \cdots, P_N^{-1}\}.$$

进一步，式(7) 成立的充要条件是

$$\zeta_i^{\mathrm{T}} \Omega_i \zeta_i < 0,\ \zeta_i = \Theta_i \alpha,\ \forall \alpha \neq 0. \tag{8}$$

从而，对于任意 $\alpha \neq 0$ 和 $\zeta_i = \Theta_i \alpha$，可得 $H_i \zeta_i = 0$，其中 $H_i = [I \quad -P_i^{-1} \quad 0 \quad 0]$.

另外，取 $X_i = P_i^{-1}$，则式(5) 可表示为

$$\Omega_i + K_i H_i + H_i^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} < 0. \tag{9}$$

其中

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} C_\eta^{\mathrm{T}} C_\eta & A_{\eta i}^{\mathrm{T}} & 0 & \Lambda_i^{\mathrm{T}} \\ A_{\eta i} & \lambda_{ii} X_i & B_{\eta i} & 0 \\ 0 & B_{\eta i}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & 0 \\ \Lambda_i & 0 & 0 & -\bar{X}_i \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}_i = \mathrm{diag}\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_N\},$$

$$K_i = [-\beta_i I \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$H_i = [I \quad -X_i \quad 0 \quad 0].$$

由引理 2 可知，当且仅当式(9) 成立时，有

$$\zeta_i^{\mathrm{T}} \Omega_i \zeta_i < 0,\ H_i \zeta_i = 0,\ \forall \zeta_i \neq 0.$$

因此，如果存在矩阵 $X_i > 0$，矩阵 L_i, M_i, N_i 和标量 $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 使矩阵不等式(5) 成立，则式(6) ～ (8) 成立. 进而，系统(3) 均方稳定且在零初始条件下满足性能指标(4). □

注 1　由定理 1 可得鲁棒 H_∞ 故障估计问题可解的充分条件和 L_i, M_i, N_i 的解. 考虑到式(5) 中含有非线性项 $\beta_i X_i$，为方便求解，可首先选取适当的 β_i 值，则式(5) 为 $X_i > 0, L_i, M_i$ 和 N_i 的 LMI. 当然，这样可能会增加问题求解的保守性. 为降低解的保守性，可通过一般寻优方法确定 β_i 值，在此不再赘述.

4　算　例

考虑系统(1) 具有两个模态，其参数矩阵如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.0 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & -1.9 & 0.8 \\ 1.1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_{d1} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ B_{f1} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ D_{d1} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix},$$

$$D_{f1} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & -1.7 & -0.5 \\ 0.3 & 0.4 & -1.8 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ B_{d2} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_{f2} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{d2} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ D_{f2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

状态转移速率为：$\lambda_{11} = -3, \lambda_{12} = 3, \lambda_{21} = 4, \lambda_{22} = -4$. 取 $\gamma = 0.5, \beta_1 = \beta_2 = 1.5$，根据定理 1 可得

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.1727 & -0.4524 \\ -12.261 & -16.734 \\ -0.5559 & -3.6169 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} -5.4344 & -5.0739 \\ 6.1994 & 7.3259 \\ -4.7584 & -5.4534 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = -0.3150,\ M_2 = -0.4019,$$

$$N_1 = [-14.8269 \quad -17.4125],$$

$$N_2 = [-6.5499 \quad -8.9289].$$

在[0,100]s 内，假设控制输入为单位阶跃信号，系统模态$\theta(t)$的跳变如图1所示，未知输入$d(t)$如图2 所示，图3和图4分别给出了两种不同类型的故障

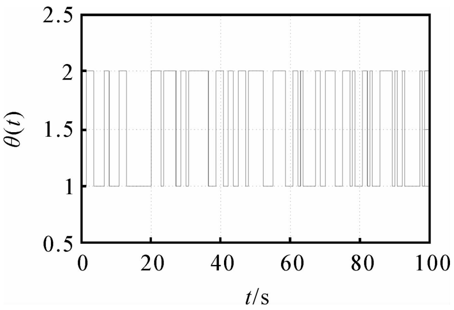

图 1　系统模态 $\theta(t)$

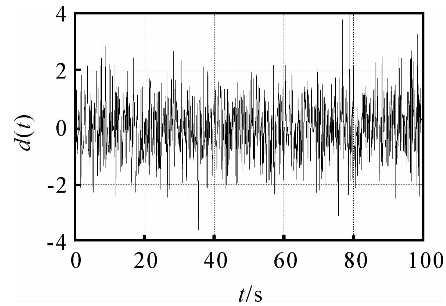

图 2　未知输入 $d(t)$

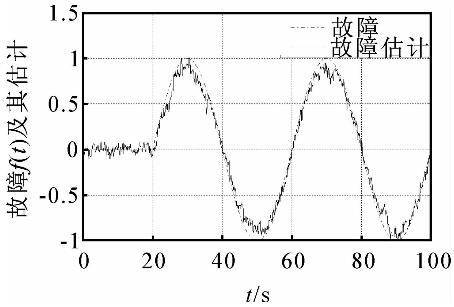

图 3　故障 $f(t)$ 与估计 $\hat{f}(t)$

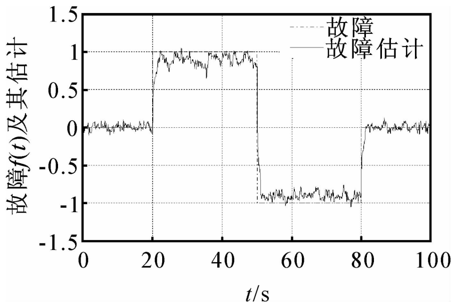

图 4　故障 $f(t)$ 与估计 $\hat{f}(t)$

及其对应的估计信号. 从图中可以看出,两种情况下均可有效估计故障信号.

5 结　　论

本文将基于自适应观测器的故障诊断方法推广应用于一类连续时间 Markov 跳跃系统的鲁棒 H_∞ 故障估计问题. 首先,通过构造基于自适应观测器的故障估计器,将鲁棒 H_∞ 故障估计问题归结为随机 H_∞ 滤波问题,使故障估计误差在均方意义下 L_2 范数诱导增益最小,推导并证明了问题可解的充分条件;然后,通过求解 LMIs 得到故障估计器参数矩阵的解;最后,通过算例验证了所提方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Chen J, Patton R J. Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[2] Zhong M, Ding S X, Lam J, et al. An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems[J]. Automatica, 2003, 39(3): 543-550.

[3] Ding S X. Model-based fault diagnosis techniques[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[4] Jiang B, Wang J, Soh Y C. An adaptive technique for robust diagnosis of faults with independent effects on system outputs[J]. Int J of Control, 2002, 75(11): 792-802.

[5] De Farias D P, Geromel J C, do Val J B R, et al. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2000, 45(5): 944-949.

[6] Shi P, Xia Y, Liu G, et al. On designing of sliding-mode control for stochastic jump systems[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2006, 51(1): 97-103.

[7] De Souza C E, Trofino A, Barbosa K A. Mode-independent H_∞ filters for Markovian jump linear systems[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2006, 51(11): 1837-1841.

[8] Wu L, Shi P, Gao H, et al. H_∞ filtering for 2D Markovian jump systems[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1849-1858.

[9] Zhong M, Lam J, Ding S X, et al. Robust fault detection of Markovian jump systems[J]. Circuits Systems Signal Processing, 2004, 23(5): 387-407.

[10] Zhong M, Ye H, Shi P, et al. Fault detection for Markovian jump systems[J]. IEE Proc of Control Theory Application, 2005, 152(4): 397-402.

[11] 王红茹, 王常虹, 高会军. 时滞离散马尔可夫跳跃系统的鲁棒故障检测[J]. 控制与决策, 2006, 21(7): 796-800.
(Wang H R, Wang C H, Gao H J. Robust fault detection for discrete-time Markovian jump systems with time-delays[J]. Control and Decision, 2006, 21(7): 796-800.)