

文章编号: 1001-0920(2009)10-1463-04

一类不确定非线性系统的改进积分型滑模控制

李 鹏, 马建军, 李文强, 郑志强

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

摘 要: 针对一类不确定非线性系统的传统滑模控制, 推导了滑模误差和稳态误差的范围. 为了减小系统的稳态误差, 同时防止积分饱和, 设计了一种改进积分型滑模面. 在边界层外, 通过调节因子对积分项进行削弱, 以防止在初始误差较大的条件下积分饱和和引起的超调较大和调节时间较长的问题; 在边界层内, 采用传统积分以减小系统稳态误差. 理论分析和仿真研究表明了所提改进积分型滑模控制方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 滑模控制; 稳态误差; 改进积分

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Improved integral sliding mode control for a class of nonlinear uncertain systems

LI Peng, MA Jian-jun, LI Wen-qiang, ZHENG Zhi-qiang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China. Correspondent: LI Peng, E-mail: lipeng0327@sohu.com)

Abstract: For the conventional sliding mode control of a class of nonlinear uncertain systems, the bounds on sliding mode error and steady-state error are deduced. In order to reduce the steady-state error while anti-windup, an improved intergral sliding surface is designed. Hence, large overshoots due to the large initial errors can be avoided. The integral action is reduced through adjust factor when the sliding variable is outside of the boundary layer. when the sliding variable is inside of the boundary layer, the integral action is completed in order to reduce the steady-state error. Theroretial analysis and simulation results show the effectiveness of the proposed improved integral sliding mode control scheme.

Key words: Nonlinear system; Sliding mode control; Steady-state error; Improved integral

1 引 言

滑模变结构控制本质上是一类特殊的非线性控制, 它可在动态的过程中, 根据系统当前的状态(如偏差及其各阶导数等)有目的地不断切换变化, 迫使系统按照预定“滑动模态”的状态轨迹运动^[1]. 但在实际系统中, 由于切换装置不可避免地存在惯性等因素, 导致实际的滑动模态不能准确地发生在滑模面上, 从而易引起系统的剧烈抖振, 这成为它在实际应用中的一大障碍. 为了削弱系统的抖振, 国内外许多学者提出了一些较有效的方法. 其中最为常见的是, 20 世纪 80 年代 Slotine^[2] 在滑模控制中所引入的“准滑动模态”和“边界层”的概念, 即在边界层外采用正常的滑模控制, 在边界层内为连续状态的反馈控制, 有效削弱了抖振, 为变结构控制的工程应用

开辟了道路. 然而, 在系统不确定性和外界扰动存在时, 边界层方法将会导致稳态误差的存在. 对此, 文献[3]提出了双传统滑模平面来减小稳态误差; [4, 5]率先在滑模面的设计中引入积分项来解决稳态误差问题和增强传统滑模控制的鲁棒性; [6]将这种积分型滑模面用于永磁同步电机控制器设计中. 然而, 在初始误差较大的条件下, 积分会出现饱和(Windup)效应, 从而引起超调较大, 驱动机构饱和, 甚至导致系统不稳定^[7]. 防止出现饱和效应的有效方法是对积分项进行削弱.

基于文献[8, 9], 本文推导了一类不确定非线性系统采用传统滑模控制时, 稳态误差与滑模面斜率、边界层厚度、系统不确定性以及外界干扰关系的数学表达式. 为了减小系统的稳态误差, 同时防止积分

收稿日期: 2008-12-16; 修回日期: 2009-03-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60374006).

作者简介: 李鹏(1982—), 男, 湖南常德人, 博士生, 从事精确制导与控制的研究; 郑志强(1965—), 男, 湖南常德人, 教授, 博士生导师, 从事精确制导与控制、机器人控制等研究.

饱和,在文献[10,11]的基础上,设计了一种改进积分型滑模面.在边界层外,通过调节因子 ρ 对积分项进行削弱,防止积分饱和引起大的超调;在边界层内,采用完全积分来减小系统的稳态误差.理论分析和仿真研究表明:基于改进积分型滑模面所设计的控制器能很好地减小稳态误差,同时具有较小的超调量和较短的调节时间.

2 一类不确定非线性系统的滑模控制

为了简便,本文仅讨论一类型 2 阶 SISO 非线性系统滑模控制问题,该问题的讨论结果可推广到此类型的 n 阶非线性系统.

考虑如下 SISO 非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(X,t) + b(X,t)u(t) + d(t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:状态向量 $X = (x_1, x_2)^T = (x, \dot{x})^T$, $u(t)$ 是控制输入, y 是系统的输出.假设 $b(X,t)$ 为已知函数, $f(X,t)$ 是不确定的有界函数,其估计函数为 $\hat{f}(X,t)$, $\Delta f(X,t) = f(X,t) - \hat{f}(X,t)$,且

$$|\Delta f(X,t)| \leq F(X,t), \quad (2)$$

$d(t)$ 是外部有界干扰,满足

$$|d(t)| \leq D(t). \quad (3)$$

系统控制的目的是在 $f(X,t)$ 不确定和存在外界干扰 $d(t)$ 的情况下,使系统的输出 $y(t)$ 跟踪参考信号 $y_r(t)$,并使系统保持稳定且具有良好的性能.定义跟踪误差为 $e = y(t) - y_r(t) = x_1 - x_d$,系统的相对阶 $n = 2$,采用传统滑模面^[1],即

$$S(t) = (d/dt + \lambda)e = \dot{e} + \lambda e, \quad (4)$$

其中 $\lambda > 0$ 是滑模面斜率.

定理 1 对于式(1)描述的系统,取式(4)定义的滑模面,如果控制信号取为

$$u(t) = b^{-1}(X,t)[u_{eq} - k(X,t)\text{sgn}(S(t))]. \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\hat{f}(X,t) - \lambda \dot{e} + \ddot{x}_d, \\ k(X,t) &= \max_{\forall t} (F(X,t) + D(t)) + \epsilon, \epsilon > 0, \end{aligned}$$

则滑动模态存在且可达.

证明 式(4)对时间求导,有

$$\dot{S}(t) = \ddot{e} + \lambda \dot{e}. \quad (6)$$

取 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2}S^2$,则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S\dot{S} = S(\lambda \dot{e} + \ddot{e}) = S(\lambda \dot{e} + \ddot{x}_1 - \ddot{x}_d) = \\ &= S(\lambda \dot{e} + f(X,t) + b(X,t)b^{-1}(X,t) \times \\ & \quad (u_{eq} - k(X,t)\text{sgn}(S(t))) + d(t) - \ddot{x}_d) \leq \\ &= S(\Delta f(X,t) + d(t)) - k(X,t)|S| \leq \\ &= |S| |\Delta f(X,t) + d(t)| - (F(X,t) + \end{aligned}$$

$$D(t) + \epsilon) |S| < -\epsilon |S|.$$

根据滑动模态存在和到达条件

$$V = \frac{1}{2}S^2, \dot{V} < 0$$

可知,定理 1 的结论是正确的. \square

为了减小变结构系统的抖振现象,通常采用饱和函数来平滑控制量,即

$$u(t) = b^{-1}(X,t)[u_{eq} - k(X,t)\text{sat}(S(t)/\mu)]. \quad (7)$$

其中: $\text{sat}(S(t)/\mu)$ 为饱和函数,将其定义为

$$\text{sat}(S(t)/\mu) = \begin{cases} S(t)/\mu, & |S(t)| \leq \mu; \\ \text{sgn}(S(t)), & |S(t)| > \mu. \end{cases} \quad (8)$$

这里 μ 为边界层厚度.边界层方法仅能保证系统的状态收敛到以滑模面为中心的边界层内.为了叙述简便,令 $\gamma = k(X,t)/\mu$, $\omega(X,t) = \Delta f(X,t) + d(t)$,采用边界层后的滑模误差和稳态误差范围可由下述定理确定.

定理 2 对于式(1)描述的系统,取式(4)滑模面,如果控制信号取为式(7),则当 $t \rightarrow +\infty$ 时,有

$$|S(t)| \leq \frac{\max(F(X_d,t) + D(t))}{\gamma}, \quad (9)$$

$$|e(t)| \leq \frac{\max(F(X_d,t) + D(t))}{\lambda\gamma}. \quad (10)$$

证明 系统(1)在边界层内部 $|S(t)| \leq \mu$ 的轨迹可描述为

$$\dot{S}(t) = \ddot{e} + \lambda \dot{e} = \omega(X,t) - \gamma S(t). \quad (11)$$

将 $\dot{S}(t)$ 在 $X = X_d$ 处按泰勒级数展开^[8,9],取 1 阶近似,其余高阶项合并为 $o(\xi)$,有

$$\dot{S}(t) = \omega(X_d,t) - \gamma S(t) + o(\xi), \quad (12)$$

其中 $o(\xi)$ 可看作 X_d 代替 X 而产生的高阶无穷小,在下面分析中将其忽略.对式(12)取拉氏变换,有

$$S(s) = \frac{1}{s + \gamma} \omega(s), \quad (13)$$

其中 s 为 Laplace 算子. $\omega(X_d,t)$ 相当于一个 1 阶低通滤波器的输入,而 $S(t)$ 则相当于该滤波器的输出,该滤波器的输出脉冲响应为 $h_1(t) = e^{-Nt}$, e_N 表示自然指数.由于要求稳态误差,可不考虑系统的初始状态的影响.对于任意有界输入 $\omega(X_d,t)$,系统的零状态响应为

$$S(t) = \int_0^{+\infty} h_1(\tau)\omega(t-\tau)d\tau, \quad (14)$$

$$|S(t)| \leq \int_0^{+\infty} |h_1(\tau)| \cdot |\omega(t-\tau)| d\tau \leq$$

$$(F(X_d,t) + D(t)) \cdot \int_0^{+\infty} |h_1(\tau)| d\tau =$$

$$(F(X_d,t) + D(t)) \cdot \int_0^{+\infty} |e^{-N\tau}| d\tau =$$

$$\frac{F(X_d, t) + D(t)}{\gamma} \leq \frac{\max_{\forall t} (F(X_d, t) + D(t))}{\gamma}.$$

由式(4)可得 $e(s) = \frac{1}{s + \lambda} S(s)$, 同理可证

$$|e(t)| \leq \frac{\max_{\forall t} (F(X_d, t) + D(t))}{\lambda \gamma}. \quad \square$$

推论 1 特别地, 若 $\omega(X, t)$ 为常值或最终常值时, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(X, t) = l$ (l 为常数), 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $S(t) = l/\gamma, e(t) = l/(\lambda\gamma)$.

证明 根据式(13), 由终值定理有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (s + \frac{1}{s + \gamma} \omega(s)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \gamma} \lim_{s \rightarrow 0} (s\omega(s)) = \frac{l}{\gamma}. \end{aligned}$$

同理可证

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = l/(\lambda\gamma). \quad \square$$

由定理 2 和推论 1 可知, 系统的稳态误差与滑模面斜率 λ , 切换项增益 k 成反比, 与边界层厚度 μ 成正比. 若 λ 取很大, 则系统的滑模运动段很短, 系统大部分时间运动在到达段, 削弱了滑模控制鲁棒性强的优势; 若切换项增益 k 取很大, 则会加剧系统的抖振; 若边界层厚度 μ 取得小, 则达不到削弱抖振的效果.

3 改进积分型滑模面设计

为了抑制稳态误差, 在传统滑模面设计中引入跟踪误差的积分项 $\int_0^t e d\tau$, 构成如下传统积分型滑模面^[2]:

$$S(t) = (\frac{d}{dt} + \lambda)^2 \int_0^t e d\tau = \dot{e} + 2\lambda e + \lambda^2 \int_0^t e d\tau. \quad (15)$$

然而在大的初始误差和扰动下, 积分会出现饱和效应, 引起大的超调和驱动机构的饱和, 甚至使整个系统不稳定. 为了对积分项进行削弱^[10], 设计了一种改进积分型滑模面, 即

$$\begin{aligned} S &= \dot{e} + 2\lambda e + \lambda^2 \sigma, \\ \dot{\sigma} &= \frac{-\lambda^2 \sigma + \mu(1 + \rho) \text{sat}(S/\mu) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $\rho \geq -1$ 为积分削弱程度调节因子.

下面分 3 种情况进行讨论:

1) 当 $|S| \leq \mu$ 时

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{-\lambda^2 \sigma + \mu(1 + \rho) \text{sat}(S/\mu) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda} = \\ &= \frac{-\lambda^2 \sigma + S(1 + \rho) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda} = \\ &= \frac{-\lambda^2 \sigma + S - \dot{e}}{2\lambda} = e; \quad (17) \end{aligned}$$

2) 当 $S > \mu$ 时

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{-\lambda^2 \sigma + \mu(1 + \rho) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda} = \\ &= \frac{-\lambda^2 \sigma + S - S + \mu(1 + \rho) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda} = \\ &= \frac{2\lambda e - S + \mu(1 + \rho) - \rho S}{2\lambda} = \\ &= e - \frac{(|S| - \mu)(1 + \rho)}{2\lambda}; \quad (18) \end{aligned}$$

3) 当 $S < -\mu$ 时

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{-\lambda^2 \sigma - \mu(1 + \rho) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda} = \\ &= \frac{-\lambda^2 \sigma + S - S - \mu(1 + \rho) - \rho S - \dot{e}}{2\lambda} = \\ &= \frac{2\lambda e - S - \mu(1 + \rho) - \rho S}{2\lambda} = \\ &= e + \frac{(|S| - \mu)(1 + \rho)}{2\lambda}. \quad (19) \end{aligned}$$

由式(17) ~ (19) 可知, 在边界层内 $\dot{\sigma} = e$ 是传统积分作用; 在边界层外, 积分项作用受到了削弱, 其削弱程度可由 $\frac{(|S| - \mu)(1 + \rho)}{2\lambda}$ 来衡量. 显然, 削弱程度和滑模变量 S 到边界层的距离 $(|S| - \mu)$ 成正比且是连续的. 从而, 当系统状态在边界层的边界上时, 控制量不会产生跳变, 并可根据实际情况通过 ρ 的调节得到合适的削弱程度.

注 1 当 $\rho = -1$ 时, 对积分没有削弱, 是传统的积分型滑模面情形.

定理 3 对于式(1) 描述的系统, 取式(16) 滑模面, 如果控制信号取为

$$u(t) = b^{-1}(X, t) [u_{eq} - k \text{sgn}(S(t)/\mu)]. \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\dot{f}(X, t) - 2\lambda \dot{e} - \lambda^2 \sigma + \ddot{x}_d, \\ k &= \max_{\forall t} (F(X, t) + D(t)) + \epsilon, \epsilon > 0. \end{aligned}$$

则滑模变量可在有限时间内到达边界层.

证明过程与定理 1 相同.

定理 4 对于式(1) 描述的系统, 取式(16) 滑模面, 若控制信号取为式(20), 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$|S(t)| \leq \frac{\max_{\forall t} (F(X_d, t) + D(t))}{\gamma}, \quad (21)$$

$$|e(t)| \leq \frac{\max_{\forall t} (F(X_d, t) + D(t))}{\lambda \gamma} \frac{2}{e_N}. \quad (22)$$

证明过程与定理 2 相同.

推论 2 对于式(1) 描述的系统, 取式(16) 滑模面, 如果控制信号取为式(20), $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = l$ (l 为常数), 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $e(t) = 0$.

证明 系统(1) 在边界层内部 $|S(t)| \leq \mu$ 的轨迹可描述为

$$\dot{S}(t) = \ddot{e} + 2\lambda \dot{e} + \lambda^2 e = \omega(t) - \gamma S(t). \quad (23)$$

对上式进行拉氏变换,可得

$$e(s) = \frac{s}{s^2 + 2\lambda s + \lambda^2} \frac{1}{s + \gamma} \omega(s). \quad (24)$$

根据终值定理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \frac{s}{s^2 + 2\lambda s + \lambda^2} \frac{1}{s + \gamma} \omega(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (\frac{s}{s^2 + 2\lambda s + \lambda^2} \frac{1}{s + \gamma}) \lim_{s \rightarrow \infty} (s \omega(s)) = 0. \quad (25)$$

由此定理得证. □

由定理 4 和推论 2 可知,与传统滑模面相比,采用改进积分型滑模面的滑模控制器可更好地抑制系统的稳态误差.同时,由于在边界层外对积分作用进行了削弱,可防止积分饱和引起大的超调.

4 仿真实例

研究如下非线性模型所描述的倒立摆的滑模控制:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{mlx_2^2 \sin x_1 \cos x_1 - (M+m)g \sin x_1}{ml \cos^2 x_1 - 4/3l(M+m)} + \frac{-\cos x_1}{ml \cos^2 x_1 - 4/3l(M+m)} u + d(t). \end{cases}$$

其中:状态变量 $x_1 = \theta$ rad 为摆杆与竖直方向的夹角, $x_1(0) = 0.3$ rad, $x_2 = \dot{\theta}$ rad/s;倒立摆参数的标称值:小球质量 $m = 0.1$ kg,小台车质量 $M = 1$ kg,摆杆长度 $l = 0.5$ m,重力加速度 $g = 9.8$ m/s²; $d(t)$ 为外部扰动;参考信号 $x_{1d} = 0$. 控制器 1 采用传统滑模面, $\lambda = 4, S = \dot{e} + 4e$; 控制器 2 采用传统积分型滑模面, $\lambda = 2, S = \dot{e} + 4e + 4 \int_0^t e d\tau$; 控制器 3 采用改进积分型滑模面, $\lambda = 2, \rho = 2, S = \dot{e} + 4e + 4\sigma$. 3 种滑模面的边界层 μ 均为 0.2, 切换项增益 k 均为 5. 分 3 种情形进行仿真, 情形 1: $d(t) = 3$; 情形 2: $d(t) = -2 \sin(0.3t)$, m 的实际值为 0.3 kg; 情形 3: $d(t) = 3$, 再叠加一周期为 10s, 幅值为 2 的方波, m 的实际值为 0.5 kg. 仿真曲线如图 1 ~ 图 3 所示.

情形 1 采用控制器 1 时的稳态误差为 0.03 rad, 采用控制器 2 和 3 时的稳态误差均为 0, 与推论 1 和推论 2 的结论吻合; 情形 2 采用控制器 1 时的稳态误

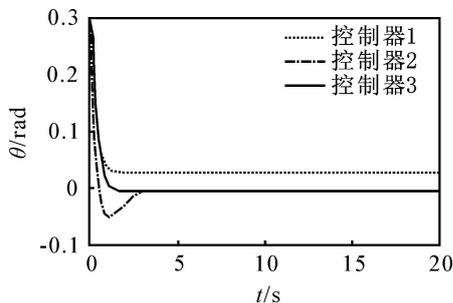


图 1 情形 1 的响应曲线

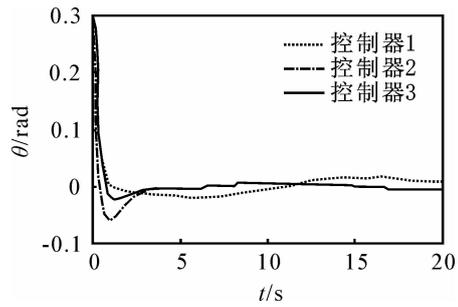


图 2 情形 2 的响应曲线

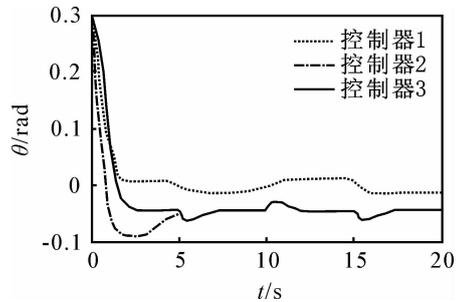


图 3 情形 3 的响应曲线

差为 0.018 rad, 采用控制器 2 和 3 时的稳态误差为 0.005 rad, 与定理 2 和定理 4 的结论吻合; 情形 3 采用控制器 1 时的稳态误差为 0.046 rad, 采用控制器 2 和 3 时的稳态误差为 0.013 rad. 在 3 种情形下, 控制器 2 都产生了较大的超调, 控制器 3 由于在边界层外对积分项进行了削弱, 在具有较小稳态误差的同时超调量小.

5 结 论

本文推导了稳态误差与滑模面斜率、边界层宽度、系统不确定性和外界干扰关系的数学表达式. 为了减小稳态误差, 同时防止积分饱和, 设计了一种改进积分型滑模面. 从理论分析和仿真实例可见, 基于改进积分型滑模面所设计的控制器具有如下优点: 1) 可减小稳态误差, 同时具有小的超调量; 2) 从边界层外对积分项的削弱到边界层内的传统积分, 该过程是连续的, 从而柔化了控制输入; 3) 算法简单, 便于工程实现.

参考文献 (References)

[1] Edwards C, Spurgeon S. Sliding mode control: Theory and applications [M]. London: Taylor and Francis, 1998.

[2] Slotine J J, Li W P. Application nonlinear control [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

[3] 冯勇, 安澄全, 李涛. 采用双滑模面减小一类非线性系统稳态误差[J]. 控制与决策, 2000, 15(3): 361-364. (Feng Y, An C Q, Li T. Steady state error reduction using two sliding surfaces in a class of nonlinear systems [J]. Control and Decision, 2000, 15(3): 361-364.)