

文章编号: 1001-0920(2009)10-1483-06

## 带噪声统计估计器的 Unscented 卡尔曼滤波器设计

赵琳, 王小旭, 薛红香, 夏全喜

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对传统 Unscented 卡尔曼滤波器(UKF)在噪声先验统计未知或不准确时滤波精度下降甚至发散的问题, 基于极大后验(MAP)估计原理, 设计了一种带噪声统计估计器的 UKF. 该 UKF 滤波算法在进行状态估计的同时, 能实时估计和修正噪声均值和协方差. 相比于传统 UKF, 所提出的 UKF 具有应对噪声统计变化的自适应能力. 仿真结果表明了该 UKF 滤波算法的有效性.

**关键词:** Unscented 卡尔曼滤波器; 极大后验估计; 噪声统计估计器; 自适应能力

**中图分类号:** TP202

**文献标识码:** A

## Design of unscented Kalman filter with noise statistic estimator

ZHAO Lin, WANG Xiao-xu, XUE Hong-xiang, XIA Quan-xi

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. Correspondent: WANG Xiao-xu, E-mail: woayofly1982@163.com)

**Abstract:** For the problem that the accuracy of the conventional UKF declines and further diverges when the prior noise statistic is unknown or inaccurate, an unscented Kalman filter (UKF) with noise statistic estimator is designed. This UKF filtering algorithm based on maximum a posterior (MAP) estimation can estimate and correct the mean and covariance of the noise in real time while it estimates the states. The proposed UKF has the adaptive capability of dealing with variable noise statistic. The simulation results show the effectiveness of the proposed UKF filtering algorithm.

**Key words:** Unscented Kalman filter; Maximum a posterior estimation; Noise statistic estimator; Adaptive capability

### 1 引言

非线性系统普遍存在于实际应用中, 解决非线性滤波问题的最优方案就是得到系统状态后验分布的完整描述. 然而, 这种精确的描述需要无尽的参数及大量的运算, 因此在实际中很难实现. 为此, 学者们提出了许多次优的近似方法<sup>[1-3]</sup>.

目前, 常用的非线性高斯状态滤波方法是扩展卡尔曼滤波(EKF). 它通过对非线性函数的泰勒展开式进行一阶线性化截断来近似状态的后验分布(均值和协方差), 进而将非线性滤波问题转化为线性卡尔曼滤波(KF). 但 EKF 存在非线性一阶线性化近似精度偏低及需要计算非线性函数雅可比矩阵的局限性. 为了能以较高的精度和较快的计算速度处理非线性高斯系统的滤波问题, Julier 等<sup>[4]</sup>提出了一种通过 Unscented 变换(UT)来逼近非线性系统状态后验分布的滤波方法: Unscented 卡尔曼滤

波(UKF). UT 通过采样策略选取一定数量的 Sigma 采样点, 且这些采样点具有同系统状态分布相同的均值和协方差. 不管系统非线性的程度如何, 这些 Sigma 采样点经过非线性变换后, 理论上可至少以 3 阶泰勒精度逼近任何非线性高斯系统状态的后验均值和协方差, 由此推断, UKF 的滤波精度高于 EKF. 同时, UKF 在滤波过程中无需计算非线性函数的雅可比矩阵, 这比 EKF 更容易实现.

然而, 传统 UKF 需要精确已知系统噪声和量测噪声的先验统计<sup>[5]</sup>. 但在许多实际问题中, 受试验样本等各方面的限制, 噪声的先验统计未知或不准确. 应用不准确的噪声统计设计 UKF, 势必导致滤波精度下降甚至发散<sup>[6]</sup>. 而现有解决此问题的算法, 要么计算复杂, 难以工程实现<sup>[7]</sup>; 要么虽能克服噪声变化所引起的 UKF 滤波精度下降, 但滤波收敛性较差, 且又引进了其他的限制条件, 如要求初始状态

收稿日期: 2008-11-16; 修回日期: 2009-03-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474046).

作者简介: 赵琳(1968—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事惯性导航、卫星导航及其组合导航技术的研究;  
王小旭(1982—), 男, 山西曲沃人, 博士生, 从事组合导航系统滤波算法的研究.

误差尽量小,这样就使问题更加复杂化<sup>[8]</sup>.

为此,本文提出一种带噪声统计估计器的 UKF 滤波算法.该方法在进行滤波计算的同时,利用噪声统计估计器对未知的或不准确的噪声统计进行实时估计和修正.相比于传统 UKF,该 UKF 滤波算法具有应对噪声变化的自适应能力,它在噪声统计未知或不准确情况下,依然具有极佳的稳定性和收敛性;相比现有算法<sup>[7,8]</sup>,噪声估计递推公式计算简单,容易实现,且噪声统计估计器对噪声统计的估计是无偏的.不同条件下的仿真分析结果表明了所提出的 UKF 滤波算法的有效性和可行性.

## 2 噪声均值非零时 UKF 算法实现

考虑如下非线性模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x}_k$  和  $\mathbf{z}_k$  分别为系统的  $n$  维状态向量和  $m$  维量测向量;函数  $f_k(\cdot)$  和  $h_k(\cdot)$  分别为非线性系统状态函数和量测函数;  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  分别为  $n$  维系统噪声和  $m$  维量测噪声,并且为互不相关的高斯白噪声,其均值和协方差矩阵分别为

$$\begin{cases} E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{q}, \text{cov}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q} \delta_{kj}; \\ E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{r}, \text{cov}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R} \delta_{kj}; \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\delta_{kj}$  为 Kronecker- $\delta$  函数.初始状态  $\mathbf{x}_0$  与所有噪声互不相关,且服从高斯正态分布,其先验均值和协方差矩阵为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = E(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{P}_0 = \text{cov}(\mathbf{x}_0) = E(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T. \end{cases} \quad (3)$$

UKF 在滤波过程中,需要假定系统噪声  $\mathbf{w}_k$  和量测噪声  $\mathbf{v}_k$  的均值为零<sup>[3]</sup>,若该条件不满足,UKF 滤波公式应作相应的修改.

令  $\boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{r}$ ,代入非线性系统(1)得

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}_k, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\boldsymbol{\mu}_k$  和  $\boldsymbol{\eta}_k$  都是均值为零、方差分别为  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的高斯白噪声.

在传统 KF 算法的基础上,对于一步状态预测及输出预测,应用 UT 来处理状态均值和协方差的非线性传递,即可得到传统 UKF.基于非线性系统(4)的 UKF 具体算法流程如下:

### 1) Sigma 点采样

在 UT 算法中,最重要的是确定 Sigma 点的采样策略,也就是确定使用 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值.目前,已有的 Sigma 采样策略<sup>[5]</sup>有对称采样、单形采样、3 阶矩偏度采样以及高斯分布 4 阶矩对称采样等.为了保证输出变量  $\mathbf{z}$  协方差的半正

定性,提出了对上述基本采样策略进行比例修正的算法框架<sup>[9]</sup>.

### 2) 预测方程

首先,按照 1) 所选择的 Sigma 采样策略,由  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k-1/k-1}$  计算 Sigma 点  $\boldsymbol{\xi}_{i,k-1/k-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ).它通过非线性状态函数  $f_k(\cdot) + \mathbf{q}$  传播为  $\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1}$ ,由  $\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1}$  可得一步状态预测均值  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  及误差协方差阵  $\mathbf{P}_{k/k-1}$ ,即

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} = f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1/k-1}) + \mathbf{q}, \quad i = 0, 1, \dots, L, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^m f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1/k-1}) + \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k/k-1} &= \\ E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T\} &= E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1}^T\} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T + \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (7)$$

其中:  $W_i^m$  和  $W_i^c$  为对应于  $\boldsymbol{\xi}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ) 的权值,它们分别为求 1 阶和 2 阶统计特性时的权系数.

然后,利用  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  和  $\mathbf{P}_{k/k-1}$  按照 1) 所选择的采样策略来计算 Sigma 点  $\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ).它通过非线性量测函数  $h_k(\cdot) + \mathbf{r}$  传播为  $\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1}$ ,由  $\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1}$  可得到输出预报均值  $\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}$  及协方差阵  $\mathbf{P}_{z_k}$  和  $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k}$ ,即

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} = h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}) + \mathbf{r}, \quad i = 0, 1, \dots, L, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^m h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}) + \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z_k} &= \\ E\{(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T\} &= E\{\tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1}^T\} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T + \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k} &= \\ E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T\} &= E\{\tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1} \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1}^T\} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T. \end{aligned} \quad (11)$$

### 3) 滤波更新

在获得新的量测  $\mathbf{z}_k$  后,进行滤波更新,有

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k, \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k} (\mathbf{P}_{z_k})^{-1}, \\ \mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{z_k} (\mathbf{K}_k)^T. \end{cases} \quad (12)$$

其中:  $\mathbf{K}_k$  为滤波增益矩阵,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}$ .

在上述传统 UKF 算法中,应用不同的采样策略

区别仅在于第 1) 步和后续计算的 Sigma 点个数  $L$ 。

### 3 噪声统计估计器

为了克服传统 UKF 的缺点,本文利用极大后验 (MAP) 估计原理<sup>[10]</sup>,设计出一种应用于 UKF 的噪声统计估计器,利用输出量测信息实时估计和修正噪声的均值和协方差,从而使 UKF 具有应对噪声变化的自适应能力。

已知  $w_k$  和  $v_k$  服从正态分布,且相互独立. 根据 MAP 估计原理,可得到应用于 UKF 的次优 MAP 噪声统计估计器. 带噪声统计估计器的 UKF 滤波算法具体推导过程如下。

当  $q, Q, r, R$  未知时,其连同状态  $x_0, x_1, \dots, x_k$  的 MAP 估计值  $\hat{q}, \hat{Q}, \hat{r}, \hat{R}$  及  $\hat{x}_{j/k}$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) 可用极大化如下条件密度求得:

$$J^* = p[\mathbf{X}_k, q, Q, r, R | \mathbf{Z}_k]. \quad (13)$$

其中:  $\mathbf{X}_k = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \mathbf{Z}_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ . 根据条件概率性质可得

$$J^* = p[\mathbf{X}_k, q, Q, r, R, \mathbf{Z}_k] / p[\mathbf{Z}_k], \quad (14)$$

而  $p[\mathbf{Z}_k]$  与最优化无关. 故问题转化为求如下无条件密度的极大值:

$$J = p[\mathbf{X}_k, q, Q, r, R, \mathbf{Z}_k] = p[\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k, q, Q, r, R] p[\mathbf{X}_k | q, Q, r, R] \times p[q, Q, r, R], \quad (15)$$

其中  $p[q, Q, r, R]$  由先验信息获得,可看作常数。

同时,由非线性系统(11)中  $\mu_k, \eta_k$  的高斯正态性假设,及条件概率的乘法定理可知

$$p[\mathbf{X}_k | q, Q, r, R] = p[x_0] \prod_{j=1}^k p[x_j | x_{j-1}, q, Q] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |P_0|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2\right\} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |Q|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q^{-1}}^2\right\} = C_1 |P_0|^{-1/2} |Q|^{-k/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q^{-1}}^2 \right]\right\}. \quad (16)$$

其中:  $n$  为系统状态维数,  $C_1 = \frac{1}{(2\pi)^{n(k+1)/2}}$  为一常数,  $|A|$  为  $A$  的行列式,  $\|u\|_A^2 = u^T A u$  为二次型。

已知量测值  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , 且可认为它们相互独立,类似地有如下计算公式:

$$p[\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k, q, Q, r, R] = \prod_{j=1}^k p[z_j | x_j, r, R] = \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |R|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \|z_j - h_j(x_j) - r\|_{R^{-1}}^2\right\} =$$

$$C_2 |R|^{-k/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|z_j - h_j(x_j) - r\|_{R^{-1}}^2\right\}. \quad (17)$$

其中:  $m$  表示量测维数,  $C_2 = \frac{1}{(2\pi)^{mk/2}}$  为一常数。

于是,将式(16), (17) 带入(15) 可得

$$J = C_1 C_2 |P_0|^{-1/2} |Q|^{-k/2} |R|^{-k/2} p[q, Q, r, R] \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|z_j - h_j(x_j) - r\|_{R^{-1}}^2 \right]\right\} = C |Q|^{-\frac{k}{2}} |R|^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|z_j - h_j(x_j) - r\|_{R^{-1}}^2 \right]\right\}, \quad (18)$$

其中

$$C = C_1 C_2 |P_0|^{-1/2} p[q, Q, r, R] \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2\right\}. \quad (19)$$

而由式(18) 可得

$$\ln J = -\frac{k}{2} \ln |Q| - \frac{k}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|x_j - f_{j-1}(x_{j-1}) - q\|_{Q^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|z_j - h_j(x_j) - r\|_{R^{-1}}^2 + \ln C. \quad (20)$$

考虑到  $J$  和  $\ln J$  具有相同的极值点,假设  $\hat{x}_{j-1/k}$  及  $\hat{x}_{j/k}$  已知,利用矩阵导数运算法则,令

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln J}{\partial q} \Big|_{q=\hat{q}_k}^{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1/k}, x_j=\hat{x}_{j/k}} &= 0, \\ \frac{\partial \ln J}{\partial Q} \Big|_{Q=\hat{Q}_k}^{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1/k}, x_j=\hat{x}_{j/k}} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln J}{\partial r} \Big|_{r=\hat{r}_k}^{x_j=\hat{x}_{j/k}} &= 0, \\ \frac{\partial \ln J}{\partial R} \Big|_{R=\hat{R}_k}^{x_j=\hat{x}_{j/k}} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

可得噪声统计的 MAP 估计器为

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_{j/k} - f_{j-1}(x_{j-1}) |_{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1/k}}], \quad (23)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\hat{x}_{j/k} - f_{j-1}(x_{j-1}) |_{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1/k}} - q] \cdot [\hat{x}_{j/k} - f_{j-1}(x_{j-1}) |_{x_{j-1}=\hat{x}_{j-1/k}} - q]^T\}, \quad (24)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [z_j - h_j(x_j) |_{x_j=\hat{x}_{j/k}}], \quad (25)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[z_j - h_j(x_j) |_{x_j=\hat{x}_{j/k}} - r] \cdot [z_j - h_j(x_j) |_{x_j=\hat{x}_{j/k}} - r]^T\}.$$

$$[\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/k}} - \mathbf{r}]^T\}. \quad (26)$$

在式(23)~(26)中以滤波估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/j-1}$  及  $\hat{\mathbf{x}}_{j/j}$  或预报估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/j}$  来近似代替计算复杂的平滑估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}$  及  $\hat{\mathbf{x}}_{j/k}$ , 即可得到噪声统计次优 MAP 估计器为

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}}], \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}} - \mathbf{q}] \cdot [\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}} - \mathbf{q}]^T\}, \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}}], \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}} - \mathbf{r}] \cdot [\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}} - \mathbf{r}]^T\}. \quad (30)$$

其中:  $f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}}$  的物理意义是: 状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/j-1}$  经非线性状态函数  $f_{j-1}(\cdot)$  传递之后的后验均值, 对于线性 KF,  $f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}}$  可通过线性状态函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF,  $f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}}$  只能通过 UT 以 3 阶泰勒精度近似已知, 其计算公式可借鉴式(6) 得到, 即

$$f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{x_{j-1} \leftarrow \hat{x}_{j-1/j-1}} = \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\xi_{i,j-1/j-1}). \quad (31)$$

其中:  $\xi_{i,j-1/j-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ) 为由  $j-1$  时刻状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/j-1}$  和协方差  $\mathbf{P}_{j-1/j-1}$  所构造的 Sigma 采样点.

同理,  $h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}}$  的物理意义是: 一步状态预测  $\hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}$  经非线性量测函数  $h_j(\cdot)$  传递之后的后验均值. 对于线性 KF,  $h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}}$  可通过线性量测函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF,  $h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}}$  只能通过 UT 变换以 3 阶泰勒精度近似已知, 其计算公式可借鉴式(9) 得到, 即

$$h_j(\mathbf{x}_j) |_{x_j \leftarrow \hat{x}_{j/j-1}} = \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\xi_{i,j/j-1}), \quad (32)$$

其中  $\xi_{i,j/j-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ) 为由一步状态预测  $\hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}$  和协方差  $\mathbf{P}_{j/j-1}$  所构造的 Sigma 采样点.

将式(31)及(32)带入式(27)~(30)可得到应用于 UKF 的噪声统计次优 MAP 估计器为

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\xi_{i,j-1/j-1})], \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\xi_{i,j-1/j-1}) - \mathbf{q}] \cdot [\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\xi_{i,j-1/j-1}) - \mathbf{q}]^T\},$$

$$\mathbf{q} \left[ \hat{\mathbf{x}}_{j/j} - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\xi_{i,j-1/j-1}) - \mathbf{q} \right]^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}] [\hat{\mathbf{x}}_{j/j} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}]^T\}, \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\xi_{i,j/j-1})], \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\xi_{i,j/j-1}) - \mathbf{r}] \cdot [\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\xi_{i,j/j-1}) - \mathbf{r}]^T\} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}] [\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}]^T\}. \quad (36)$$

下面讨论式(33)~(36)的这些次优 MAP 噪声统计估计器的无偏性. 对于服从高斯分布的非线性系统状态模型(4) 可以证明: 当已知系统状态后验均值和协方差时, UKF 的输出残差序列是零均值高斯白噪声序列<sup>[11]</sup>, 即有  $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k] = 0$ . 利用式(5)~(12) 可得

$$E[\hat{\mathbf{q}}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\mathbf{K}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j + \mathbf{q}] = \mathbf{q}, \quad (37)$$

$$E[\hat{\mathbf{r}}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\boldsymbol{\varepsilon}_j + \mathbf{r}] = \mathbf{r}. \quad (38)$$

故噪声均值  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{r}$  的次优 MAP 估计是无偏的. 考虑到  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}$  且  $\mathbf{P}_{z_k} = E[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T]$ , 则有

$$E[\hat{\mathbf{R}}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_{z_j} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[ \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}) (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1})^T + \mathbf{R} \right]. \quad (39)$$

由式(39) 可得量测噪声的协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的次优 MAP 无偏估计为

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}) (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1})^T]. \quad (40)$$

又由式(12) 可知  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k$ ,  $\mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{z_k} (\mathbf{K}_k)^T$ , 则有

$$E[\hat{\mathbf{Q}}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{K}_j E[\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] \mathbf{K}_j^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbf{K}_j \mathbf{P}_{z_j} \mathbf{K}_j^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\mathbf{P}_{j/j-1} - \mathbf{P}_{j/j}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[ \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}) (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1})^T - \mathbf{P}_{j/j} + \mathbf{Q} \right]. \quad (41)$$

由式(41) 可得系统噪声的协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  的次优 MAP 无偏估计为

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [K_j \boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T K_j^T + P_{j/j} - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{j/j-1}) (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{j/j-1})^T], \quad (42)$$

显然,容易推出次优无偏 MAP 噪声统计估计器的递推公式为

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{q}_{k-1} + \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k} - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1/k-1})], \quad (43)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{Q}_{k-1} + \mathbf{K}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k^T + P_{k/k} - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1}) (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1})^T], \quad (44)$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{\boldsymbol{r}}_{k-1} + \mathbf{z}_k - \sum_{i=0}^L W_i^m \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1})], \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{\mathbf{R}}_{k-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T]. \quad (46)$$

同时,基于噪声统计估计器的 UKF 滤波算法为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} = \sum_{i=0}^L W_i^m f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1/k-1}) + \hat{\boldsymbol{q}}_{k-1}, \quad (47)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1}) (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1})^T + \hat{\mathbf{Q}}_{k-1}, \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} = \sum_{i=0}^L W_i^m \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}) + \hat{\boldsymbol{r}}_k, \quad (49)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}_k} = \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T + \hat{\mathbf{R}}_k, \quad (50)$$

$$\mathbf{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} = \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1}) (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T, \quad (51)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k/k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}), \quad (52)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} (\mathbf{P}_{\mathbf{z}_k})^{-1}, \quad (53)$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{z}_k} (\mathbf{K}_k)^T. \quad (54)$$

设初始条件为:  $\hat{\boldsymbol{x}}_0, \mathbf{P}_0; \hat{q}_0, \hat{Q}_0; \hat{\boldsymbol{r}}_0, \hat{\mathbf{R}}_0$ . 从初始条件出发,上述带噪声统计估计器的 UKF 滤波算法在利用式(47)~(54)对非线性系统状态进行估计的

同时,采用式(43)~(46)对系统噪声和量测噪声的统计特性进行实时估计和修正,且噪声统计估计器对噪声均值和协方差的跟踪是无偏的.

### 4 仿真分析

下面采用非线性高斯模型进行滤波分析,状态方程为

$$\begin{cases} x_{1,k} = 3 \sin(x_{2,k-1}) + w_{k-1}, \\ x_{2,k} = x_{1,k-1} + x_{3,k-1} + w_{k-1}, \\ x_{3,k} = 0.2 x_{1,k-1} (x_{2,k-1} + x_{3,k-1}) + w_{k-1}. \end{cases} \quad (55)$$

观测方程为

$$z_k = x_{1,k} + x_{2,k} x_{3,k} + v_k. \quad (56)$$

其中:  $w_k$  和  $v_k$  为互不相关的高斯白噪声,且均值和协方差可表示为:  $E[w_k] = q, \text{cov}[w_k w_k^T] = \mathbf{Q}$ , 同时  $E[v_k] = r, \text{cov}[v_k v_k^T] = R$ .

对于传统 UKF,它们滤波前都要求精确知道噪声的先验统计.这里,设初始状态及噪声统计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T, \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, q = 0.3, \mathbf{Q} = 0.7, r = 0.5, R = 1. \quad (57)$$

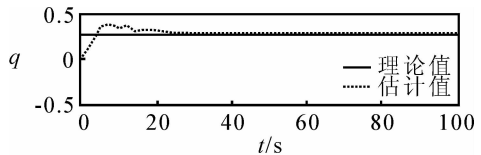
#### 例 1 噪声统计未知或不准确.

对于本文提出的 UKF 滤波算法,采用式(55),(56)所描述的非线性模型验证其有效性.

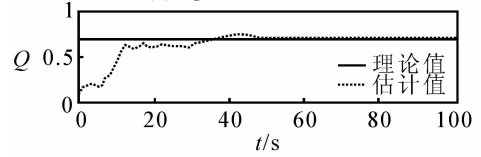
假设量测噪声统计特性精确已知,而系统噪声统计特性不准确,其初始均值和方差为

$$\hat{q}_0 = 0.1, \hat{Q}_0 = 0.4.$$

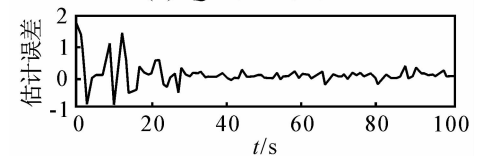
采用式(43)~(46)所示的噪声统计估计器对不准确的系统噪声均值  $q$  和方差  $Q$  进行估计, $q$  和  $Q$  的估计效果如图 1(a) 和图 1(b) 所示.可以看出,噪声统计估计器达到了对系统噪声均值和方差的有效跟踪,且具有快速性及跟踪精度高的特点,充分证明了



(a)  $q$  的估计效果



(b)  $Q$  的估计效果



(c)  $x_2$  的估计误差

图 1  $q$  和  $Q$  的估计值及状态  $x_2$  估计误差

噪声统计估计器的可行性和有效性。

由进一步理论分析可知:在图 1(c) 中,当滤波开始时,因系统噪声统计不准确,状态  $x_2$  的估计效果较差,估计误差较大.但大概在 30s 以后,随着噪声统计估计器对系统噪声均值  $q$  和方差  $Q$  的有效跟踪,基于噪声统计估计器的 UKF 滤波算法对状态的估计误差逐渐变小,且趋于零.这充分说明了,该 UKF 滤波算法能有效克服传统 UKF 在噪声统计未知或不准确时,滤波精度下降甚至滤波发散的缺点,这正是所提出的 UKF 滤波算法相对于传统 UKF 的优势所在。

### 例 2 噪声统计在滤波过程中发生变化。

假设非线性系统(55),(56)的噪声先验统计精确已知,如式(57)所示.但在滤波过程中,量测噪声方差  $R$  发生了变化,如图 2(b) 中的实线所示.如果此时仍然采用量测噪声的先验方差,则势必引起传统 UKF 状态估计误差变大,甚至可能引起滤波发散,如图 2(a) 所示。

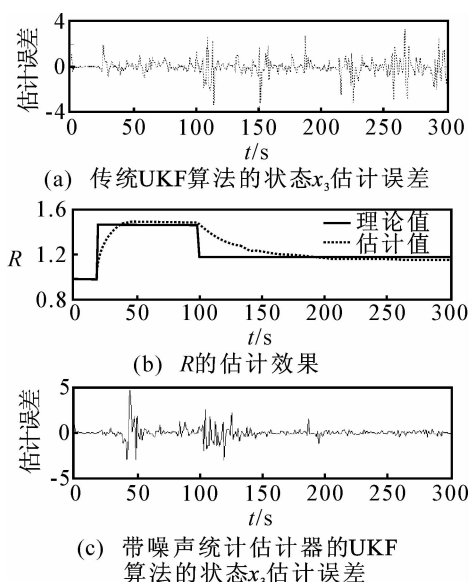


图 2  $R$  的估计值及状态  $x_3$  估计误差

图 2 中,量测噪声  $R$  在开始滤波的前 20s 时间内,并未发生改变,此时状态  $x_3$  的估计效果较好, $x_3$  估计误差接近于零.从 20s 这个时刻开始, $R$  发生了变化,此时  $R = 1.5$ ,状态  $x_3$  的估计误差开始变大.但随着采用噪声统计估计器大约从第 50s 时开始对  $R$  变化的精确跟踪,状态  $x_3$  的估计效果由差变好, $x_3$  的估计误差减小,如图 2(b) 和图 2(c) 所示。

同样,测量噪声方差  $R$  在第 100s 时再次发生改变,此时  $R = 1.2$ .随后状态  $x_3$  的估计误差开始变大,而后变小.大概在 200s 以后,噪声统计估计器达到了对  $R$  的精确跟踪,相应的,状态  $x_3$  的估计误差逐渐趋于零。

以上理论分析充分证明,带噪声统计估计器的

UKF 滤波算法相对于传统 UKF 具有应对噪声变化的自适应能力。

## 5 结 论

传统 UKF 滤波精度高于 EKF,但其在滤波前需要已知噪声先验统计的精确描述.本文基于极大后验估计原理,设计了一种带噪声统计估计器的 UKF 滤波算法.它能有效克服传统 UKF 在噪声统计未知或不准确时,滤波精度下降甚至滤波发散的缺点,且具有应对噪声变化的自适应能力.所提出的 UKF 滤波算法具有如下特点:适用于噪声为加性白噪声的非线性系统;噪声统计估计器递推公式工程应用简单;次优 MAP 噪声统计估计器是无偏的。

### 参考文献 (References)

- [1] Crassidis J L, Markley F L. Predictive filtering for nonlinear systems [J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 1997, 20(3): 566-572.
- [2] Gordon N, Salmond D. Novel approach to non-linear and non — Gaussian Bayesian state estimation[J]. Proc of Institute Electric Engineering, 1993, 140(2): 107-113.
- [3] Julier S J, Uhlmann J K. A new approach for filtering nonlinear system [C]. Proc of the 1995 American Control Conference, 1995: 1628-1632.
- [4] Julier S J, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformation of probability distributions[EB/OL]. <http://www.eng.ox.ac.uk/>.
- [5] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器 —— UKF 综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 481-489. (Pan Q, Yang F, Ye L, et al. Survey of a kind of nonlinear filters — UKF [J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 481-489.)
- [6] Qi Song, Juntong Qi, Jianda Han. An adaptive UKF algorithm and its application in mobile robot control[C]. Proc of the 2006 IEEE Int Conf on Robotics and Biomimetics. Kunming, 2006: 1117-1122.
- [7] Seong Yun Cho, Byung Doo Kim. Adaptive IIR/FIR fusion filter and its application to the INS/GPS integrated system[J]. Automatica, 2008, 44(8): 2040-2047.
- [8] Seong Yun Cho, Wan Sik Choi. Robust positioning technique in Low-Cost DR/GPS for land navigation[J]. IEEE Trans on Instrumentation and Measurement, 2006, 55(4): 1132-1142.
- [9] Julier S J. The scaled unscented transformation [C]. Proc of American Control Conf. Jefferson City, 2002: 4555-4559.
- [10] Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics [C]. Joint Automatic Control Conf. Columbia, 1969: 760-769.
- [11] Maybeck P S. Stochastic Models, Estimation and control[M]. New York: Academic Press, 1979.