第 24 卷 第 11 期 控 制 与 决 策 2009 年 11 月
Vol. 24 No. 11 Control and Decision Nov. 2009

文章编号：1001-0920(2009)11-1673-04

基于幂均算子的区间型多属性决策方法

万 树 平
（江西财经大学 信息管理学院，南昌 330013）

摘 要：针对决策矩阵元素为区间数的不确定多属性决策问题，提出一种新的决策方法.定义了区间数幂均算子和区间数的相似度，利用一致度矩阵获得每个属性与其他属性的相对一致度.通过区间数幂均算子集成得到方案的综合属性值，进而给出了方案的排序结果.该方法不需要求解属性的权重.应用实例表明了所提出方法的有效性和实用性.

关键词：多属性决策；区间数；幂均算子；相对一致度
中图分类号：C934 **文献标识码**：A

Method based on power average operator for interval multi-attribute decision-making

WAN Shu-ping
(College of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economic, Nanchang 330013, China. E-mail: shupingwan@163.com)

Abstract: A new method is proposed for interval multi-attribute decision-making, in which the attribute values are in the form of interval numbers. The interval power average operator and similarity degree for two interval numbers are defined. The relative consensus degree of each attribute on other attributes is derived through the matrix of relative consensus degree. By using the interval power average operator, the overall attribute value is obtained, then the priorities are given. This method doesn't need to solve the weights of attributes. An illustrative example shows the effectiveness and practicability of the proposed method.

Key words: Multi-attribute decision-making; Interval number; Power average operator; Relative consensus degree

1 引 言

多属性决策是决策科学非常活跃的研究领域之一.由于客观事物的复杂性和不确定性，以及人类思维的模糊性，人们所给出的决策信息往往不是以具体的数值(精确数)表达，而是以区间数的形式来表示，对这类问题进行研究具有重要的理论意义和实际应用背景[1].人们关于这类问题的研究已经取得了一些进展[1-13]，然而所提出的研究方法，其本质上大多还是集中在属性权重的确定上.

Yager 提出了精确数的幂均算子[14].本文则针对决策矩阵元素为区间数的不确定多属性决策问题，将幂均算子拓展到区间数的情形，提出了区间数幂均算子，进而给出了基于区间数幂均算子的多属性决策方法，较好地摆脱了属性权重概念的束缚，为解决区间型多属性决策问题提供了新思路.

2 幂均融合算子

对于精确数的幂均算子，其定义如下[14]：

$$P-A(a_1,\cdots,a_m)=\sum_{k=1}^{m}(1+T(a_k))a_k\Big/\sum_{k=1}^{m}(1+T(a_k)). \qquad (1)$$

其中

$$T(a_k)=\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\sup(a_k,a_j);$$

$a_1,\cdots,a_m$ 为一组待融合的数据(实数). $\sup(a,b)$ 为 b 对 a 的支持函数，它满足：

1) $\sup(a,b)\in[0,1]$；

2) $\sup(a,b)=\sup(b,a)$；

3) 如果 $|a-b|<|x-y|$，则 $\sup(a,b)>\sup(x,y)$.

收稿日期：2008-12-21；**修回日期**：2009-03-05.
基金项目：国家自然科学基金项目(10626029)；江西省自然科学基金项目(0611082，2007GQS0074)；江西省教育厅科技项目(GJJ08350).
作者简介：万树平(1974—)，男，江西乐安人，副教授，博士，从事决策分析、信息融合的研究.

幂均算子具有如下性质：

性质 1　当 $\sup(a,b)=0$ 时，幂均算子退化为普通的求平均数运算，即

$$P-A(a_1,\cdots,a_m)=\sum_{k=1}^{m}a_k/m;$$

性质 2　幂均算子满足互换性，即对于论域中各个排列的幂均算子都相同；

性质 3　幂均算子满足

$$\min_k\{a_k\}\leqslant P-A(a_1,\cdots,a_m)\leqslant \max_k\{a_k\};$$

性质 4　幂均算子是幂等的，如果对于所有 k 都有 $a_k=a$，则 $P-A(a_1,\cdots,a_m)=a$；

性质 5　幂均算子具有非单调性，当某个数值偏差较大时，幂均算子可通过减小该数值的权重，实现减低偏差较大数据对最终融合结果的影响.

为引入区间数幂均算子，首先给出区间数的有关概念.

定义 1[15]　设 R 为实数域，称闭区间 $[x^l,x^u]$ 为区间数，记为 $\bar{x}=[x^l,x^u]$. 其中：x^l 和 x^u 分别为区间数的左右端点，$x^l,x^u\in R$ 且 $x^l\leqslant x^u$. 若 $0<x^l\leqslant x^u$，则称 $[x^l,x^u]$ 为正区间数.

定义 2[15]　对于正区间数 $\bar{a}=[a^l,a^u]$，$\bar{b}=[b^l,b^u]$，规定如下的运算法则：

1) $\bar{a}+\bar{b}=[a^l+b^l,a^u+b^u]$；

2) $k\bar{a}=[ka^l,ka^u]$, $k>0$.

定义 3　设区间数 $\bar{a}=[a^l,a^u]$，$\bar{b}=[b^l,b^u]$，称 $\|\bar{a}-\bar{b}\|=(|b^l-a^l|+|b^u-a^u|)/2$ 为区间数 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的相离度，记为 $D(\bar{a},\bar{b})=\|\bar{a}-\bar{b}\|$.

由于 $D(\bar{a},\bar{b})$ 越小，则 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的相似程度越大，给出区间数相似度的定义如下：

定义 4　定义两个区间数 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的相似度为

$$S(\bar{a},\bar{b})=1-D(\bar{a},\bar{b}).$$

下面将精确数幂均算子推广到区间数情形，给出区间数幂均算子的定义.

定义 5　称

$$P-A(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)=\sum_{k=1}^{m}(1+T(\bar{a}_k))\bar{a}_k\Big/\sum_{k=1}^{m}(1+T(\bar{a}_k))\qquad(2)$$

为正区间数 $\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m$ 的幂均算子，其中

$$T(\bar{a}_k)=\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\sup(\bar{a}_k,\bar{a}_j).$$

$\sup(\bar{a},\bar{b})$ 为 $\bar{b}$ 对 $\bar{a}$ 的支持函数，它满足：

1) $\sup(\bar{a},\bar{b})\in[0,1]$；

2) $\sup(\bar{a},\bar{b})=\sup(\bar{b},\bar{a})$；

3) 如果 $\|\bar{a}-\bar{b}\|<\|\bar{x}-\bar{y}\|$，则 $\sup(\bar{a},\bar{b})>\sup(\bar{x},\bar{y})$.

区间数幂均算子同样具有幂均算子相似的性质：

性质 6　当 $\sup(\bar{a},\bar{b})=0$ 时，区间数幂均算子退化为普通的区间数求平均数运算，即

$$P-A(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)=\sum_{k=1}^{m}\bar{a}_k/m;$$

性质 7　区间数幂均算子满足互换性，即对于论域中各个排列的幂均算子都相同；

性质 8　将式(2)改写成

$$P-A(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)=\sum_{k=1}^{m}w_k\bar{a}_k,$$

$$w_k=(1+T(\bar{a}_k))\Big/\sum_{k=1}^{m}(1+T(\bar{a}_k)),$$

且有 $w_k\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{m}w_k=1$，则易知区间数幂均算子满足

$$\min_k\{\bar{a}_k\}\leqslant P-A(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)\leqslant \max_k\{\bar{a}_k\}.$$

性质 9　区间数幂均算子是幂等的，如果对于所有 k 都有 $\bar{a}_k=\bar{a}$，则 $P-A(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)=\bar{a}$.

性质 10　区间数幂均算子具有非单调性，当某个区间数偏差较大时，区间数幂均算子可通过减小该区间数的权重，实现减低偏差较大数据对最终融合结果的影响.

3　区间型多属性决策方法

3.1　区间型多属性决策模型

令 $M=\{1,\cdots,m\}$，$N=\{1,\cdots,n\}$. 对于某个多属性决策问题，设其方案集为 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$，属性集为 $P=\{p_1,\cdots,p_m\}$，属性的权重向量完全未知. 对于方案 s_i，按属性 p_j 进行测度，得到 s_i 关于属性 p_j 的属性值为区间数 $\bar{a}_{ij}=[a_{ij}^l,a_{ij}^u]$(不失一般性，设 $0<a_{ij}^l\leqslant a_{ij}^u$)，从而构成决策矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times m}$.

为消除不同物理量纲对决策结果的影响，可采用文献[5]的方法处理，得到规范化矩阵为 $\bar{R}=(\bar{r}_{ij})_{n\times m}$，其中 $\bar{r}_{ij}=[r_{ij}^l,r_{ij}^u]$.

3.2　方案综合属性值

针对决策矩阵元素为区间数的情况，对于方案 s_i，可构建各属性的一致度矩阵为

$$S^{(i)}=(S_{kt}^{(i)})_{n\times m},\qquad(3)$$

其中

$$S_{kt}^{(i)}=S(\bar{r}_{ik},\bar{r}_{it})=1-D(\bar{r}_{ik},\bar{r}_{it}).$$

定义 6　定义方案 s_i 关于属性 p_k 与其他属性的平均一致度为

$$S_k^{(i)}=\frac{1}{m-1}\sum_{t=1,t\neq k}^{m}S_{kt}^{(i)}.$$

为便于比较，将平均一致度进行归一化，得到属性 p_k 与其他属性的相对一致度.

定义 7　定义方案 s_i 关于属性 p_k 与其他属性的

相对一致度为

$$R(S_k^{(i)}) = S_k^{(i)} \Big/ \sum_{k=1}^{m} S_k^{(i)},$$

其中 $R(S_k^{(i)})$ 反映的是方案 s_i 关于属性 p_k 与其他属性所支持的程度. $R(S_k^{(i)})$ 的数值越大,表明属性 p_k 被其他属性支持的程度越高.

由定义 6 和定义 7 可知,相对一致度 $R(S_k^{(i)})$ 满足区间数幂均算子定义 5 中对支持度的要求. 同时,由于区间数幂均算子具有非单调性,当某个属性值偏差较大时,幂均算子可通过减小该属性的权重,实现减低偏差较大数据对最终决策结果的影响. 所以用相对一致度 $R(S_k^{(i)})$ 代替式(2) 中的 $T(\bar{a}_k)$ 进行计算,即可得到方案 s_i 的综合属性值

$$\bar{z}_i = P-A(\bar{r}_{i1},\cdots,\bar{r}_{im}) = \sum_{k=1}^{m}\left[(1+R(S_k^{(i)}))\bar{r}_{ik}\right] \Big/ \sum_{k=1}^{m}(1+R(S_k^{(i)})), \quad (4)$$

其中区间数的加法与数乘根据定义 2 运算.

需要指出的是,如果为了突出偏差较大的属性值的重要性,而对其赋予较大的权重,则势必减弱其他属性的权重,导致方案的综合属性值受该偏差较大的属性值所左右,从而大大消弱了其他属性对决策的作用,这与多属性决策根据多个属性进行决策不吻合. 事实上,在评价系统中可以认为没有哪个指标能够超过 50% 的权重[16]. 若人为地赋予权重,则主观性太大,而赋予的权重超过 50% 的作法也不可取.

文献[6,9] 通过不同的优化模型来确定属性权重,本文则由式(4) 将方案的各属性值直接集成,从而克服了选择不同优化模型所导致属性权重不一致的问题. 同时无需人为地赋予属性权重,在一定程度上提高了决策的客观性.

3.3　基于区间数幂均算子的决策方法

综上分析,给出基于区间数幂均算子的多属性决策方法,具体步骤如下:

1) 由文献[5] 的方法得到规范化的决策矩阵.

2) 根据式(3) 构造各方案的一致度矩阵.

3) 由定义 6 和定义 7 计算各方案关于各属性的平均一致度和相对一致度.

4) 由式(4) 得到各方案的综合属性值.

5) 因为方案的综合属性值仍为区间数,所以可计算可能度互补矩阵[10],得到排序向量 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$. ω_i 值越大,对应方案越优.

4　实例分析

以文献[9] 选拔干部的例子来说明所提出的方法. 某单位对干部进行考核选拔时,首先制定了 6 项考核指标(属性) $p_1,\cdots,p_6$,分别是思想品德、工作态度、工作作风、文化水平和知识结构、领导能力、开拓能力;然后由群众推荐、评议,对各项指标分别打分;之后进行统计处理,从中确定 5 名候选人 $s_1,\cdots,s_5$. 因为群众对同一候选人所给出的指标值(属性值)并不完全相同,因此经统计处理后的每个候选人在各指标(属性) 下的属性值是以区间数形式给出的,具体见表 1. 试确定最佳候选人.

采用本文提出的方法,首先由文献[5] 得到规范化的决策矩阵为

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} [0.372\ 0.405] & [0.394\ 0.414] & [0.398\ 0.423] & [0.407\ 0.432] & [0.396\ 0.410] & [0.415\ 0.437] \\ [0.394\ 0.429] & [0.389\ 0.410] & [0.394\ 0.415] & [0.394\ 0.415] & [0.411\ 0.438] & [0.394\ 0.419] \\ [0.395\ 0.420] & [0.377\ 0.396] & [0.408\ 0.433] & [0.408\ 0.433] & [0.386\ 0.410] & [0.408\ 0.424] \\ [0.385\ 0.405] & [0.413\ 0.433] & [0.385\ 0.410] & [0.390\ 0.414] & [0.395\ 0.419] & [0.417\ 0.433] \\ [0.384\ 0.410] & [0.402\ 0.414] & [0.402\ 0.414] & [0.407\ 0.419] & [0.402\ 0.414] & [0.380\ 0.391] \end{bmatrix}.$$

其次以候选人 s_1 为例,详细讲解本文方法:由式(4) 可得候选人 s_1 的一致度矩阵为

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9845 & 0.9780 & 0.9690 & 0.9865 & 0.9625 \\ 0.9845 & 1 & 0.9935 & 0.9845 & 0.9980 & 0.9780 \\ 0.9780 & 0.9935 & 1 & 0.9910 & 0.9915 & 0.9845 \\ 0.9690 & 0.9845 & 0.9910 & 1 & 0.9825 & 0.9935 \\ 0.9865 & 0.9980 & 0.9915 & 0.9825 & 1 & 0.9760 \\ 0.9625 & 0.9780 & 0.9845 & 0.9935 & 0.9976 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用定义 6 和定义 7 可得候选人 s_1 关于各属性的平均一致度和相对一致度分别为

$$(S_1^{(1)},\cdots,S_6^{(1)}) = (0.9761, 0.9877, 0.9877, 0.9841, 0.9869, 0.9789),$$

$$(R(S_1^{(1)}),\cdots,R(S_6^{(1)})) = (0.1654, 0.1674, 0.1674, 0.1668, 0.1672, 0.1659).$$

表 1 各候选人在各指标下的属性值

方案	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
s_1	[0.85 0.90]	[0.90 0.92]	[0.91 0.94]	[0.93 0.96]	[0.90 0.91]	[0.95 0.97]
s_2	[0.90 0.95]	[0.89 0.91]	[0.90 0.92]	[0.90 0.92]	[0.94 0.97]	[0.90 0.93]
s_3	[0.88 0.91]	[0.84 0.86]	[0.91 0.94]	[0.91 0.94]	[0.86 0.89]	[0.91 0.92]
s_4	[0.85 0.87]	[0.91 0.93]	[0.85 0.88]	[0.86 0.89]	[0.87 0.90]	[0.92 0.93]
s_5	[0.86 0.89]	[0.90 0.92]	[0.90 0.95]	[0.91 0.93]	[0.90 0.92]	[0.85 0.87]

然后根据式(4)得到候选人 s_1 的综合属性值为

$$\bar{z}_1 = P-A(\bar{r}_{11},\cdots,\bar{r}_{16}) = [0.3967, 0.4202].$$

同样可得到其他候选人的综合属性值分别为

$$\bar{z}_2 = [0.3975, 0.4210],$$
$$\bar{z}_3 = [0.3970, 0.4193],$$
$$\bar{z}_4 = [0.3975, 0.4190],$$
$$\bar{z}_5 = [0.3962, 0.4103].$$

最后采用文献[10]方法计算上述综合属性值区间数,得到排序向量

$$\omega = (0.2066, 0.2111, 0.2051, 0.2058, 0.1714).$$

方案排序结果为 $s_2 \succ s_1 \succ s_4 \succ s_3 \succ s_5$,故最佳候选人为 s_2.这与文献[9]的决策结果相同.

5 结 论

本文研究了决策矩阵元素为区间数的多属性决策问题,提出了幂均融合的决策方法.该方法首先根据精确数幂均算子定义了区间数幂均算子;然后由区间数幂均算子直接融合方案的属性值,从而得到方案的综合属性值.其优点是无需求解属性权重,摆脱了属性权重概念的束缚,有效地弥补了不同方法确定属性权重而导致的不一致性的缺陷.

参考文献(References)

[1] 达庆利,徐泽水.不确定多属性决策的单目标最优化模型[J].系统工程学报,2002,17(1):50-55.
(Da Q L, Xu Z S. Single-objective optimization model in uncertain multi-attribute decision-making[J]. J of Systems Engineering, 2002, 17(1): 50-55.)

[2] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京:清华大学出版社,2004.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[3] 徐泽水,达庆利.区间数排序的可能度法及其应用[J].系统工程学报,2003,18(1):67-70.
(Xu Z S, Da Q L. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application[J]. J of Systems Engineering, 2003, 18(1): 67-70.)

[4] 冯向前,魏翠萍,胡钢,等.区间数判断矩阵的一致性研究[J].控制与决策,2008,23(2):182-186.
(Feng X Q, Wei C P, Hu G, et al. Consistency of interal judgment matrix[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 182-186.)

[5] 徐泽水,达庆利.区间型多属性决策的一种新方法[J].东南大学学报,2003,33(4):498-501.
(Xu Z S, Da Q L. New method for interval multi-attribute decision-making[J]. J of Southeast University, 2003, 33(4): 498-501.)

[6] 姜艳萍,樊治平.给出方案偏好信息的区间数多指标决策方法[J].系统工程与电子技术,2005,27(2):250-252.
(Jiang Y P, Fan Z P. Method for multiple attribute decision making with attribute interval numbers and preference information on alternatives[J]. J of System Engineering and Electronics, 2005, 27(2): 250-252.)

[7] Zhou H A, Liu S Y, Fang X R. Method for uncertain multi-attribute decision-making with preference information in the form of interval numbers complementary judgment matrix[J]. J of System Engineering and Electronics, 2005, 18(2): 265-269.

[8] 张兴芳,管恩瑞,孟广武.区间值模糊综合评判及其应用[J].系统工程理论与实践,2001,21(12):81-84.
(Zhang X F, Guan E R, Meng G W. Interval valued fuzzy comprehensive evaluation and its application[J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2001, 21(12): 81-84.)

[9] 徐泽水.求解不确定型多属性决策问题的一种新方法[J].系统工程学报,2002,17(2):177-181.
(Xu Z S. New method for uncertain multi-attribute decision making problems[J]. J of System Engineering, 2002, 17(2): 177-181.)

[10] 徐泽水.模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J].系统工程学报,2001,16(4):311-314.
(Xu Z S. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgement matrix[J]. J of System Engineering, 2001, 16(4): 311-314.)

[11]万树平.区间型多属性决策的心态指标法[J].控制与决策,2009,24(1):35-38.
(Wan S P. Method of attitude index for interval multi-attribute decision-making[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 35-38.)

(下转第 1687 页)