

文章编号: 1001-0920(2009)11-1688-05

# 一类高阶 Cohen-Grossberg 神经网络的多周期性分析

盛立, 杨慧中

(江南大学 通信与控制工程学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 利用状态空间分解方法, 探讨一类具有特殊激励函数的高阶 Cohen-Grossberg 神经网络的多周期性问题. 该类神经网络的激励函数包括带有饱和区的非递减函数以及一般的细胞神经网络激励函数等. 给出了保证此类网络的周期环在饱和区内局部指数收敛的充分条件. 所得结果表明, 一个  $n$  维网络可以有  $2^n$  个局部指数收敛的周期环存在于饱和区. 最后以一个数值例子说明了所得结果的有效性.

**关键词:** Cohen-Grossberg 神经网络; 高阶神经网络; 多周期性; 局部指数收敛

**中图分类号:** TP183

**文献标识码:** A

## Multiperiodicity analysis of a class of high-order Cohen-Grossberg neural networks

SHENG Li, YANG Hui-zhong

(School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: YANG Hui-zhong, E-mail: victory8209@yahoo.com.cn)

**Abstract:** The multiperiodicity of a class of high-order Cohen-Grossberg neural networks with special activation functions is discussed by using decomposition of the state space. The activation functions of this class of neural networks include nondecreasing functions with saturation, standard activation functions of cellular neural networks, etc. A sufficient condition for guaranteeing periodic orbits of this kind of networks to be locally exponentially convergent in saturation regions is obtained. The results show that an  $n$ -dimension neural network can have  $2^n$  periodic orbits located in saturation regions and these periodic orbits are locally exponentially convergent. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the results.

**Key words:** Cohen-Grossberg neural networks; High-order neural networks; Multiperiodicity; Local exponential convergent

### 1 引言

近年来, 许多学者已深入研究了 Cohen-Grossberg 神经网络 (CGNNs) 的动力学行为, 并取得了许多关于 CGNNs 系统稳定性的研究成果<sup>[1-3]</sup>. 然而, 关于 CGNNs 稳定性的研究大都围绕单稳定性展开, 而单稳定网络在计算上是受限制的, 因为它不能处理重要的神经计算, 如决策选择等问题. 最近, Huang<sup>[4]</sup> 和 Zeng 等<sup>[5]</sup> 重点研究了各类神经网络的多稳定性问题, 并提出了一些创新性结果.

除稳定性之外, 一个激励状态可能围绕一个轨道周期振荡, 在这种情况下收敛子就是一个极限环. 文献[6]指出, 这种极限环可通过存储模式应用到联想记忆中. 因为一个平衡点可以看成具有任意周期

振荡的特殊形式, 所以神经网络的周期性研究比稳定性研究更具有概括性. 文献[7]分析了一类具有漏泄时滞细胞神经网络模型, 给出了该类网络的周期环在饱和区局部指数收敛的充分条件. Cao 等<sup>[8]</sup> 利用 Cauchy 收敛性原理, 研究了一类 Cohen-Grossberg 神经网络的多稳定性与多周期性问题. 另外, 高阶神经网络在网络的逼近能力、收敛速度、存储水平和容错能力等多方面, 较之一阶神经网络具有更强的功能, 因而高阶神经网络的研究愈来愈受到人们的重视<sup>[9,10]</sup>.

本文初步探讨了一类具有特殊激励函数的高阶 Cohen-Grossberg 神经网络 (HOCGNNs) 模型的多周期性和多稳定性问题. 利用此类神经网络激励函

收稿日期: 2008-12-04; 修回日期: 2009-01-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674092); 江南大学创新团队发展计划项目.

作者简介: 盛立(1982—), 男, 山东莱阳人, 博士生, 从事非线性系统的稳定性与混沌同步的研究;

杨慧中(1955—), 女, 江苏无锡人, 教授, 博士生导师, 从事过程建模、优化控制等研究.

数的特性,对该网络在饱和区周期解的局部指数收敛性进行分析,并给出了一些充分性的判据.

## 2 系统描述与准备工作

考虑如下高阶 Cohen-Grosseberg 神经网络:

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt = & \\ -a_i(x_i(t))\left[ & b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(x_j(t - \right. \\ \tau_j(t))) - & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ijk} f_j(x_j(t - \\ \tau_j(t))) f_k(x_k(t - & \tau_k(t))) - u_i(t) \left. \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

其中: $x_i(t)$  表示第  $i$  个神经元状态, $a_i(\cdot) > 0$  表示放大函数, $b_i > 0, c_{ij}$  为网络的一阶连接权重, $d_{ijk}$  为网络的二阶连接权重, $u_i(t)$  表示第  $i$  个具有  $\omega$  周期的外部输入变量, $\tau_j(t) (j = 1, 2, \dots, n)$  为变时滞且满足  $0 \leq \tau_j(t) \leq \tau < +\infty, f_j(\cdot)$  为如下定义的一类激励函数:

$$\begin{aligned} f_j(\cdot) \in C; \\ f_j(\xi) = \begin{cases} v_j, & -\infty < \xi < m_j; \\ \bar{f}_j(\xi), & m_j \leq \xi \leq n_j; \\ w_j, & n_j < \xi < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $v_j, w_j, m_j, n_j$  为常数且满足  $v_j < w_j, m_j < n_j; \bar{f}_j(\cdot) \in C$  为非递减函数. 此类激励函数包括了带有饱和区的非递减函数,例如具有两个角点的分段线性函数

$$f_j(\xi) = \begin{cases} v_j, & -\infty < \xi < m_j; \\ v_j + \frac{w_j - v_j}{n_j - m_j}(\xi - m_j), & m_j \leq \xi \leq n_j; \\ w_j, & n_j < \xi < \infty. \end{cases}$$

以及细胞神经网络激励函数

$$f_j(\xi) = \frac{1}{2}(|\xi + 1| - |\xi - 1|), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

本文给出如下假设:

**假设 1** 函数  $a_i(u) (i = 1, 2, \dots, n)$  是正的有界函数,且对于所有  $u \in \mathbf{R}$ , 满足

$$0 < \underline{a}_i \leq a_i(u) \leq \bar{a}_i < +\infty.$$

定义  $C([t_0 - \tau, t_0], \Theta)$  为  $[t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \Theta \in \mathbf{R}^n$  映射的连续函数空间,其范数为

$$\|\phi\|_{t_0} = \max\left\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{s \in [t_0 - \tau, t_0]} |\phi_i(s)| \right\},$$

$$\phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s))^T.$$

设  $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \}$  为向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  的向量范数.

对于任意  $\phi, \varphi \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta)$ , 其中

$$\phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s))^T,$$

$$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s))^T.$$

令  $\|\phi, \varphi\|_{t_0} = \max\left\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{s \in [t_0 - \tau, t_0]} |\phi_i(s) - \varphi_i(s)| \right\}$  作为一个在  $C([t_0 - \tau, t_0], \Theta)$  上的测度.

定义

$$\begin{aligned} (-\infty, m_i) = & \\ (-\infty, m_i)^1 \times [m_i, n_i]^0 \times (n_i, +\infty)^0, & \\ [m_i, n_i] = & \\ (-\infty, m_i)^0 \times [m_i, n_i]^1 \times (n_i, +\infty)^0, & \\ (n_i, +\infty) = & \\ (-\infty, m_i)^0 \times [m_i, n_i]^0 \times (n_i, +\infty)^1, & \\ \mathbf{R} = (-\infty, +\infty) = & \\ (-\infty, m_i) \cup [m_i, n_i] \cup (n_i, +\infty), & \end{aligned}$$

则  $(-\infty, +\infty)^n$  可分为如下  $3^n$  个子空间:

$$\begin{aligned} \Omega = & \\ \left\{ \prod_{i=1}^n (-\infty, m_i)^{\delta_1^{(i)}} \times [m_i, n_i]^{\delta_2^{(i)}} \times \right. & \\ (n_i, +\infty)^{\delta_3^{(i)}}, (\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \delta_3^{(i)}) = (1, 0, 0) \text{ or} & \\ (0, 1, 0) \text{ or } (0, 0, 1), i = 1, 2, \dots, n \left. \right\}. & \end{aligned} \quad (3)$$

另外, $\Omega$  也可分为如下 3 个子空间:

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \{ [m_i, n_i]^n \}, \\ \Omega_2 = \left\{ \prod_{i=1}^n (-\infty, m_i)^{\delta^{(i)}} \times (n_i, +\infty)^{1-\delta^{(i)}}, \right. \\ \left. \delta^{(i)} = 1 \text{ or } 0, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

$$\Omega_3 = \Omega - \Omega_1 - \Omega_2.$$

因此, $\Omega_1$  由一个区域构成, $\Omega_2$  由  $2^n$  个区域构成, $\Omega_3$  由  $3^n - 2^n - 1$  个区域构成.

**定义 1** 如果  $x^*(t)$  是 HOCGNN(1) 的一个孤立的周期轨迹,则称  $x^*(t)$  是该 HOCGNN 的周期环,即存在  $\omega > 0$  使得  $\forall t \geq t_0, x^*(t + \omega) = x^*(t)$ , 且存在  $\xi > 0$  使得

$$\forall \bar{x} \in \{x \mid 0 < \|x, x^*(t)\| < \xi, x \in \mathbf{R}^n, t \geq t_0\},$$

其中  $\bar{x}$  不是 HOCGNN(1) 的任意周期轨迹上的点.

**定义 2** HOCGNN(1) 的一个周期环  $x^*(t)$  在区域  $\gamma$  中是局部指数收敛的,如果存在常数  $\alpha > 0, \beta > 0$  使得

$$\|x(t; t_0, \phi) - x^*(t)\| \leq \beta \|\phi\|_{t_0} e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

其中: $x(t; t_0, \phi)$  是 HOCGNN(1) 在初始条件  $(t_0, \phi)$  下的状态; $\phi(\vartheta) \in C([t_0 - \tau, t_0], \gamma), \gamma$  为周期轨迹  $x^*(t)$  的局部指数收敛集. 当  $\gamma = \mathbf{R}^n$  时,  $x^*(t)$  全局指数收敛. 特别地, 当  $x^*(t)$  为不动点时, HOCGNN(1) 是全局指数稳定的.

**引理 1**<sup>[11]</sup> 令  $\Theta$  有界且是在  $\mathbf{R}^n$  上的闭集,  $H$  是一个在完备矩阵空间  $(\Theta, \|\cdot, \cdot\|)$  上的映射, 其中

$$\|x, y\|_{t_0} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i - y_i| \}, \forall x, y \in \Theta$$

是一个在  $\Theta$  上的测度. 如果  $H(\Theta) \subset \Theta$ , 且存在一个常数  $\alpha < 1$ , 使得  $\|H(x), H(y)\| \leq \alpha \|x, y\|$ ,  $\forall x, y \in \Theta$ , 则存在  $x_0 \in \Theta$  使得  $H(x_0) = x_0$ .

假设  $N_1 \cup N_2 \cup N_3 = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_1 \cap N_2$ ,  $N_2 \cap N_3$  和  $N_1 \cap N_3$  均为空集. 定义  $\Theta_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in (-\infty, m_i), i \in N_1; x_i \in (n_i, +\infty), i \in N_2; x_i \in [m_i, n_i], i \in N_3\}$ . 注意到  $\Theta_1 \subset \Omega$ , 其中  $\Omega$  由式(3)定义. 若  $N_3$  为空, 则定义  $\Theta_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in (-\infty, m_i), i \in N_1; x_i \in (n_i, +\infty), i \in N_2\}$ .

### 3 主要结果

**定理 1** 假设系统(1)满足假设 1, 对于  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\forall t \geq t_0$ , 如果有

$$\begin{aligned} &|u_i(t)| < \\ &c_{ii} \min\{|v_i|, |w_i|\} - b_i \max\{|m_i|, |n_i|\} - \\ &\sum_{j=1, j \neq i}^n |c_{ij}| \max\{|v_j|, |w_j|\} - \\ &\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |d_{ijk}| \Gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$\Gamma = \max\{|v_j v_k|, |w_j w_k|, |v_j w_k|, |w_j v_k|\}$ , 则 HOCGNN(1) 在  $\Omega_2$  内有  $2^n$  个局部指数收敛极限环.

**证明** 如果  $\forall s \in [t_0 - \tau, t], x(s) \in \Theta_2$ , 则由系统(1)和激励函数(2)特性可知

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt = & -a_i(x_i(t)) \left[ b_i x_i(t) - \sum_{j \in N_1} c_{ij} v_j - \right. \\ & \sum_{j \in N_2} c_{ij} w_j - \sum_{j, k \in N_1} d_{ijk} v_j v_k - \\ & \sum_{j, k \in N_2} d_{ijk} w_j w_k - \sum_{j \in N_1, k \in N_2} d_{ijk} v_j w_k - \\ & \left. \sum_{j \in N_2, k \in N_1} d_{ijk} w_j v_k - u_i(t) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

当  $i \in N_1$  和  $x_i(t) = m_i$  时, 由式(4)和(5)得

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt = & -a_i(m_i) \left[ b_i m_i - \sum_{j \in N_1} c_{ij} v_j - \right. \\ & \sum_{j \in N_2} c_{ij} w_j - \sum_{j, k \in N_1} d_{ijk} v_j v_k - \\ & \sum_{j, k \in N_2} d_{ijk} w_j w_k - \sum_{j \in N_1, k \in N_2} d_{ijk} v_j w_k - \\ & \left. \sum_{j \in N_2, k \in N_1} d_{ijk} w_j v_k - u_i(t) \right] < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

当  $i \in N_2$  和  $x_i(t) = n_i$  时, 由式(4)和(5)得

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt = & -a_i(n_i) \left[ b_i n_i - \sum_{j \in N_1} c_{ij} v_j - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in N_2} c_{ij} w_j - \sum_{j, k \in N_1} d_{ijk} v_j v_k - \\ & \sum_{j, k \in N_2} d_{ijk} w_j w_k - \sum_{j \in N_1, k \in N_2} d_{ijk} v_j w_k - \\ & \left. \sum_{j \in N_2, k \in N_1} d_{ijk} w_j v_k - u_i(t) \right] > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)和(7)可知, 如果  $\forall \phi \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ , 则  $x(t; t_0, \phi)$  将保持在  $\Theta_2$  区域内, 且  $\Theta_2$  是 HOCGNN(1) 的一个不变集.

令  $x_i(t; t_0, \phi)$  和  $x_i(t; t_0, \varphi)$  分别为 HOCGNN(1) 的两个初始条件  $(t_0, \phi)$  和  $(t_0, \varphi)$  下的两个状态, 其中  $\phi, \varphi \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ . 因为  $b_i > 0$ , 所以可以选择一个足够小的正数  $\varepsilon$  使下式成立:

$$b_i - \varepsilon / \underline{a}_i > 0. \quad (8)$$

定义  $y_i(t)$  如下:

$$y_i(t) = e^{\varepsilon t} \left| \int_{x_i(t; t_0, \varphi)}^{x_i(t; t_0, \phi)} \frac{1}{a_i(s)} ds \right|. \quad (9)$$

考虑到假设 1 和式(5), 对  $y_i(t)$  求导得

$$\begin{aligned} dy_i(t)/dt \leq & e^{\varepsilon t} [(\varepsilon / \underline{a}_i) |x_i(t; t_0, \phi) - x_i(t; t_0, \varphi)| - \\ & b_i |x_i(t; t_0, \phi) - x_i(t; t_0, \varphi)|]. \end{aligned}$$

由式(8)可知,  $dy_i(t)/dt < 0$ , 因此有  $y_i(t) \leq y_i(t_0)$ . 另一方面, 根据式(9)有

$$\begin{aligned} y_i(t) &\geq (1/\bar{a}_i) e^{\varepsilon t} |x_i(t; t_0, \phi) - x_i(t; t_0, \varphi)|, \\ y_i(t_0) &\leq (1/\underline{a}_i) e^{\varepsilon t_0} \|\phi, \varphi\|_{t_0}. \end{aligned}$$

因此, 对于  $\forall t \geq t_0$ , 有

$$\begin{aligned} |x_i(t; t_0, \phi) - x_i(t; t_0, \varphi)| &\leq \\ (\bar{a}_i / \underline{a}_i) \|\phi, \varphi\|_{t_0} e^{-\varepsilon(t-t_0)} &\leq \\ (\bar{a} / \underline{a}) \|\phi, \varphi\|_{t_0} e^{-\varepsilon(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \\ \bar{a} &= \max\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}. \end{aligned}$$

定义  $x_\phi^{(t)}(\theta) = x(t + \theta; t_0, \phi)$ ,  $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$ . 因为  $\Theta_2$  是系统(1)的不变集, 所以对于  $\forall \phi \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ , 有  $x_\phi^{(t)} \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ .

通过  $H(\phi) = x_\phi^{(w)}$ , 定义一个 Poincare 映射

$$H : C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2) \rightarrow C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2),$$

则有  $H(C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)) \subset C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ , 且  $H^m(\phi) = x_\phi^{(mw)}$ .

选择一个正整数  $m$ , 使得

$$(\bar{a} / \underline{a}) e^{-\varepsilon(mw - \tau)} \leq \alpha \leq 1. \quad (11)$$

由式(10)和(11)可得

$$\begin{aligned} \|H^m(\phi), H^m(\varphi)\|_{t_0} &\leq \\ \max\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{\theta \in [t_0 - \tau, t_0]} |x_i(mw + \theta; t_0, \phi) - \\ x_i(mw + \theta; t_0, \varphi)| \} &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{a}/\underline{a}) \|\phi, \varphi\|_{t_0} e^{-\varepsilon(m\omega + t_0 - t - t_0)} &\leq \\ \alpha \|\phi, \varphi\|_{t_0}. \end{aligned} \tag{12}$$

根据引理 1,  $H^m$  是一个收缩映射, 故存在唯一不动点  $\phi^* \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ , 使得  $H^m(\phi^*) = \phi^*$ . 另外, 容易得出  $H^m(H(\phi^*)) = H(H^m(\phi^*)) = H(\phi^*)$ . 因此,  $H(\phi^*)$  也是  $H^m$  的一个不动点. 由映射  $H^m$  不动点的唯一性可知  $H(\phi^*) = \phi^*$ , 即  $x_{\phi^*}^{(\omega)} = \phi^*$

令  $x(t; t_0, \phi^*)$  为 HOCGNN(1) 的一个状态, 且初始条件为  $(t_0, \phi^*)$ . 由式(1) 可得

$$\begin{aligned} dx_i(t; t_0, \phi^*)/dt = & \\ -a_i(x_i(t; t_0, \phi^*)) & [b_i x_i(t; t_0, \phi^*) - \\ \sum_{j \in N_1} c_{ij} v_j - \sum_{j \in N_2} c_{ij} w_j - \sum_{j, k \in N_1} d_{ijk} v_j v_k - & \\ \sum_{j, k \in N_2} d_{ijk} w_j w_k - \sum_{j \in N_1, k \in N_2} d_{ijk} v_j w_k - & \\ \sum_{j \in N_2, k \in N_1} d_{ijk} w_j v_k - u_i(t)], & \\ \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall t \geq t_0. \end{aligned} \tag{13}$$

所以有

$$\begin{aligned} dx_i(t + \omega; t_0, \phi^*)/dt = & \\ -a_i(x_i(t + \omega; t_0, \phi^*)) & [b_i x_i(t + \omega; t_0, \phi^*) - \\ \sum_{j \in N_1} c_{ij} v_j - \sum_{j \in N_2} c_{ij} w_j - \sum_{j, k \in N_1} d_{ijk} v_j v_k - & \\ \sum_{j, k \in N_2} d_{ijk} w_j w_k - \sum_{j \in N_1, k \in N_2} d_{ijk} v_j w_k - & \\ \sum_{j \in N_2, k \in N_1} d_{ijk} w_j v_k - u_i(t + \omega)] = & \\ -a_i(x_i(t + \omega; t_0, \phi^*)) & [b_i x_i(t + \omega; t_0, \phi^*) - \\ \sum_{j \in N_1} c_{ij} v_j - \sum_{j \in N_2} c_{ij} w_j - \sum_{j, k \in N_1} d_{ijk} v_j v_k - & \\ \sum_{j, k \in N_2} d_{ijk} w_j w_k - \sum_{j \in N_1, k \in N_2} d_{ijk} v_j w_k - & \\ \sum_{j \in N_2, k \in N_1} d_{ijk} w_j v_k - u_i(t)], & \\ \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall t + \omega \geq t_0. \end{aligned} \tag{14}$$

这说明  $x(t + \omega; t_0, \phi^*)$  也是 HOCGNN(1) 初始条件为  $(t_0, \phi^*)$  的一个状态, 因此

$$x(t + \omega; t_0, \phi^*) = x(t; t_0, x_{\phi^*}^{(\omega)}) = x(t; t_0; \phi^*).$$

所以  $x(t; t_0, \phi^*)$  是 HOCGNN(1) 的一个周期为  $\omega$  的周期轨迹. 由式(10) 可知, 带有初始条件  $(t, \phi)$  ( $\phi \in C([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ ) 的 HOCGNN(1) 的任意状态将随  $t \rightarrow \infty$  指数收敛到这一周期轨迹上. 所以, 此孤立的周期轨迹  $x(t; t_0, \phi^*)$  在  $\Theta_2$  中是局部指数周期收敛的, 而且  $\Theta_2$  是  $x(t; t_0, \phi^*)$  的一个局部指数收敛集. 因为  $\Omega_2$  中存在  $2^n$  个区域, 所以存在  $2^n$  个局部指

数收敛的周期轨迹在  $\Omega_2$  内.  $\square$

当外部周期输入  $u_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为常数时, 有如下推论:

**推论 1** 假设系统(1) 满足假设 1, 对于  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall t \geq t_0, u_i(t) \equiv u_i$  (常数), 如果有

$$\begin{aligned} |u_i| < c_{ii} \min\{|v_i|, |w_i|\} - & \\ b_i \max\{|m_i|, |n_i|\} - & \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n |c_{ij}| \max\{|v_j|, |w_j|\} - & \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |d_{ijk}| \Gamma, \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\Gamma = \max\{|v_j v_k|, |w_j w_k|, |v_j w_k|, |w_j v_k|\},$$

则系统(1) 在  $\Omega_2$  内有  $2^n$  个局部指数稳定平衡点.

### 4 数值例子

下面通过一个仿真实例来说明文中结论的有效性. 考虑高阶 Cohen-Grossberg 神经网络如下:

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt = & \\ -a_i(x_i(t)) & [b_i x_i(t) - \sum_{j=1}^3 c_{ij} f_j(x_j(t - 0.6)) - \\ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 d_{ijk} f_j(x_j(t - 0.2)) f_k(x_k(t - 0.2)) - & \\ u_i(t)], \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$f_i(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \xi < -\frac{1}{2}; \\ \frac{5}{6}\xi - \frac{1}{12}, & -\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{3}{4}, & \xi > 1; \end{cases}$$

$$b_i = 1, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$a_1(x_1(t)) = 2 + 0.4 \cos(x_1(t));$$

$$u_1(t) = 0.5 \cos(t);$$

$$a_2(x_2(t)) = 2 + 0.2 \cos(x_2(t));$$

$$u_2(t) = -0.4 \sin(t);$$

$$a_3(x_3(t)) = 1 + 0.5 \cos(x_3(t));$$

$$u_3(t) = 0.8 \cos(t).$$

令  $C = (c_{ij})_{3 \times 3}, D_i = (d_{ijk})_{3 \times 3}; i = 1, 2, 3$ . 设

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 5.6 & 0.1 \\ -0.2 & 0.5 & 6.8 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.3 & 0.1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.3 \\ -0.2 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \\ -0.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

容易验证以上系数满足式(4). 根据定理 1, HOCGNN(16) 有  $2^3 = 8$  个周期环, 且是局部指数收敛的.  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  和  $x_3(t)$  各 80 个随机初始条件

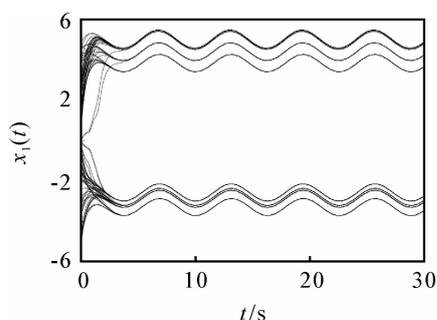


图1 系统状态  $x_1(t)$  的时间响应曲线

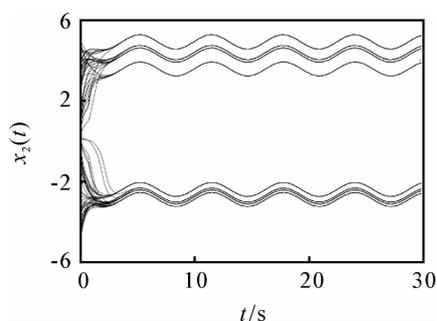


图2 系统状态  $x_2(t)$  的时间响应曲线

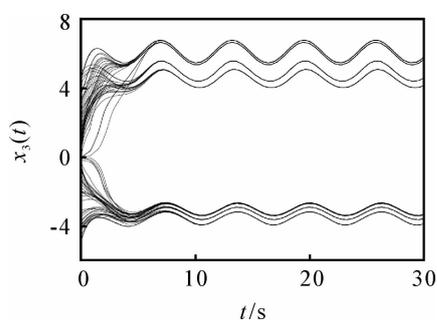


图3 系统状态  $x_3(t)$  的时间响应曲线

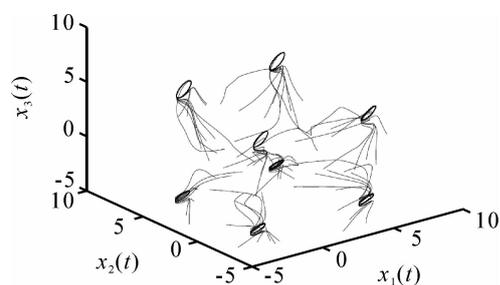


图4 系统状态  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  和  $x_3(t)$  的相位图

下的时间响应曲线分别如图 1~图 3 所示. 图 4 表示  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  和  $x_3(t)$  的相位图.

## 5 结 论

本文研究了一类具有特殊激励函数的高阶 Cohen-Grossberg 神经网络的多周期性问题. 根据该类神经网络激励函数的特性给出了其周期环或平衡点在饱和区内局部指数收敛的充分性判据. 仿真实例表明了所得结论的有效性.

## 参考文献 (References)

- [1] Cohen M, Grossberg S. Absolute stability and global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1983, 13(1): 815-821.
- [2] Huang T, Chan A, Huang Y, et al. Stability of Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays[J]. Neural Networks, 2007, 20(8): 868-873.
- [3] Cao J, Li X. Stability in delayed Cohen-Grossberg neural networks; LMI optimization approach [J]. Physica D, 2005, 212(1/2): 54-65.
- [4] Huang G, Cao J. Multistability in bidirectional associative memory neural networks[J]. Physics Letters A, 2008, 372(16): 2842-2854.
- [5] Zeng Z, Wang J. Multiperiodicity and exponential attractivity evoked by periodic external inputs in delayed cellular neural networks[J]. Neural Computation, 2006, 18(4): 848-870.
- [6] Civalleri P, Gilli M. Practical stability criteria for cellular neural networks[J]. Electronics Letters, 1997, 33(11): 970-971.
- [7] 楼旭阳, 崔宝同, 吴炜. 具漏泄时滞的细胞神经网络多周期性分析[J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 766-770. (Lou X Y, Cui B T, Wu W. Multiperiodicity analysis of cellular neural networks with leakage time lags[J]. Control and Decision, 2008, 23(7): 766-770.)
- [8] Cao J, Feng G, Wang Y. Multistability and multiperiodicity of delayed Cohen-Grossberg neural networks with a general class of activation functions[J]. Physica D, 2008, 237(13): 1734-1749.
- [9] Lou X, Cui B. Novel global stability criteria for high-order Hopfield-type neural networks with time-varying delays[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 330(1): 144-158.
- [10] Gu H, Jiang H, Teng Z. Stability and periodicity in high-order neural networks with impulsive effects[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 68(10): 3189-3200.
- [11] Kosaku Y. Functional analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.