

文章编号: 1001-0920(2009)11-1697-05

## 机器人系统全局渐近稳定非线性 PD+ 轨迹跟踪控制

苏玉鑫<sup>a</sup>, 郑春红<sup>b</sup>

(西安电子科技大学 a. 机电工程学院, b. 电子工程学院, 西安 710071)

**摘要:** 采用一类具有“小误差放大、大误差饱和”功能的非线性饱和函数来改进常用的线性比例-微分加(PD+)机器人系统动力学控制,以形成非线性 PD+(NPD+)控制,从而获得更快的响应速度和轨迹跟踪精度.应用 Lyapunov 直接稳定性理论和 LaSalle 不变性原理证明了闭环系统的全局渐近稳定性.两自由度机器人系统数值仿真结果表明了所提出的 NPD+ 控制具有良好的控制品质.

**关键词:** 机器人控制; 轨迹跟踪; PD 控制; 非线性 PD 控制; 全局渐近稳定性

**中图分类号:** TP242.2

**文献标识码:** A

## Nonlinear PD plus control for global asymptotic tracking of robot manipulators

SU Yu-xin<sup>a</sup>, ZHENG Chun-hong<sup>b</sup>

(a. School of Electro-Mechanical Engineering, b. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China. Correspondent: SU Yu-xin, E-mail: yxsu@mail.xidian.edu.cn)

**Abstract:** A nonlinear proportional-derivative plus (NPD+) robot dynamics control is proposed to give faster response and higher tracking precision over the commonly used linear PD+ control. The proposed NPD+ control is formulated with a new class of nonlinear saturated function with the characteristics of ‘enlargement of small error and saturated in large error’. The global asymptotic stability of the resulting closed-loop system is proved in agreements with Lyapunov direct method and LaSalle invariance principle. Simulations are performed on a two degree-of-freedom (DOF) robot, and the results show the effectiveness and improved performance of the proposed approach.

**Key words:** Robot control; Tracking control; PD control; Nonlinear PD control; Global asymptotic stability

### 1 引言

非线性机器人系统作为一个典型的多输入多输出的非线性系统,已经成为人们研究各种新颖控制算法的一个标称模型<sup>[1]</sup>.作为非线性机器人常用运动形式的轨迹跟踪控制,一直是机器人学与工业自动化领域研究与应用的的重要内容,已引起越来越多研究者的兴趣<sup>[1-4]</sup>.

比例-微分加(PD+)机器人动力学补偿控制策略,虽然早在 1988 年便被提出<sup>[1,5]</sup>,但作为非线性机器人系统全局渐近稳定轨迹跟踪控制的一个基本方法,目前仍是非线性机器人系统全局渐近轨迹跟踪的主要策略,并成为人们获得高质量控制的基础方法<sup>[1]</sup>.传统的 PD+ 控制应用前馈机器人模型动力学补偿来确保系统的全局渐近稳定性,采用线性反

馈 PD 合成控制作用来获得满意的轨迹跟踪性能<sup>[5]</sup>.随着工业自动化水平的不断提高,传统的线性 PD+ 控制并不能满足人们对机器人系统高精度和快速响应的要求.为此,人们提出了大量的改进 PD+ 控制策略,以提高原有线性控制系统的运动精度和控制品质<sup>[6-10]</sup>.Kelly 和 Salgado<sup>[6]</sup>提出 PD 加前馈期望动力学补偿控制来提高传统的 PD+ 控制的运行速度,获得了局部指数稳定的跟踪结果;后来 Santibanez 和 Kelly<sup>[7]</sup>证明了这种 PD 加前馈期望动力学补偿控制的全局渐近稳定性.Loria 和 Nijmeijer<sup>[8]</sup>提出了饱和 PD+ 控制策略来克服驱动器饱和对非线性机器人系统的影响,应用 Lyapunov 直接稳定性理论证明了闭环系统的半全局渐近稳定性.Feng 等<sup>[9]</sup>将不连续的滑模控制技术引入 PD+

**收稿日期:** 2008-12-22; **修回日期:** 2009-03-23.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(50675167); 高等学校全国优秀博士学位论文作者专项资金项目(200535); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目.

**作者简介:** 苏玉鑫(1969—),男,辽宁建昌人,教授,博士生导师,从事机器人控制与自动化等研究; 郑春红(1969—),女,西安人,副教授,博士,从事智能信息处理与自动化的研究.

控制,形成了非奇异的终端滑模控制,实现了非线性机器人系统的有限时间稳定跟踪. Yu 等<sup>[10]</sup>进一步发展了这种 PD+滑模控制策略,设计了连续的终端滑模 PD+控制器,实现了非线性机器人系统的连续有限时间稳定跟踪控制.

本文通过引入一类具有“小误差放大、大误差饱和”功能的非线性饱和函数来提高常用线性 PD+控制的品质,以形成简单的非线性 PD+(NPD+)控制.应用 Lyapunov 直接稳定性理论和 LaSalle 不变性原理,证明了闭环系统的全局渐近稳定性.相比于常用的双曲正切饱和函数,本文提出的一类新的饱和函数具有“小误差放大、大误差饱和”的功能,从而使得所形成的 NPD+控制具有更快的响应速度和更高的轨迹跟踪精度,并能有效克服驱动器饱和带来的潜在影响.二自由度机器人系统的数值仿真结果,验证了所提出的非线性 NPD+控制具有良好的动静态性能.

## 2 机器人系统动力学模型与特性

含  $n$  自由度旋转关节的非线性机器人系统的动力学模型可描述为<sup>[1,11]</sup>

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau. \quad (1)$$

其中:  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbf{R}^n$  分别为关节位置、速度和加速度矢量;  $M(q) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为对称正定惯性矩阵;  $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为各关节线性阻尼摩擦系数矩阵;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为哥氏力和离心力矩阵;  $g(q) \in \mathbf{R}^n$  为重力向量;  $\tau \in \mathbf{R}^n$  为控制力矩矢量.

非线性机器人系统(1)通常具有如下结构特性<sup>[1,11]</sup>:

**特性 1** 线性阻尼矩阵  $D$  为对角正定矩阵且有界,即

$$d_1 I \leq D \leq d_2 I. \quad (2)$$

其中:  $d_1$  和  $d_2$  为已知的正的常数,  $I$  为相应维数的单位矩阵.

**特性 2** 惯性矩阵  $M(q)$  对称正定且有界,即

$$m_1 I \leq M(q) \leq m_2 I, \quad q \in \mathbf{R}^n, \quad (3)$$

其中  $m_1$  和  $m_2$  为已知的正的常数.

**特性 3**  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  为反对称矩阵,即

$$\xi^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \xi = 0, \quad \forall q, \dot{q}, \xi \in \mathbf{R}^n. \quad (4)$$

对于  $C^2$  光滑的连续期望轨迹  $q_d(t)$ , 定义轨迹跟踪误差  $e(t), \dot{e}(t) \in \mathbf{R}^n$  为

$$e = q - q_d, \quad \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d. \quad (5)$$

本文考虑设计一个改进的 NPD+控制律,使得对于任意初始位置  $(q(0), \dot{q}(0))$ , 非线性机器人系统的输出  $(q(t), \dot{q}(t))$  能够渐近稳定地跟踪光滑连续期望轨迹  $(q_d(t), \dot{q}_d(t))$ .

## 3 控制器设计

### 3.1 一类新的饱和函数<sup>[12]</sup>

首先提出如下一类近似势能函数:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(\alpha-1)\delta^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}, & \delta < |x| < \beta; \\ \frac{\delta^{\alpha-1}x^2}{2}, & |x| \leq \delta; \\ \beta^\alpha |x| + \frac{(\alpha-1)\delta^{\alpha+1} - 2\alpha\beta^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}, & |x| \geq \beta. \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\alpha, \delta \in (0, 1]; \beta > \delta$  为设计参数.

将式(6)对  $x$  求导,可得到如下所示的一类非线性饱和函数:

$$s(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sgn}(x), & \delta < |x| < \beta; \\ \delta^{\alpha-1}x, & |x| \leq \delta; \\ \beta^\alpha \operatorname{sgn}(x), & |x| \geq \beta. \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  为标准符号函数.

对于式(6)和(7)所示的  $S(x)$  和  $s(x)$  非线性函数,有如下的引理:

**引理 1** 函数  $S(x)$  和  $s(x)$  有如下性质:

1) 若  $x \neq 0$ , 则  $S(x) > 0$ ; 若  $x = 0$ , 则  $S(x) = 0$  和  $s(x) = 0$ ;

2)  $S(x)$  连续二次可微,  $s(x)$  对于  $x$  而言是单调增函数,且  $|s(x)| \leq \beta^\alpha$ ;

3) 对于  $x \neq 0$ , 存在正常数  $\kappa > 0$ , 使得下式成立:

$$S(x) \geq \kappa s^2(x) > 0; \quad (8)$$

4) 对于  $x \neq 0$ , 存在正常数  $\kappa_1 > 0$ , 使得下式成立:

$$xs(x) \geq \kappa_1 s^2(x) > 0. \quad (9)$$

通过简单的运算即可证明上述性质,详见文献[12].

### 3.2 NPD+控制

为了后续设计和分析方便,首先定义如下矢量:

$$s(\xi) = [s(\xi_1), \dots, s(\xi_n)]^T, \quad \xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T \in \mathbf{R}^n. \quad (10)$$

应用式(10),提出如下的非线性 PD+(NPD+)控制律:

$$\tau = -K_p s(e) - K_d s(\dot{e}) + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + D\dot{q}_d + g(q), \quad (11)$$

其中  $K_p$  和  $K_d$  分别为恒定对角正定的比例和微分增益矩阵.

将 NPD+控制律(11)代入机器人系统方程(1),可得闭环系统的动力学方程

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + K_p s(e) + k_d s(\dot{e}) = 0, \quad (12)$$

其中  $[e^T \quad \dot{e}^T]^T = 0 \in \mathbf{R}^{2n}$  为其唯一静态平衡点。

### 3.3 全局渐近稳定性分析

对于式(11)所示的 NPD+ 控制的闭环系统方程(12),有如下的稳定性定理:

**定理 1** 对于式(1)所示的非线性机器人系统,应用所提出的 NPD+ 控制律(11),可实现闭环系统的位置和速度跟踪误差的全局渐近收敛,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e, \dot{e} = 0$ 。

**证明** 应用 Lyapunov 直接分析方法和 LaSalle 不变性原理来证明上述定理。为此,提出如下的非负候选 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \sum_{i=1}^n k_{pi} S(e_i). \quad (13)$$

其中:  $k_{pi}$  为恒定对角正定矩阵  $K_p$  的第  $i$  个对角线元素,  $e_i$  为式(5)所定义的轨迹跟踪误差适量  $e$  的第  $i$  个分量。

注意到函数  $S(e_i)$  为径向无界函数,且由引理 1 可知,  $S(0) = 0$ 。因此,式(13)所定义的函数是一个径向无界正定函数。

式(13)沿闭环系统(12)对时间求导数,并应用式(6)和(7),可得

$$\dot{V} = \dot{e}^T M(q) \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} + \dot{e}^T K_p s(e). \quad (14)$$

将由式(12)求得的  $M(q)\ddot{e}$  代入式(14),并应用特性 3,可得

$$\dot{V} = -\dot{e}^T D \dot{e} - \dot{e}^T K_d s(\dot{e}). \quad (15)$$

由特性 1 的式(2)和引理 1 的式(9)可得  $\dot{V} \leq 0$ , 并且  $\dot{V} = 0$  意味着  $\dot{e} = 0$ 。根据 LaSalle 不变性原理<sup>[1,11]</sup>可知  $(e = 0, \dot{e} = 0)$  为系统的全局渐近稳定平衡点,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e, \dot{e} = 0$ 。□

### 4 仿真分析

二自由度机器人系统位置控制数值仿真结果验证了上述理论分析的正确性。机器人系统的动力学模型为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -2\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ D &= \text{diag}(\theta_6, \theta_7), \\ g &= \begin{bmatrix} \theta_4 \sin(q_1) + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

并在仿真中考虑非线性库仑摩擦力的影响。为与式(1)所描述的模型一致,令

$$f_c(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \theta_8 \text{sgn}(\dot{q}_1) \\ \theta_9 \text{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

采用国际标准单位。系统参数的具体数值为:  $\theta_1 = 2.351, \theta_2 = 0.084, \theta_3 = 0.102, \theta_4 = 38.465, \theta_5 = 1.825, \theta_6 = 2.288, \theta_7 = 0.175$ 。若  $\dot{q}_1 > 0$ , 则  $\theta_8 = 7.170$ ; 若  $\dot{q}_1 < 0$ , 则  $\theta_8 = 8.049, \theta_9 = 1.724$ 。

采样周期为  $T = 1 \text{ ms}$ 。期望的跟踪轨迹(单位 rad)为

$$q_d(t) = (1.5 \sin(2t)(1 - e^{-0.05t^3}), \sin(3t)(1 - e^{-0.05t^3}))^T,$$

非线性饱和函数的参数为  $\alpha = 0.5, \beta = 1.0, \delta = 0.01$ 。所提出的 NPD+ 控制器的参数确定为

$$K_p = \text{diag}(150, 40), K_d = \text{diag}(90, 20).$$

为了体现比较的公平性,常用的线性 PD+ 控制器的参数与 NPD+ 控制器的参数相同;系统的初值也相同,分别为  $q(0) = (1.0, 5.0)^T, \dot{q}(0) = (-1.0, 1.0)^T$ 。所提出的 NPD+ 控制与传统的 PD+ 控制的位置和速度跟踪误差分别如图 1 所示,所需的驱动力矩如图 2 所示。

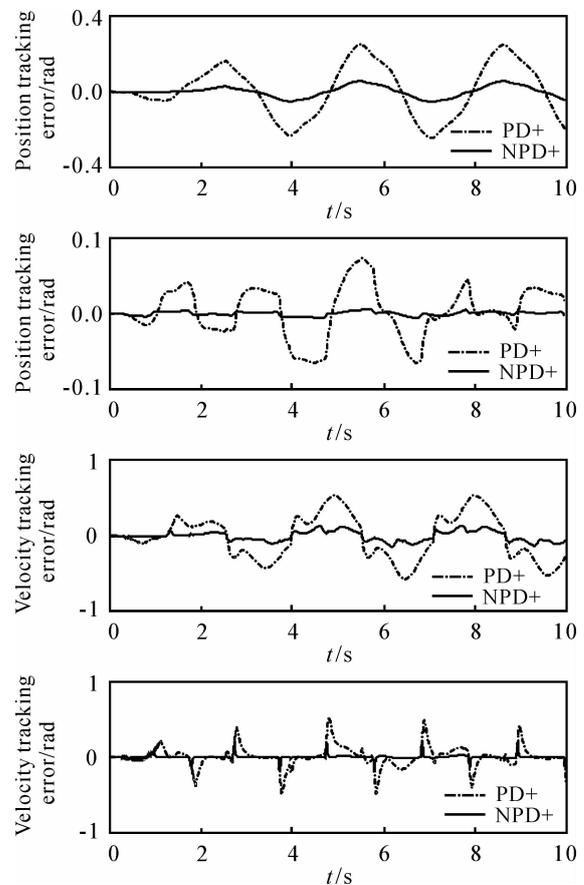


图 1 位置和速度跟踪误差

由仿真结果可以看出,所提出的 NPD+ 控制相比于传统的线性 PD+ 控制具有更快的响应速度和轨迹跟踪精度。另外,从图 2 可以看出,相比于传统的线性 PD+ 控制,所提出的 NPD+ 控制良好的动静性能并不以大幅度增加驱动力矩为代价,这一点十分有助于克服驱动器饱和对运动系统带来的潜

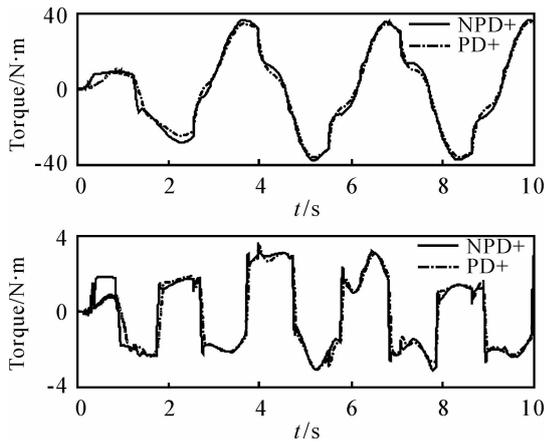


图 2 所需驱动力矩

在影响。

此外,为进一步说明所提出的一类新的饱和函数对系统控制性能的改善,仿真对比如下具有相同稳定性的,使用传统双曲正切函数的非线性 NPD+控制(NPD+Tanh).该 NPD+Tanh 控制的控制律为

$$\tau = -K_p \text{Tanh}(e) - K_d \text{anh}(\dot{e}) + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + D\dot{q}_d + g(q), \quad (18)$$

其中  $\text{Tanh}(\cdot)$  表示由标准双曲正切函数  $\text{tanh}(\cdot)$  构成的矢量。

控制器的参数以及初始状态与上述控制器完全

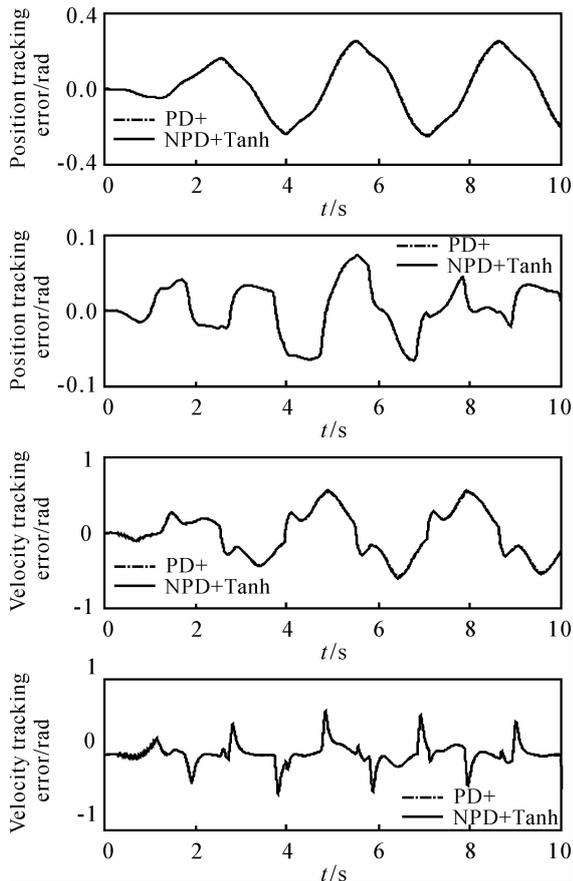


图 3 应用双曲正切函数的位置和速度跟踪误差

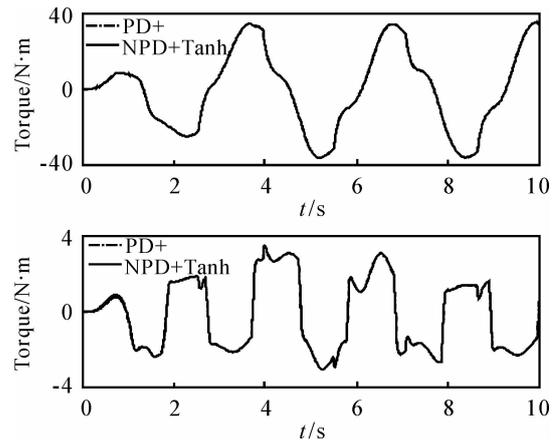


图 4 应用双曲正切函数的驱动力矩

相同,所获得位置和速度跟踪误差如图 3 所示,所需的驱动力如图 4 所示。

由图 3 和图 4 可见,虽然使用传统的双曲正切函数的 NPD+Tanh 控制算法具有同样的全局渐近稳定和位置跟踪性质,但与传统的 PD+控制相比,控制性能并没有明显改善.这主要是由于所提出的一类新的饱和函数具有“小误差放大、大误差饱和”功能.为了更形象地说明所提出的新的饱和函数的这种功能,图 5 给出了传统双曲正切函数 ( $\text{tanh}(e)$ ),线性函数 ( $e$ ) 和所提出的非线性饱和函数 ( $s(e)$ ) 的形态,其中  $s(e)$  的参数为  $\alpha = 0.5, \beta = 1.0, \delta = 0.01$ .从中可以明显看出,所提出的饱和和非线性函数具有“小误差放大、大误差饱和”功能.也就是说,当误差较小时(即当  $|e| \leq \beta$  时),  $|s(e)| \geq |e|$ ;而当误差较大时(即当  $|e| \geq \beta$  时),  $|s(e)| \leq |e|$  且饱和于  $\beta^\alpha$ .其中  $\alpha$  和  $\beta$  为改变误差性态的设计参数.这种“小误差放大、大误差饱和”的非线性饱和函数可以方便地通过选择不同的  $\alpha$  与  $\beta$  值来获得期望的误差性态,而另一个较小的设计参数  $\delta$  则保证其在原点的连续性,避免不连续函数所带来的系统颤振的影响.并且,“小误差放大、大误差饱和”功能将为充分考虑驱动器饱和的输入受限系统的高精度控制品质的提升提供一个良好的基础.通常所应用的诸如双曲正切等饱和函数,在误差较小时,不具有“小误差放大”的功能,使得控制作用较小,而所

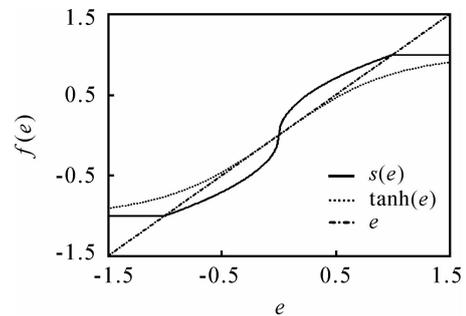


图 5 不同的函数形态

提出的这类新的饱和函数, 将有望大大改善输入受限系统的过渡过程, 有效缩短调整时间。

## 5 结 论

本文引入一类具有“小误差放大、大误差饱和”功能的非线性饱和函数, 以形成算法简单的非线性 PD+(NPD+) 控制策略, 方便有效地提高了传统的线性 PD+ 控制非线性机器人的控制品质。应用 Lyapunov 直接稳定性理论和 LaSalle 不变性原理, 证明了所提出的 NPD+ 控制的全局渐近稳定性。数值仿真结果进一步表明了理论分析结果的有效性和正确性。虽然所提出的 NPD+ 控制策略并不是完全有界的, 但这类具有“小误差放大、大误差饱和”功能的新饱和函数的引用, 使得驱动器饱和的风险大为降低, 可有效地减小驱动器饱和给控制系统带来的潜在影响, 并提高其响应速度。

## 参考文献 (References)

- [1] Lewis F L, Dawson D M, Abdallah C T. Robot manipulator control: Theory and practice [M]. New York: Marcel Dekker, 2004.
  - [2] Arteaga M A, Kelly R. Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results [J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 2004, 20(2): 297-308.
  - [3] Hsu S-H, Fu L-C. A fully adaptive decentralized control of robot manipulators[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1761-1767.
  - [4] 赵杰, 杨永刚, 刘玉斌. 高精度轨迹跟踪的 6-PRRS 并联机器人自抗扰控制研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(7): 791-794.  
(Zhao J, Yang Y G, Liu Y B. 6-PRRS parallel robot of auto-disturbance rejection controller on high-precision trajectory tracking[J]. Control and Decision, 2007, 22(7): 791-794.)
  - [5] Paden B, Panja R. Global asymptotically stable PD+ controller for robot manipulator[J]. Int J of Control, 1988, 47(6): 1697-1712.
  - [6] Kelly R, Salgado R. PD control with computed feedforward of robot manipulators: A design procedure [J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1994, 10(4): 566-571.
  - [7] Santibanez V, Kelly R. PD control with feedforward compensation for robot manipulators: Analysis and experimentation[J]. Robotica, 2001, 19(1): 11-19.
  - [8] Loria A, Nijmeijer H. Bounded output feedback tracking control of fully-actuated Euler-Lagrange systems[J]. Systems and Control Letters, 1998, 33(3): 151-161.
  - [9] Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators [J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167.
  - [10] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.
  - [11] 苏玉鑫. 非线性机器人系统控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
(Su Y X. Control theory for nonlinear robotic manipulators[M]. Beijing: Science Press, 2008.)
  - [12] 苏玉鑫, 郑春红, Müller P C. 非线性机械系统 PID 控制渐近稳定性分析[J]. 自动化学报, 2008, 34(12): 1544-1548.  
(Su Y X, Zheng C H, Müller P C. Asymptotic stability of PID controller for nonlinear mechanical systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(12): 1544-1548.)
- 
- (上接第 1696 页)
- [6] 邱若臻, 黄小原. 具有产品回收的闭环供应链协调模型 [J]. 东北大学学报, 2007, 28(6): 883-886.  
(Qiu R Z, Huang X Y. Coordination model for closed-loop supply chain with product recycling [J]. J of Northeastern University, 2007, 28(6): 883-886.)
  - [7] 郭亚军, 赵礼强, 李绍江. 随机需求下闭环供应链协调的收入费用共享契约研究[J]. 运筹与管理, 2007, 16(6): 15-20.  
(Guo Y J, Zhao L Q, Li S J. Revenue and expense sharing contract on the coordination of closed-loop supply chain under stochastic demand[J]. Operations Research and Management Science, 2007, 16(6): 15-20.)
  - [8] 葛静燕, 黄培清. 基于博弈论的闭环供应链定价策略分析[J]. 系统工程学报, 2008, 23(1): 111-115.  
(Ge J Y, Huang P Q. Price decision analysis for closed-loop supply chain based on game theory [J]. J of Systems Engineering, 2008, 23(1): 111-115.)
  - [9] Gan X H, Sethi S P, Yan H M. Coordination of supply chains with risk-averse agents [J]. Production and Operations Management, 2004, 13(2): 135-149.
  - [10] 索寒生, 金以慧. 两阶段供需链企业间的博弈分析 [J]. 计算机集成制造系统, 2003, 9(7): 546-549.  
(Suo H S, Jin Y H. Research on game in two-stage supply chain enterprises [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2003, 9(7): 546-549.)