文章编号：1001-0920(2009)11-1702-05

一种新的灰色预测模型及其建模机理

崔 杰[1,2]，党耀国[1]，刘思峰[1]
(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 淮阴工学院 经济管理学院，江苏 淮安 223001)

摘 要：为了提高灰色模型的预测精度，并拓展其应用范围，针对具有近似非齐次指数律特征的数据序列，构建了一种新的灰色预测模型 NGM(1,1,k). 通过最小二乘法求出了新灰色模型参数的计算公式，以微分方程作为演绎推理工具，得到了该模型的时间响应序列函数，并对其建模精度进行了理论和实验分析. 研究结果表明了所提出的灰色模型的有效性和适用性.

关键词：灰色系统；灰色预测模型；预测精度；建模机理
中图分类号：N94 **文献标识码**：A

Novel grey forecasting model and its modeling mechanism

CUI Jie[1,2], *DANG Yao-guo*[1], *LIU Si-feng*[1]
(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. College of Economics and Management, Huaiyin Institute of Technology, Huai'an 223001, China. Correspondent: CUI Jie, E-mail: nuaacui2008@163.com)

Abstract: To improve the forecasting accuracy of grey forecasting and broaden its application fields, this paper develops a novel grey forecasting model, termed NGM(1,1,k), which is based on the non-homogeneous dispersion index function, and the formula computing the parameters of the novel grey model is proposed through the least square method. The function of the time response sequence of the novel grey model is solved by taking differential equations as a deductive reasoning tool. The modeling accuracy of the novel grey model is theoretically and experimentally analyzed. Research results show the effectiveness and applicability of the proposed grey NGM(1,1,k) model.

Key words: Grey systems; Grey forecasting model; Simulation accuracy; Modeling mechanism

1 引 言

灰色预测模型作为灰色系统理论的重要组成部分，目前已经在农业、工业、科技、医疗等领域得到了成功的应用，尤其是灰色 GM(1,1)模型，如今已经成为应用最为广泛的灰色预测模型. 然而，该模型的建模精度问题一直备受灰色系统理论研究者的关注[1-3]. 近年来，已有众多学者对灰色模型进行了深入研究，取得了大量的研究成果. 刘思峰等从数据变换，提高原始序列光滑度的角度构建了一系列缓冲算子，并成功地应用于大量受扰动因素冲击的系统预测，取得了良好的建模效果[4-8]；徐涛，刘斌和党耀国等分别从原始序列模拟误差平方和最小，一次累加序列模拟误差平方和最小以及新信息优先利用的角度，对灰色模型的初始条件进行了改进，提高了灰色模型的预测精度[9-11]；王义闹和罗党等分别从改进灰导数白化值与灰导数白化背景值等不同的角度，对灰色模型进行了优化，在一定程度上提高了模型的建模精度[12-14]. 穆勇和谢乃明等从 GM(1,1)模拟齐次指数序列精度的角度出发，分别提出了无偏 GM(1,1)模型以及离散灰色模型. 该模型对具有白指数律特性的原始序列可进行完全拟合[15,16].

上述学者的研究成果对于完善灰色预测理论体系，推动灰色系统理论的发展起到了积极的作用. 然而，众多改进后的灰色模型在实际系统行为特征数

收稿日期：2008-11-16；**修回日期**：2009-02-23.
基金项目：国家自然科学基金项目(709010141,90924022,70473037)；教育部高等学校博士学科点专项基金项目(200802870020)；江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CX08B-039R)；南京航空航天大学科研创新基金项目(Y0811-091)；淮阴工学院科研基金项目.
作者简介：崔杰(1978—)，男，江苏泗阳人，博士生，从事系统工程、管理科学与工程的研究；党耀国(1964—)，男，河南驻马店人，教授，博士生导师，从事灰色系统理论、区域经济学等研究.

据序列的预测应用中，依然常常出现预测效果不甚理想的现象.产生这种现象的根源何在？纵观现有灰色预测模型的研究成果，作者发现目前绝大部分灰色模型的研究成果仅从模型建模参数的角度进行优化研究，即对原模型进行不断地修正，以更好地拟合具有纯指数律特征的数据序列，却忽视了灰色GM(1,1)模型适用的数据序列类型的局限性.从灰色GM(1,1)模型的建模过程可知，它是一种基于累加生成灰指数律的最小二乘建模方式，对具有近似齐次指数律特性的离散数据序列具有理想的拟合预测效果.同理，在GM(1,1)模型基础上改进、演变得到的系列优化的灰色模型和无偏灰色模型以及离散灰色模型，同样仅对具有白指数律的离散数据序列具有较好的模拟预测效果.然而，除了近似齐次指数律数据序列外，现实中还存在大量系统的特征数据序列具有非齐次指数特性，利用仅适用于拟合预测齐次指数律数据序列的灰色模型，去模拟具有非齐次指数律特性的数据序列，常常会出现较大建模误差.

目前，以灰色模型能够模拟预测的数据序列类型与实际系统行为数据序列类型的一致性为目标，对经典灰色GM(1,1)模型进行拓展的研究成果比较鲜见.本文根据经典灰色模型的建模机理，构建了一种基于近似非齐次指数离散函数的新灰色预测模型，利用最小二乘法和矩阵运算法推演出该新灰色模型参数的计算公式，并以微分方程为推理工具，求出了新灰色预测模型的模拟时间响应序列函数.

2　新灰色预测模型 NGM(1,1,k)的构建

无论是GM(1,1)模型，还是优化的GM(1,1)模型以及无偏GM(1,1)模型，其建模的基础都是基于原始序列累加生成后的灰指数律，即原始序列 $x^{(0)}(k)\approx ca^k$，$k=1,2,\cdots,n$.然而，现实中存在大量服从近似非齐次指数增长律的数据序列，因此需要探索基于其他增长规律的数据序列预测模型.下面针对原始数据序列服从近似非齐次指数律

$$x^{(0)}(k)\approx ca^k+b,\ k=1,2,\cdots,n$$

的情形，构建一种灰色 NGM(1,1,k) 预测模型.

定义 1　称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=kb \tag{1}$$

为基于非齐次指数离散函数的灰色预测模型(NGM(1,1,k)).将一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=tb \tag{2}$$

称为 NGM(1,1,k) 模型的白化形式.

定理 1　设原始非负序列为

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\},$$

$$x^{(0)}(i)\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,n.$$

$X^{(0)}$ 的一次累加生成序列为 $X^{(0)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$.其中

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,2,\cdots,n.$$

$X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}=\{z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)\}$.其中

$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)),$$

$$k=2,3,\cdots,n.$$

若 $\hat{a}=[a,b]^{\mathrm{T}}$ 为参数列，且

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 2\\-z^{(1)}(3) & 3\\\vdots & \vdots\\-z^{(1)}(n) & n\end{bmatrix},$$

则 NGM(1,1) 模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=kb$ 的最小二乘估计参数列满足 $\hat{a}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$.

证明　将数据代入 NGM(1,1) 模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=kb$，得

$$x^{(0)}(2)+az^{(1)}(2)=2b,$$
$$x^{(0)}(3)+az^{(1)}(3)=3b,$$
$$\vdots$$
$$x^{(0)}(n)+az^{(1)}(n)=nb,$$

即 $Y=B\hat{a}$.对于 a 和 b 的一对估计值，以 $-az^{(1)}(k)+bk$ 代替 $x^{(0)}(k)$，$k=1,2,\cdots,n$，可得误差序列 $\varepsilon=Y-B\hat{a}$.设

$$s=\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon=(Y-B\hat{a})^{\mathrm{T}}(Y-B\hat{a})=$$
$$\sum_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-bk)^2,$$

使 s 最小的 a 和 b 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial a}=2\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-\\ \qquad bk)z^{(1)}(k)=0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial b}=-2k\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-bk)=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=\dfrac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\sum_{k=2}^{n}kx^{(0)}(k)-}{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k^2\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2-}\rightarrow\\ \qquad\leftarrow\dfrac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k^2\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\right)^2},\\ b=\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k^2}\left[\displaystyle\sum_{k=2}^{n}kx^{(0)}(k)+a\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\right].\end{cases}$$

由 $Y = B\hat{a}$ 得

$$B^{\mathrm{T}}B\hat{a} = B^{\mathrm{T}}Y,\ \hat{a} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y,$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{bmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 & -\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}k^2 \end{bmatrix},$$

$$(B^{\mathrm{T}}B)^{-1} =$$

$$\frac{1}{\sum_{k=2}^{n}k^2\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 - \left(\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\right)^2} \times$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}k^2 & \sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 \end{bmatrix},$$

$$B^{\mathrm{T}}Y = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -z^{(0)}(2) \\ -z^{(0)}(3) \\ \vdots \\ -z^{(0)}(n) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n}kx^{(0)}(k) \end{bmatrix},$$

$$\hat{a} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y =$$

$$\frac{1}{\sum_{k=2}^{n}k^2\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 - \left(\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\right)^2} \times$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}k^2 & \sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n}kx^{(0)}(k) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\sum_{k=2}^{n}kx^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^{n}k^2\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^{n}k^2\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 - \left(\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\right)^2} \\ \dfrac{1}{\sum_{k=2}^{n}k^2}\left[\sum_{k=2}^{n}kx^{(0)}(k) + a\sum_{k=2}^{n}kz^{(1)}(k)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.\ \square$$

定理 2 设 $B, Y, \hat{a}$ 如定理 1 所述. $\hat{a} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$,则:

1) 取 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$,则

$$\hat{x}^{(1)}(k) =$$

$$\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2},$$

$$k = 1, 2, \cdots, n; \tag{3}$$

2) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1),$$

$$k = 2, 3, \cdots, n.$$

证明 令 $x^{(1)}(t) = y, t = x, u = -ay + bx$,则式(2) 可转化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -au + b, \tag{4}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(-au + b)}{-au + b} = -a\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对式(5) 两边同时不定积分,然后化简得

$$-au + b = C_1e^{-ax}, \tag{6}$$

其中 $C_1 = e^{c}$,c 为常数.

将 $x^{(1)}(t) = y, t = x, u = -ay + bx$ 代入式(6),化简得

$$x^{(1)}t = \frac{C_1}{a^2}e^{-at} + \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2}. \tag{7}$$

取 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$,则

$$C_1 = a^2\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{a}.$$

将 C_1 代入式(7),化简可得

$$\hat{x}^{(1)}(t) =$$

$$\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2},$$

$$t = 1, 2, \cdots, n.$$

因此

$$\hat{x}^{(1)}(t) =$$

$$\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2},$$

$$k = 1,2,\cdots,n;$$

$$\hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(k-1) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{x}^{(0)}(i) - \sum_{i=1}^{k-1}\hat{x}^{(0)}(i) = \hat{x}^{(0)}(k),$$

$$k = 2,3,\cdots,n. \qquad \square$$

3　新灰色模型的建模精度分析

3.1　理论分析

GM(1,1) 模型的建模精度一直是众多灰色理论研究者探讨的热点问题之一，但至今仍未得到科学合理的解释. 文献[17] 用纯指数增长序列数据做模拟，得到了如下结论：GM(1,1) 模型具有一定的适用范围，但在进行长期预测时常出现令人意想不到的误差. 下面从 GM(1,1) 模型的时间响应序列式的结构入手，对其进行理论分析，探索长期预测过程中存在较大误差的根源. 通过一次累减生成，得到 GM(1,1) 模型的时间响应序列式的还原式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) =$$

$$(1-\mathrm{e}^{a})\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k-1)}. \tag{8}$$

同理，对 NGM(1,1,k) 模型的模拟时间响应序列式进行还原，得到其模拟还原值形式为

$$\hat{x}^{(0)}(k) =$$

$$(1-\mathrm{e}^{a})\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^{2}}\right)\mathrm{e}^{-a(k-1)} + \frac{b}{a},$$

$$k = 1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

从上述两种灰色模型的时间响应式的结构可以看出，GM(1,1) 模型的模拟时间响应序列式的还原值是具有纯指数增长律特性的数据序列；NGM(1,1,k) 模型的时间响应式的还原值具有近似非齐次指数增长律的特性. 在利用 GM(1,1) 模型进行系统行为数据序列的预测过程中，常常会出现较大的误差，甚至会出现令人难以接受的建模误差，这说明 GM(1,1) 模型的时间响应式还原值的纯指数特性与现实中大量系统行为数据序列的分布特性并非具有一致性. 从理论分析的结果可知，本文提出的 NGM(1,1,k) 模型在一定程度上可以弥补上述缺陷，具有一定的理论价值和应用价值.

为了进一步验证新模型的建模效果，下面用实际系统行为数据序列分别建立 GM(1,1) 模型、无偏 GM(1,1) 模型和 NGM(1,1,k) 模型，并对 3 种模型的建模精度进行对比分析.

3.2　实验分析

以某市 1993 ～ 1999 年的科技经费投入为基础数据来验证本文提出的新灰色预测模型的有效性. 数据序列如下[18]（单位：亿元）：

$$X^{(0)} = (1.05, 2.12, 3.87, 6.78, 11.57, 19.48, 35.62).$$

根据灰色模型的建模要求对原始序列进行光滑性检验（检验过程略）. 计算结果表明，该数据序列基本满足灰色建模的光滑性要求[1]. 下面以 1993 ～ 1998 年的数据为建模数据，以 1999 年数据为（模拟）预测数据，分别建立 GM(1,1) 模型、无偏 GM(1,1) 模型与 NGM(1,1,k) 模型进行模拟预测，得到的结果如表 1 所示.

表 1　3 类灰色预测模型建模效果比较

模　型	平均相对误差 /%	一步预测误差 /%
GM(1,1)	5.13	5.65
无偏 GM(1,1)	4.48	4.73
NGM(1,1,k)	2.68	1.76

从 3 种模型得到的建模结果可以看出，利用经典 GM(1,1) 模型和无偏 GM(1,1) 模型得到的建模误差相对较大. 如平均相对误差，二者都保持在 4% ～ 5%，预测误差也是如此. 而利用新的灰色 NGM(1,1,k) 模型所得到的结果则明显好于其他两种模型，无论是模拟误差还是预测误差，均显著低于前两种模型. 从模型本身所具有的特点进行分析，其原因主要在于：经典 GM(1,1) 模型和无偏 GM(1,1) 模型仅仅对具有近似齐次指数律特性的离散数据序列具有理想的拟合预测效果，对具有非齐次指数特征的数据序列则难以取得比较高的建模精度，而新的 NGM(1,1,k) 模型恰好能够弥补它们的不足，适合具有非齐次指数律特征的系统行为数据序列的模拟预测.

从上述分析过程和结果不难看出，本文新构建的灰色 NGM(1,1,k) 模型，对于灰色预测模型理论体系的拓展而言，是一次有益的尝试，相信它在今后的实际应用中将会得到广泛的关注.

4　结　　论

灰色预测模型是通过对反映数曲线进行模拟，最后利用最小二乘准则求解模型参数的指数拟合模型. 通过研究得到以下结论：1)NGM(1,1,k)模型也是在一次累加生成基础上的最小二乘建模方式，完全符合灰色预测模型的建模机理；2)新的 NGM(1,1,k)模型是基于近似非齐次指数增长律的新灰色预测模型，可称为广义 GM(1,1)模型，是 GM(1,1)模型的拓展，而经典 GM(1,1)模型可看作是 NGM(1,1,k)模型的特例；3)NGM(1,1,k)模型的提出对于灰色预测模型理论体系的拓展具有重要意义.

参考文献(References)

[1] 刘思峰，党耀国，方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 3 版. 北京：科学出版社，2004：1-8.

(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004: 1-8.)

[2] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2002: 23-25.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Technology, 2002: 23-25.)

[3] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 修订版. 武汉:华中科技大学出版社, 2002.
(Deng J L. Grey prediction and grey decision[M]. Revised Edition. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Technology, 2002.)

[4] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27.
(Liu S F. The trap in the prediction of a shock disturbed system and the buffer operator[J]. J of Huazhong University of Science and Technology, 1997, 25(1): 25-27.)

[5] 刘思峰. 缓冲算子及其应用[J]. 灰色系统理论与实践, 1992, 2(1): 45-50.
(Liu S F. Buffer operator and its application[J]. Theories and Practices of Grey System, 1992, 2(1): 45-50.)

[6] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B, et a1. Study on the weakening buffer operators and researches[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(2): 108-111.)

[7] 党耀国, 刘斌, 关叶青. 关于强化缓冲算子的研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(12): 1332-1336.
(Dang Y G, Liu B, Guan Y Q. Study on the strengthening buffer operators[J]. Control and Decision, 2005, 20(12): 1332-1336.)

[8] 崔杰, 党耀国. 一类新的弱化缓冲算子及其应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 741-744.
(Cui J, Dang Y G . Study on a kind of novel weakening buffer operators and its applications[J]. Control and Decision, 2008, 23(7): 741-744.)

[9] 徐涛, 冷淑霞. 灰色系统模型初始条件的改进及应用[J]. 山东工程学院学报, 1999, 13(1): 15-19.
(Xu T, Leng S X. Improvement and application of initial value of grey systems model[J]. J of Shandong Institute of Engineering, 1999, 13(1): 15-19.)

[10] 刘斌, 刘思峰, 翟振杰, 等. GM(1,1)模型时间响应函数的最优化[J]. 中国管理科学, 2003, 11(4): 54-57.
(Liu B, Liu S F, Zhai Z J, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(4): 54-57.)

[11] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 以 $x_{(n)}^{(1)}$ 为初始条件的 GM 模型[J]. 中国管理科学, 2005, 13(1): 132-134.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B. The GM models that $x_{(n)}^{(1)}$ be taken as initial value[J]. Chinese J of Management Science, 2005, 13(1): 132-134.)

[12] 王义闹, 刘开第, 李应川. 优化灰导数白化值的 GM(1,1)建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Y N, Liu K D, Li Y C. GM(1,1) modeling method of optimizing the whiting values of grey derivative [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2001, 21(5): 124-128.)

[13] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[14] 张辉, 胡适耕. GM(1,1)模型的精确解法[J]. 系统工程理论方法应用, 2001, 10(1): 72-74.
(Zhang H, Hu S G. Accurate solution for GM(1,1) model [J]. Systems Engineering Theory Methodology Applications, 2001, 10(1): 72-74.)

[15] 穆勇. 优化灰导数白化值的无偏灰色 GM(1,1)模型[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 13-16.
(Mu Y. An unbiased GM(1,1) model with optimum grey derivative's whitening values [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 13-16.)

[16] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory &Practice, 2005, 25(1): 93-98.)

[17] 刘思峰, 邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 121-124.
(Liu S F, Deng J L. The range suitable for GM(1,1) [J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2000, 20(5): 121-124.)

[18] 中国统计局. 中国统计年鉴[M]. 北京:中国统计出版社,1993-2000.
(The Chinese Statistics Bureau Arranges. Chinese statistics yearbook[M]. Beijing: Chinese Statistics Press, 1993-2000.)