

文章编号: 1001-0920(2009)11-1719-04

## 基于非光滑线性 Lipschitz 连续平面的滑模控制设计

霍鑫, 郑凯, 姚郁

(哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 利用 Filippov 解、Clarke 广义梯度和非光滑 Lyapunov 稳定理论, 对一类滑模面设计为非光滑线性 Lipschitz 连续平面的二阶系统滑模控制问题进行深入讨论. 首先设计控制律, 使闭环系统在有限时间内能够到达所设计的滑模面; 然后证明系统在滑模面上的运动是渐近稳定的. 放宽了对滑模控制中滑模面设计的要求, 提高了所提出设计方法的灵活性, 有利于改善系统性能. 仿真结果验证了所提出设计方法的正确性和有效性.

**关键词:** Lipschitz 连续平面; Filippov 解; 非光滑分析; Clarke 广义梯度

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Sliding mode control design based on nonsmooth linear Lipschitz continuous surface

HUO Xin, ZHENG Kai, YAO Yu

(Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China. Correspondent: HUO Xin, E-mail: huoxin. ieee@gmail. com)

**Abstract:** By utilizing the notion of Filippov solution, Clarke generalized gradient and nonsmooth Lyapunov stability theory, a further discuss on sliding mode control is presented for second-order systems with a nonsmooth linear Lipschitz continuous sliding surface. Firstly, a discontinuous control law is proposed, which drives the trajectories of the closed-loop system reaching the designed surface in finite time. Furthermore, in the framework of Filippov, the asymptotical stability of the trajectories on the linear Lipschitz continuous surface is proved. The sliding mode control is constructed for more general sense, which improves the performance of the closed-loop system. Finally, simulation result shows the effectiveness and correction of the designs.

**Key words:** Lipschitz continuous surface; Filippov solution; Nonsmooth analysis; Clarke generalized gradient

### 1 引言

在滑模控制中, 大都使用非连续的控制律来实现镇定. 首先在状态空间选取一个稳定的滑模面; 然后在滑模面的两边分别设计非连续控制律, 使得系统状态能够到达该滑模面. 由此得到的闭环系统在滑模面上是非连续的, 系统的动态由非连续的向量场决定, 这与滑模面的选取密切相关<sup>[1,2]</sup>. 一般情况下, 滑模面大都设计为光滑曲面, 曲面的光滑性可看作是对设计的一种约束. 如果可用非光滑的曲面代替原来的光滑曲面, 则设计的灵活性将得到提高, 而且可根据设计需要在不同区域采用不同的滑模面来改善系统的动态品质.

文献[3]研究了一类非线性系统的变结构控制, 分析了系统的稳态误差与滑模平面斜率的关系, 并

提出了两种改进的变结构系统滑模平面设计方法, 使变结构系统既满足稳态误差的要求, 又满足平滑控制量的要求. 但该文给出的滑模面是分段设计的, 其控制律依赖于滑模面的选取, 不具有通用性.

Filippov 借助微分包含的概念定义了一种非连续微分方程的解<sup>[4,5]</sup>, 使讨论此类系统的运动轨迹成为可能. 不同于一般微分方程一一映射的概念, Filippov 解考察的是向量场中各状态邻域的信息. 从数学的角度看, 就是用集值映射代替原来的一一映射.

由于向量场的非连续性和滑模面的非光滑性, 系统的 Lyapunov 函数有可能非光滑, 因而有必要引入非光滑分析的概念. 从 Rademacher 的定理可知, 局部 Lipschitz 函数在 Lebesgue 测度意义下几

收稿日期: 2008-12-01; 修回日期: 2009-03-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674043).

作者简介: 霍鑫(1981—), 男, 河北阜平人, 博士生, 从事非光滑控制理论的研究; 姚郁(1963—), 男, 黑龙江北安人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制理论等研究.

乎处处可微<sup>[4]</sup>. 对于这类函数, 可定义 Clarke 广义梯度来分析函数的衰减特性<sup>[6-8]</sup>. 文献[9,10]给出了非光滑 Lyapunov 的稳定理论以及 LaSalle 不变集原理, 而文献[11]则在此基础上对其进行了改进.

本文将在 Filippov 框架下研究一类二阶系统的滑模控制问题, 其中滑模面非光滑但满足 Lipschitz 条件. 通过设计一个非连续控制律, 使闭环系统轨迹在有限时间内能够到达所设计的滑模面. 另外, 利用 Filippov 解的概念和 Lipschitz 曲面的性质, 证明了所选取的滑模面在一定约束条件下是渐近稳定的, 从而保证闭环系统渐近稳定.

## 2 数学基础

### 2.1 Filippov 解

考虑如下系统:

$$\Sigma_n: \dot{x} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in R^n$  表示状态向量, 可测实函数  $f: R^n \times R \rightarrow R^n$  有界且几乎处处有定义.

**定义 1**<sup>[4]</sup> 向量函数  $x(t)$  在时间区间  $[t_0, t_1]$  上是式(1)的 Filippov 解, 若  $x(t)$  绝对连续且对于几乎所有的  $t \in [t_0, t_1]$  满足

$$\dot{x} \overset{\text{a.e.}}{\in} K[f](x), \quad (2)$$

其中

$$K[f](x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}}f(B(x, \delta) - N). \quad (3)$$

这里:  $K[f](x)$  表示 Filippov 集值映射;  $\bigcap_{\mu N = 0}$  表示 Lebesgue 测度为零的所有集合  $N$  的交集;  $\overline{\text{co}}$  表示凸的闭包;  $B(x, \delta) = \{y \in R^n \mid \|y - x\| < \delta\}$ ;  $f(S)$  表示集合  $S$  上函数值  $f(x)$  的集合, 即

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}.$$

**定理 1**<sup>[4]</sup> 设状态空间  $R^n$  被光滑平面  $S(x)$  分为两个区域  $S^+$  和  $S^-$ . 假设向量场  $f$  有界, 且当状态分别从  $S^+$  和  $S^-$  向  $x \in S$  趋近时的极限向量  $f^+(x)$  和  $f^-(x)$  存在.  $N$  为  $S$  的法向量且由  $S^-$  指向  $S^+$ , 设  $f_N^+$  和  $f_N^-$  是向量  $f^+$  和  $f^-$  在  $N$  上的投影. 设向量  $x(t)$  绝对连续且  $x(t) \in S, \forall t \in [t_1, t_2]$ . 假设对于  $\forall t \in [t_1, t_2]$ , 有  $f_N^-(x) \geq 0, f_N^+(x) \leq 0, f_N^-(x) - f_N^+(x) > 0$ . 那么,  $x(t)$  是式(1)的 Filippov 解, 当且仅当对于几乎所有  $t \in [t_1, t_2]$ , 有

$$\dot{x} = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-, \quad \alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}. \quad (4)$$

### 2.2 非光滑分析

若  $V(x)$  在  $x$  的附近满足 Lipschitz 条件, 则  $V$  在  $x$  处的 Clarke 广义梯度<sup>[6]</sup> 定义为

$$\begin{aligned} \partial_C V(x) = \\ \{ \zeta \in R^n : V^\circ(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle, \forall v \in R^n \}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $V^\circ$  是  $V$  在  $x$  处的广义方向导数, 即

$$V^\circ(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x, h \downarrow 0} \frac{V(y + hv) - V(y)}{h}. \quad (6)$$

对于复合函数  $V = g \cdot h$ , 其广义梯度的计算由下面的定理给出, 其中  $h: X \rightarrow R^n$  和  $g: R^n \rightarrow R$  为已知函数,  $h$  的元素为  $h_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**定理 2**<sup>[7]</sup> 若  $h_i$  在  $x$  附近是 Lipschitz 的, 并且  $g$  在  $h(x)$  附近是 Lipschitz 的, 则复合函数  $V$  在  $x$  附近也是 Lipschitz 的, 且有

$$\begin{aligned} \partial_C V(x) \subset \\ \overline{\text{co}} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha \zeta_i : \zeta_i \in \partial_C h_i, \alpha \in \partial_C g(h(x)) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.3 非光滑 Lyapunov 理论

**定理 3**<sup>[10]</sup> (链式法则) 设  $x(t)$  在时间区间上是式(1)的 Filippov 解, 并且  $V: R^n \rightarrow R$  满足 Lipschitz 和正则条件. 那么,  $V(x(t))$  绝对连续, 且  $(d/dt)V(x)$  几乎处处存在, 有

$$\frac{d}{dt} V(x) \overset{\text{a.e.}}{\in} \tilde{V}(x). \quad (8)$$

其中

$$\tilde{V}(x) = \bigcap_{\zeta \in \partial_C V(x)} \zeta^T K[f](x), \quad (9)$$

这里  $\partial_C V: R^n \rightarrow R^n$  表示 Clarke 广义梯度.

**定理 4**<sup>[9]</sup> (广义 Lyapunov 稳定定理) 设  $V: R^n \rightarrow R$ , 对于  $\forall x \neq 0, V(0) = 0$  且  $V(x) > 0$ , 若  $x(t)$  和  $V(x(t))$  在  $[t_0, \infty)$  上同时绝对连续, 且有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) < \\ -\epsilon < 0, \text{ a. e. on } \{t \mid x(t) \neq 0\}, \end{aligned} \quad (10)$$

则  $x(t)$  在有限时间收敛到原点.

## 3 主要结果

考虑二阶系统

$$\Sigma_2: \dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) + u \end{bmatrix} \quad (11)$$

的滑模控制问题, 滑模面设计为非光滑线性 Lipschitz 连续曲面, 如图 1 所示. 首先, 设计控制律使闭环系统轨迹在有限时间到达所设计的滑模面; 然后, 在一定的约束条件下, 证明该表面上的滑模运动是渐近稳定的. 如果以上两点都成立, 则闭环系统是渐近稳定的.

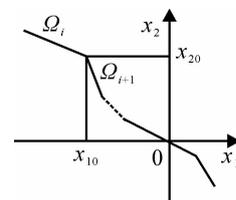


图 1  $R^2$  中的 Lipschitz 曲面

首先,给出非光滑线性 Lipschitz 连续曲面的描述.

设  $D_i \subseteq R^2, i = 1, 2, \dots, r$ , 满足  $\bigcup_{i=1}^r D_i = R^2$ , 且  $D_i \cap D_j = \emptyset$ . 其中:  $i \neq j$  且  $i, j \leq r$ . 在每个独立区域  $D_i$  中定义

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \{x \mid S_i(x) = C_i x + d_i = 0, \\ C_i^T &= [c_{i,1}, c_{i,2}]^T \in R^2, d_i \in R, \\ x &\in D_i, i = 1, 2, \dots, r\}. \end{aligned} \quad (12)$$

将

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^r \Omega_i \quad (13)$$

构成一个单连通集,  $R^2$  空间被  $\Omega$  分成两个单连通域, 分别为

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \bigcup_{i=1}^r \{x \mid S_i(x) > 0\}, \\ \Omega^- &= \bigcup_{i=1}^r \{x \mid S_i(x) < 0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ . 因此,  $\Omega$  为  $R^2$  中的 Lipschitz 连续平面. 设  $\Omega_i$  为第  $i$  个子平面. 为了证明渐近稳定性, 令原点  $0 \in \Omega$ . 为了叙述方便, 定义

$$\Omega = \{x \mid \phi(x) = 0, x \in R^2\}, \quad (15)$$

其中  $\phi(x)$  是 Lipschitz 连续函数.

**定理 5** 令  $M_j = \max_{i \leq r} |c_{i,j}| (j = 1, 2), N = \min_{i \leq r} |c_{i,2}|$ , 且  $c_{i,j} > 0 (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2)$ . 如果满足

$$u = -\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 M_j |f_j(x)| + \epsilon\right) \text{sgn}(\phi(x)), \quad (16)$$

其中  $\epsilon > 0$  是一个任意小的正数, 则系统  $\Sigma_2$  的轨迹在有限时间内到达  $\Omega$ .

**证明** 闭环系统写成微分包含形式为

$$\dot{x} \in K[f](x),$$

其中

$$K[f](x) = \left[ \begin{array}{c} f_1(x) \\ f_2(x) - \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^2 M_j |f_j(x)| + \epsilon\right) \text{SGN}(\phi(x)) \end{array} \right]. \quad (17)$$

这里:  $\text{SGN}(x)$  为集值函数, 即

$$\text{SGN}(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0; \\ \{-1\}, & x < 0; \\ [-1, 1], & x = 0. \end{cases} \quad (18)$$

选取  $V(\phi(x))$  为正定, Lipschitz, 正则函数, 有

$$V(\phi(x)) = |\phi(x)|. \quad (19)$$

假设对于  $1 \leq i < r$ , 区域  $D_i$  与  $D_{i+1}$  是相邻的. 由于  $V(\phi(x))$  是由函数  $g(y) = |y|$  和  $\phi(x)$  构成的复合

函数, 且  $g$  和  $\phi(x)$  满足定理 2 的条件, 令

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi(x)) &= \\ & \left\{ \gamma \text{SGN}(\phi(x)) \mid \gamma \in \left( \lambda \begin{bmatrix} c_{i,1} \\ c_{i,2} \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} c_{i+1,1} \\ c_{i+1,2} \end{bmatrix} \right), 0 \leq \lambda \leq 1, 1 \leq i < r \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

由定理 2 可得  $V$  的 Clarke 广义梯度为

$$\partial_c V(\phi(x)) \subset \Gamma. \quad (21)$$

根据定理 3 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi(x)) &= \bigcap_{\zeta \in \partial V_c(\phi(x))} \zeta^T K[f](x) \subset \\ & \bigcap_{\zeta \in \Gamma(\phi(x))} \zeta^T K[f](x) < -\sigma < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

其中:  $\phi(x) \neq 0, \sigma = \epsilon \min_{0 \leq \lambda \leq 1, i \leq r-1} (\lambda c_{i,2} + (1-\lambda)c_{i+1,2}) > 0$ .

由定理 4 的广义 Lyapunov 稳定定理可知, 对于任意  $x_0 \in R^2$ , 系统状态将在有限时间内到达  $\Omega$ . 特别地, 若  $r = 1$ , 则有

$$\partial V_c(\phi(x)) = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \end{bmatrix} \text{SGN}(\phi(x)). \quad (23)$$

以上结论仍然成立.  $\square$

**定理 6** 对于系统  $\Sigma_2$ , 若  $f_1(x) = x_2$ , 则在 Lipschitz 连续平面  $\Omega$  上的系统轨迹是渐近稳定的.

**证明** 由于  $\Omega = \{x \mid \phi(x) = 0, x \in R^2\}$ , 不失一般性, 考察第  $i$  个子平面  $\Omega_i$ .

$S_i(x) = 0$  意味着  $c_{i,1}x_1 + c_{i,2}x_2 + d_i = 0$ , 若  $S_i(x) = 0$  的法向量为  $N_{S_i} = [c_{i,1}, c_{i,2}]^T$ , 则

$$\begin{aligned} f_N^+ &= c_{i,1}f_1(x) + c_{i,2}f_2(x) - \frac{c_{i,2}}{N}M_1 |f_1(x)| - \\ & \frac{c_{i,2}}{N}M_2 |f_2(x)| - c_{i,2}\epsilon < 0, \\ f_N^- &= c_{i,1}f_1(x) + c_{i,2}f_2(x) + \frac{c_{i,2}}{N}M_1 |f_1(x)| + \\ & \frac{c_{i,2}}{N}M_2 |f_2(x)| + c_{i,2}\epsilon > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

因此, 由定理 1 及式(4)可知,  $\Omega_i$  是一个滑模面, 当  $f_1(x) = x_2$  时, 在 Filippov 意义下满足如下微分方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) = -\frac{c_{i,1}}{c_{i,2}}x_1 - \frac{d_i}{c_{i,2}}, \\ \dot{x}_2 = -\frac{c_{i,1}}{c_{i,2}}x_2. \end{cases} \quad (25)$$

不失一般性, 假设

$$\begin{aligned} \Omega_i &\subset \{y \mid y = [y_1, y_2]^T, y_1 < 0, \\ & y_2 > 0, y \in R^2\}. \end{aligned}$$

由于  $\Omega$  连续, 令  $\hat{x}_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$  是  $\Omega_i$  和  $\Omega_{i+1}$  的公共点 (如图 1 所示), 则  $c_{i,1}x_{10} + c_{i,2}x_{20} + d_i = 0 (0 \geq x_{10}$

$\geq x_1, 0 \leq x_2 \leq x_2$ ). 选取 Lyapunov 函数为  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ , 有

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{c_{i,1}}{c_{i,2}}x_2^2 < 0, x_2 \neq 0. \quad (26)$$

由此定理得证.  $\square$

由定理 5 和定理 6 可得以下推论:

**推论 1** 若系统  $\Sigma_2$  满足  $c_{i,j} > 0 (i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2), f_1(x) = x_2$ , 则  $M_j = \max_{i \leq r} |c_{i,j}| (j = 1, 2), N = \min_{i \leq r} |c_{i,2}|$ . 若控制律设计如式(16), 则闭环系统渐近稳定.

### 4 数值仿真

**算例 1** 通过一个数值例子验证定理 5 和定理 6 的结论. 设二阶系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}. \quad (27)$$

定义  $\Omega$  为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \{x \mid S_1(x) = 1.2x_1 + x_2 + 0.8 = 0, \\ \quad x_1 \leq -1\}, \\ \Omega_2 = \{x \mid S_2(x) = x_1 + 4x_2 - 0.6 = 0, \\ \quad -1 \leq x_1 \leq -0.2\}, \\ \Omega_3 = \{x \mid S_3(x) = x_1 + x_2 = 0, \\ \quad -0.2 \leq x_1 \leq 0.4\}, \\ \Omega_4 = \{x \mid S_4(x) = x_1 + 8x_2 + 2.8 = 0, \\ \quad 0.4 \leq x_1 \leq 1.2\}, \\ \Omega_5 = \{x \mid S_5(x) = x_1 + 2x_2 - 0.2 = 0, \\ \quad 1.2 \leq x_1\}. \end{array} \right. \quad (28)$$

于是  $M_1 = 1.2, M_2 = 8, N = 1$ . 取  $\epsilon = 1$ , 则

$$u = -(1.2 |x_2| + 1) \operatorname{sgn}(\phi(x)). \quad (29)$$

设系统初值分别为  $[-1.6, 0.8]^T, [-0.6, -0.4]^T, [0.3, 0.3]^T$  和  $[1.8, -1.2]^T$ , 仿真结果如图 2 所示. 由图可以看出, 在不同初值情况下, 系统轨迹在有限时间内到达所设计的滑模面, 并渐近稳定于原点.

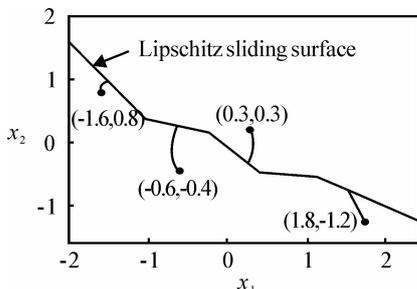


图 2 系统相轨迹

**算例 2** 通过一个数值例子来验证文中给出的结果能够改善系统的性能. 设二阶系统同式(27).

分别选取以下 3 个滑模面:

1) 定义  $\Omega$  为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \{x \mid S_1(x) = x_1 + 6x_2 - 5.5 = 0, \\ \quad x_1 \leq -0.5\}, \\ \Omega_2 = \{x \mid S_2(x) = 2x_1 + x_2 = 0, \\ \quad -0.5 \leq x_1 \leq -0.5\}, \\ \Omega_3 = \{x \mid S_3(x) = x_1 + 6x_2 + 5.5 = 0, \\ \quad 0.5 \leq x_1\}; \end{array} \right. \quad (30)$$

2) 定义

$$\Omega = \{x \mid S(x) = 2x_1 + x_2 = 0\}; \quad (31)$$

3) 定义

$$\Omega = \{x \mid S(x) = x_1 + 6x_2 = 0\}. \quad (32)$$

取  $\epsilon = 1$ , 设系统初值为  $[-2, -1]^T$ , 系统时间响应曲线如图 3 所示. 通过比较可以看出, 在相同初值条件下, 若滑模面斜率小, 则系统响应过程缓慢; 若滑模面斜率大, 则从初始值到达滑模面的过渡时间长, 不利于发挥滑模控制鲁棒性强的特点. 然而选用本文的设计方法, 可弥补上述二者的不足, 提高系统的性能.

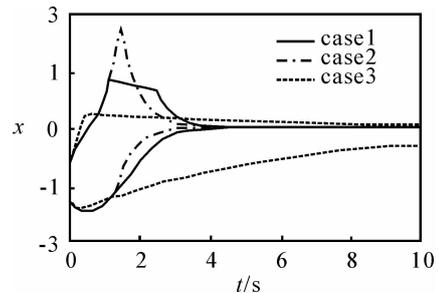


图 3 系统时间响应比较

### 5 结论

本文对滑模控制中滑模面的选择进行了深入讨论, 所设计的滑模面只需满足 Lipschitz 条件. 该方法放宽了滑模面的选择范围, 提高了设计的灵活性. 针对二阶系统, 首先设计了非连续控制律, 在该控制律作用下, 系统状态在有限时间内能够到达非光滑的滑模面; 然后在一定约束条件下, 证明了滑模面上的运动是渐近稳定的, 整个证明过程基于 Filippov 解的概念、Clarke 广义梯度和非光滑 Lyapunov 稳定理论; 最后, 通过仿真算例验证了本文的结论. 本文结论还可扩展到  $n$  维系统的滑模控制设计中, 对此可作更深入的研究.

### 参考文献 (References)

[1] Utkin V I. Sliding modes in control and optimization: Communications and control engineering [M]. New York: Springer Verlag, 1992.