文章编号：1001-0920(2009)11-1740-04

一类输入受限不确定时滞系统的准 Min-Max 模型预测控制

秦伟伟[1,2]，郑志强[1]，刘 刚[2]，李文强[1]

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院，长沙 410073；2. 第二炮兵工程学院 自动控制系，西安 710025)

摘 要：针对一类输入受限离散不确定时滞系统，提出一种基于准 Min-Max 的模型预测控制器设计方法. 定义了时滞系统的鲁棒性能指标，给出了系统稳定的充分条件，通过求解 LMI 凸优化获得控制器. 准 Min-Max 预测控制将当前控制量作为独立优化变量，与其他作为反馈控制的时域控制序列分开处理，有效地降低了算法的保守性，提高了可行性. 仿真算例验证了所提出控制方法的有效性.

关键词：不确定时滞系统；准 Min-Max；模型预测控制；线性矩阵不等式

中图分类号：TP273 **文献标识码**：A

Quasi-Min-Max MPC algorithms for uncertain time-delay systems with input constraints

QIN Wei-wei[1,2], *ZHENG Zhi-qiang*[1], *LIU Gang*[2], *LI Wen-qiang*[1]

(1. College of Machtronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China; 2. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering Institution, Xi'an 710025, China. Correspondent: QIN Wei-wei, E-mail: qww_1982@163.com)

Abstract: A robust model predictive controller (MPC) based on quasi-min-max MPC is developed for a discrete-time uncertain time-delay system with input constraints. A robust performance index is defined and the sufficient conditions of stability are presented for the time-delay system, and the controller is obtained by convex optimization involving LMIs. In the quasi-min-max MPC algorithm, the first control moves as a free decision variable and is separated from the rest of control moves governed by a feedback law, which reduces the conservatism of the algorithm and improves the feasibility effectively. The digital simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Uncertain time-delay systems; Quasi-Min-Max; Model predictive control; Linear matrix inequalities

1 引 言

模型预测控制(MPC)，又称为滚动时域控制(RHC)，是一种备受关注的控制策略[1-4]. MPC 是在每个采样时刻，在线求解有限或无限时域目标函数的优化解，进而得到当前控制量作用于被控对象. 它的最大优点是具有处理状态和输入控制量等硬约束能力.

Min-Max 是鲁棒预测控制的主要方法之一. 对于不确定 Min-Max MPC，文献[5]分别以多面体系统和范数有界系统描述不确定系统，提出了一种基于 LMI 理论的鲁棒 MPC 综合方法，将 Min-Max 问题转化为包含 LMI 的 Min 问题；[6]在[5]的基础上，将鲁棒预测控制应用到时滞不确定系统；[7-9]则对时滞系统的模型预测控制进行了进一步研究. 但是，Min-Max 鲁棒预测控制在整个预测时域采用相同的状态反馈律，具有保守性，而采用准 Min-Max(Quasi-Min-Max)鲁棒预测控制，则将鲁棒性能指标上界分为两部分：第 1 步指标与剩余指标之和，即将当前控制量 $u(k|k)$ 作为自由优化决策变量，其余时域控制序列作为反馈控制量，以降低保守性，提高设计可行性[1,10,11].

本文针对一类离散不确定时滞系统，提出一种基于准 Min-Max 的鲁棒预测控制器设计方法，用 LMI 解决时滞系统的不确定性和控制输入受约束，给出了鲁棒性能指标上界，并证明了系统稳定的充分条件. 数值仿真实验结果验证了所提出算法的有

收稿日期：2009-01-07；**修回日期**：2009-04-08.

基金项目：国家 863 计划项目(2007AA042256).

作者简介：秦伟伟(1982—)，男，安徽淮北人，博士生，从事模型预测控制及其应用的研究；郑志强(1964—)，男，湖南常德人，教授，博士生导师，从事精确制导与控制等研究.

效性. 该方法相对于 Min-Max 鲁棒预测控制策略，不仅提高了系统收敛速度，而且降低了鲁棒性能指标上界.

2　问题描述

考虑一类可观测可镇定的输入受约束离散不确定时滞系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ A(k)x(k) + A_d(k)x(k-d) + B(k)u(k), \\ x(k) = \phi(k), \\ \| u(k) \|_2 \leqslant u_{\max}, \\ -d \leqslant k \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$A(k) = A + \Delta A(k)$，$A_d(k) = A_d + \Delta A_d(k)$，$B(k) = B + \Delta B(k)$；$x(k) \in R^n$ 为系统状态；$u(k) \in R^m$ 为系统控制输出；d 为系统滞后时间常数；$\phi(k)$ 为初始向量；ΔA，ΔA_d，ΔB 为时变不确定矩阵，满足如下范数有界要求：

$$[\Delta A, \Delta B] = H_1 F_1(\cdot)[E_1, E_3],$$
$$\Delta A_d = H_2 F_2(\cdot) E_2. \tag{2}$$

式中：H_i 和 E_i 为适当维常数矩阵，且满足 $F_i^{\mathrm{T}}(k)F_i(k) \leqslant I$，$i = 1, 2$，$I$ 为单位矩阵；A，A_d 和 B 为标称矩阵.

3　准 Min-Max 模型预测控制

考虑如下的无限时域性能指标，表示为以下两部分：

$$\begin{aligned} &J_0^{\infty}(k) = \\ &\sum_{i=0}^{N_0} x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} Q_1 x(k+i \mid k) + \\ &u(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} R x(k+i \mid k) + \\ &\sum_{i=N_0+1}^{\infty} x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} Q_1 x(k+ \\ &i \mid k) + u(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} R x(k+i \mid k) = \\ &J_0^{N_0} + N_{N_0+1}^{\infty}(k). \end{aligned} \tag{3}$$

式中：Q_1 和 R 为正定矩阵，$x(k+i \mid k)$ 表示基于测量值 $x(k)$ 在 $k+i$ 时刻的预测状态，$u(k+i \mid k)$ 表示 k 时刻第 i 步的预测控制. 本文所采用的算法设定 $N_0 = 0$，因此无限时域的性能指标变换为如下形式：

$$\begin{aligned} J_0^{\infty}(k) = & x(k \mid k)^{\mathrm{T}} Q_1 x(k \mid k) + \\ & u(k \mid k)^{\mathrm{T}} R x(k \mid k) + J_1^{\infty}. \end{aligned}$$

在每个采样时间 k，极小化极大性能指标

$$\min_{U_0^{\infty}(k)} \max_{[A(k), A_d(k), B(k)]} J_0^{\infty}.$$

控制序列表示为

$$U_0^{\infty} = [u(k \mid k), U_1^{\infty}]. \tag{4}$$

其中 $u(k \mid k)$ 表示当前控制量，作用于被控对象；其他预测控制序列 U_1^{∞} 表示成如下状态反馈形式：

$U_1^{\infty}(k)$：

$$\{u(k+i \mid k) = F(k)x(k+i \mid k), i \geqslant 1\}.$$

首先确定 J_1^{∞} 极大性能指标上界. 构造系统(1)的离散 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$\begin{aligned} &V(x(k)) = \\ &x(k)^{\mathrm{T}} P x(k) + \sum_{j}^{d} x(k-j)^{\mathrm{T}} S x(k-j), \\ &P = P^{\mathrm{T}} > 0, S = S^{\mathrm{T}} > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

$V(x(k))$ 即为包含时滞状态的鲁棒性能指标上界. 为保证鲁棒性能上界存在，必须满足下面不等式：

$$\begin{aligned} &V(x(k+i+1 \mid k)) - V(x(k+i \mid k)) \leqslant \\ &-[x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} Q_1 x(k+i \mid k) + \\ &u(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} R x(k+i \mid k)]. \end{aligned} \tag{6}$$

当系统渐近稳定时，有 $V(x(\infty \mid k)) = 0$. 将式(6)从 $i = 1$ 到 $i = \infty$ 迭加，得

$$\begin{aligned} &\max_{[A(k), A_d(k), B(k)]} J_1^{\infty}(k) \leqslant V(x(k+1 \mid k)) = \\ &x(k+1 \mid k)^{\mathrm{T}} P x(k+1 \mid k) + \\ &\sum_{j=1}^{d} x(k-j+1)^{\mathrm{T}} S x(k-j+1), \end{aligned}$$

则准 Min-Max 二次型性能指标上界 J_0^{∞} 等价于第 1 步指标与上界 J_1^{∞} 之和的极小化，即

$$\begin{aligned} \min_{u(k|k), U_1^{\infty}(k), P, S} \quad & x^{\mathrm{T}}(k \mid k) Q_1 x(k \mid k) + \\ & u^{\mathrm{T}}(k \mid k) R u(k \mid k) + \\ & x^{\mathrm{T}}(k+1 \mid k) P x(k+1 \mid k) + \\ & \sum_{j=1}^{d} x^{\mathrm{T}}(k+1-j) S x(k+1-j). \end{aligned} \tag{7}$$

输入受限不确定时滞系统的准 Min-Max 模型预测控制算法是在满足系统(1)，不等式约束(6)和控制律(4)等条件下，优化式(7).

4　主要结果

引理 1[6]　对于任意 $Z, Y \in R^n$，以及任意对称正定矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$，有

$$2Z^{\mathrm{T}} P Y \leqslant Z^{\mathrm{T}} P Z + Y^{\mathrm{T}} P Y. \tag{8}$$

引理 2[6]　假设 A，D，E，F 为适当维数且满足 $\| F \| < 1$，则对于任意对称矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$，以及 $\varepsilon > 0$，使得 $P - \varepsilon D D^{\mathrm{T}} > 0$，有

$$\begin{aligned} &(A + DFE)^{\mathrm{T}} P^{-1} (A + DFE) < \\ &A^{\mathrm{T}} (P - \varepsilon D D^{\mathrm{T}})^{-1} A + \frac{1}{\varepsilon} E^{\mathrm{T}} E. \end{aligned} \tag{9}$$

定理 1　设 $x(k \mid k)$ 是系统(1)在采样 k 时刻的状态测量值，采用控制律(4)，$F = YQ^{-1}$，则实现系统鲁棒稳定的充分条件是存在变量 $\gamma > 0$，$Q > 0$，$W > 0$，$\Lambda_1 > 0$，$\Lambda_2 > 0$，$u(k \mid k)$，Y，满足下面的 LMI(11) ～ (17) 约束的优化问题：

$$\min_{\gamma, u(k|k), \Lambda_1, \Lambda_2, Q, Y, W} \gamma. \tag{10}$$

s. t.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * \\ Q_1^{0.5} x(k \mid k) & \gamma I & * & * & * & * & * \\ R^{0.5} u(k \mid k) & 0 & \gamma I & * & * & * & * \\ x(k+1 \mid k) & & 0 & Q & * & * & * \\ x(k \mid k) & & & 0 & W & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & * \\ x(k-d+1 \mid k-d+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W \end{bmatrix} > 0. \tag{11}$$

式中

$$x(k+1 \mid k) = Ax(k \mid k) + A_d x(k-d \mid k-d) + Bu(k \mid k); \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5W & * & * \\ E_2 W & \Lambda_2 & * \\ A_d W & 0 & Q - \Lambda_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} > 0; \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5Q & * & * & * & * & * \\ Q_1^{0.5} Q & 2\gamma & * & * & * & * \\ R^{0.5} Y & 0 & 2\gamma & * & * & * \\ Q & \vdots & 0 & 2W & * & * \\ E_1 Q + E_3 Y & & \vdots & 0 & \Lambda_1 & * \\ AQ + BY & 0 & 0 & 0 & 0 & Q - \Lambda_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} > 0; \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & * \\ u(k \mid k) & I \end{bmatrix} \geqslant 0; \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & * \\ Y^{\mathrm{T}} & Q \end{bmatrix} \geqslant 0; \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ H_i^{\mathrm{T}} & \Lambda_i^{-1} \end{bmatrix} > 0,\ i = 1, 2. \tag{17}$$

证明　求解式(10)的优化问题,即优化式(7):

$$\min_{\gamma, u(k|k), Q, W, \Lambda_1, \Lambda_2} \gamma.$$

s. t.

$$x^{\mathrm{T}}(k \mid k) Q_1 \gamma^{-1} x(k \mid k) + u^{\mathrm{T}}(k \mid k) R \gamma^{-1} u(k \mid k) + x^{\mathrm{T}}(k+1 \mid k) \cdot P \gamma^{-1} x(k+1 \mid k) + \sum_{j=1}^{d} x^{\mathrm{T}}(k+1-j) S \gamma - 1 x(k+1-j) \leqslant 1.$$

令 $Q = \gamma P^{-1} > 0$, $W = \gamma S^{-1} > 0$,利用 Schur 补分解,即可得到 LMI(11).

稳定性约束.引入无记忆状态反馈律 $U_1^{\infty}(k)$:$\{u(k+i \mid k) = F(k) x(k+i \mid k), i \geqslant 1\}$,并将式(1)代入(6).令

$$\Delta V(x(k+i \mid k)) = V(x(k+i+1 \mid k)) - V(x(k+i \mid k)) \leqslant -[x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} Q_1 x(k+i \mid k) + u(k+i \mid k)^{\mathrm{T}} R x(k+i \mid k)].$$

通过变量替换,根据引理 1,引理 2 和 Schur 补分解,可得到 LMI(13),(14) 和(17)[6].

输入约束.与文献[6]的不同之处在于需要单独考虑独立变量的约束问题.因此,输入受限表示为

$$\| u(k \mid k) \|_2 \leqslant u_{\max},$$
$$\| u(k+i \mid k) \|_2 \leqslant u_{\max}.$$

对于 $\| u(k \mid k) \|_2 \leqslant u_{\max}$,等价于

$$\sigma_{\max}(u(k \mid k)) \leqslant u_{\max} \Leftrightarrow u^{\mathrm{T}}(k \mid k) u(k \mid k) < u_{\max} I.$$

利用 Schur 补分解,即得到 LMI(15).对于 $\| u(k+i \mid k) \|_2 \leqslant u_{\max}, i \geqslant 1$,根据

$$u(k+i \mid k) = Fx(k+i \mid k),\ F = YQ^{-1},$$

利用 Schur 补分解得到 LMI(16).□

定理 2(鲁棒稳定)　从定理 1 得到的当前控制量 $u(k \mid k)$ 和状态反馈控制序列

$$U_1^{\infty}(k): \{u(k+i \mid k\} = Fx(k+i \mid k), i \geqslant 1\},$$

在 k 时刻按滚动时域控制,则能够保证闭环系统(1)是鲁棒渐近稳定的.

证明　从前述推导可知,采用该控制方法时系统是鲁棒渐近稳定的.定义候选 Lyapunov 函数

$$\Phi(k+i \mid k) = x^{\mathrm{T}}(k \mid k) Q_1 x(k \mid k) + u^{\mathrm{T}}(k \mid k) \cdot Ru(k \mid k) + x^{\mathrm{T}}(k+i \mid k) P x(k+i \mid k) + \sum_{j=1}^{d} x^{\mathrm{T}}(k+i-j) S x(k+i-j).$$

从前面的推导可以得到

$$\Phi(k+i \mid k) \geqslant 0,$$
$$\Phi(k+1+i \mid k) - \Phi(k+i \mid k) \leqslant 0,$$

满足 Lyapunov 稳定条件,因此该控制器可以保证系统鲁棒渐近稳定.□

5　仿真算例

为了验证本文所设计控制器的有效性,以文献[6]中给出的离散不确定时滞系统为例进行仿真,模型如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.3 \end{bmatrix},\ H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$E_1 = [0.2 \quad 0.3]$，$E_2 = [0.2 \quad 0.1]$，

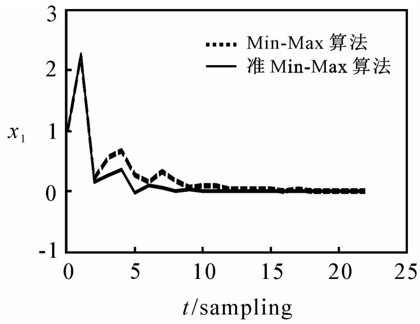
$E_3 = 0.9$，$F_1(k) = \sin(k)$，

$d = 2$，$F_2(k) = \cos(k)$，

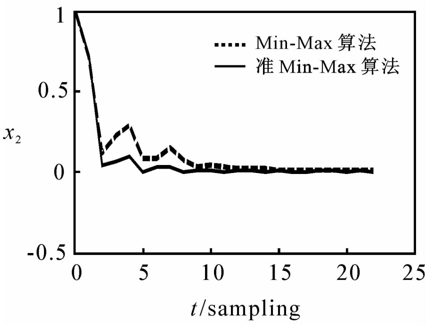
$x(-2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$x(-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

$Q = I$，$R = 1$，$|u|^2 \leqslant 2$.

仿真结果如图 1 ～ 图 3 所示，实线表示本文设计的控制器，虚线表示文献[6]设计的控制器.



(a) 状态变量 x_1 变化曲线



(b) 状态变量 x_2 变化曲线

图 1　状态变量的轨迹曲线

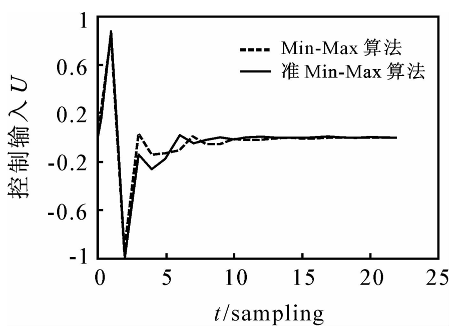


图 2　控制输入

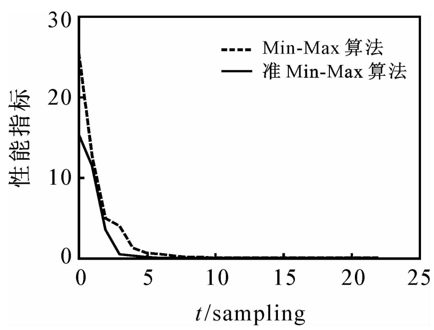


图 3　性能指标

仿真结果表明，两种方法均可保证闭环系统的渐近稳定. 本文所采用的方法具有以下优点：

1）基于准 Min-Max 的鲁棒预测控制器不仅保证了闭环系统渐近稳定，而且具有较快的收敛速度.

2）从图 3 中控制量的变化曲线可知，控制器控制作用满足输入约束要求.

3）图 4 表明，该最优控制策略的性能指标小于 Min-Max 的性能指标，降低了保守性.

4）本文算法较文献[6]的方法具有更大的稳定域. 实验结果表明，采用本文方法可以取到 $H_1 = H_2 = [0.32 \quad 0.32]^{\mathrm{T}}$，而 Min-Max 方法 H_1 和 H_2 最大可取到 $[0.27 \quad 0.27]^{\mathrm{T}}$.

6　结　　论

本文将准 Min-Max 鲁棒预测控制算法扩展到不确定性时滞系统，针对一类输入受限离散不确定时滞系统，设计了准 Min-Max 模型预测控制器，并给出了系统鲁棒渐近稳定的充分条件. 仿真结果验证了该方法的有效性. 与文献[6]中的 Min-Max 鲁棒预测控制算法相比，本文方法在收敛速度和鲁棒性能指标等方面均得到了提高，从而表明对于时滞不确定系统，准 Min-Max MPC 是一种有效的模型预测控制设计方法.

参考文献（References）

[1] 席裕庚，李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. 自动化学报，2008，34(10)：1225-1234.
(Xi Y G，Li D W. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. Acta Automatica Sinica，2008，34(10)：1225-1234.)

[2] 郑鹏远，席裕庚，李德伟. 一种改进的鲁棒模型预测控制器的综合设计方法[J]. 控制与决策，2008，23(9)：1041-1044.
(Zheng P Y，Xi Y G，Li D W. Improved synthesis approach of robust constrained model predictive controller[J]. Control and Decision，2008，23(9)：1041-1044.)

[3] Mayne D Q，Seron M M，Rakovic S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. Automatica，2005，41(2)：219-224.

[4] 何德峰，薛美盛，季海波. 约束非线性构造性模型预测控制[J]. 控制与决策，2008，23(11)：1301- 1310.
(He D F，Xue M S，Ji H B. Constructive model predictive control for constrained nonlinear systems[J]. Control and Decision，2008，23(11)：1301-1310.)

[5] Kothare M V，Balakrishnan V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica，1996，32(10)：1361-1379.

（下转第 1748 页）