文章编号：1001-0920(2009)11-1749-04

一类动态互联复杂系统的稳定性分析

欧阳鑫玉[1,2]，陈雪波[2]
(1. 大连理工大学 电子与信息工程学院，辽宁 大连 116024；
2. 辽宁科技大学 电子与信息工程学院，辽宁 鞍山 114051)

摘　要：通过引入动态图及动态邻接矩阵相关理论，对具有动态互联信息结构约束的复杂系统进行描述和建模，并引入 Lotka-Volterra 方程作为该系统的动态互联信息结构模型. 根据李雅普诺夫方法，对系统的动态互联模型进行了详细分析，研究了非负定限内联结平衡的设定及其渐近稳定条件，进而研究了整个系统的稳定条件. 最后得到了该类动态互联复杂系统联结稳定及整个系统稳定的相关结论.

关键词：复杂系统；动态互联；稳定性；系统建模；动态图
中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

Stability analysis for a class of complex system with dynamic interconnection

OUYANG Xin-yu[1,2], *CHEN Xue-bo*[2]
(1. School of Electronics and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Electronics and Information Engineering, Liaoning University of Science and Technology, Anshan 114051, China. Correspondent: OUYANG Xin-yu, E-mail: ouyangxinyu@sohu.com)

Abstract: By using the correlative theories of dynamic graphs and dynamic adjacency matrix, a modeling method of a complex system with dynamic interconnected information structure is considered. The Lotka-Volterra equation is introduced as the dyanmic interconnected model of this system. In the framework of Lyapunov method, the connective equilibrium in the nonnegative orthant and its asymptotically stable conditions are researched. Then the stable conditions of overall system are studied. Finally, the correlative conclusions about connective stability and system stability are obtained.

Key words: Complex systems; Dynamic interconnection; Stability; Systems modeling; Dynamic graphs

1 引　　言

复杂性研究是 21 世纪的一门新兴学科，探索研究复杂性正成为当代科学研究最具革命性的前沿课题. 复杂性的表现载体是复杂系统[1]. 复杂系统是由大量元素(或子系统)组成的，其元素之间及元素与其环境之间具有相互作用[2]，人们将元素(子系统)之间的这种相互作用称为互联(或称关联). 目前，具有动态互联的复杂系统引起了众多学者的研究兴趣[3,4]. 动态互联复杂系统的子系统之间的联结强度是随时间变化的，即系统的拓扑结构是时间的函数，如种群系统、生态系统、电力系统、多主体系统等都属于这类系统.

本文利用动态图及相关理论，对动态互联复杂系统进行建模，并引入 Lotka-Volterra 方程作为其互联模型，深入分析了该系统的稳定性.

2 动态图及其相关概念

首先定义一个具有顶点数为 N 的图空间 Ω. 考虑有向图 $D=(V,E)$. 其中：V 是 N 个顶点的集，E 是边的集. 对每条边 $(v_j,v_i)\in D$，分配一个权值 e_{ij}，若 $(v_j,v_i)\notin D$，则 $e_{ij}=0$. 根据同构概念，图 D 可以利用邻接矩阵 $E=(e_{ij})\in \boldsymbol{R}^{N\times N}$ 表示. 定义映射 $\Phi(t,D)$ 对于 $\forall D\in\Omega, t\in\boldsymbol{R}$，确定一个图 $\Phi\in\Omega$. 由此，给出如下定义[5]：

定义 1　动态图 D 是图空间 Ω 到其自身的一个单参数映射 $\Phi:\boldsymbol{R}\times\Omega\to\Omega$，且满足：

1) $\Phi(t_0,D_0)=D_0, \forall t_0\in\boldsymbol{R}, \forall D_0\in\Omega, D_0$ 是

收稿日期：2008-11-21；**修回日期**：2008-04-24.
基金项目：国家自然科学基金项目(60574010,60874017)；辽宁省高校优秀人才支持计划项目(2006R31).
作者简介：欧阳鑫玉(1974—)，男，湖南湘潭人，讲师，博士生，从事群集智能、复杂系统的研究；陈雪波(1960—)，男，福建莆田人，教授，博士生导师，从事群集智能、复杂系统等研究.

初始图;

2) $\Phi(t,D)$ 是连续的, $\forall t\in \boldsymbol{R}, D\in\Omega$;

3) $\Phi(t_2,\Phi(t_1,D))=\Phi(t_1+t_2,D), \forall t_1,t_2\in \boldsymbol{R}, \forall D\in\Omega$.

定义 2 动态邻接矩阵 E 是空间 $\boldsymbol{R}^{N\times N}$ 到其自身的一个单参数映射 $\Psi:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{N\times N}\rightarrow\boldsymbol{R}^{N\times N}$,且满足:

1) $\Psi(t_0,E_0)=E_0, \forall t_0\in\boldsymbol{R}, \forall E_0\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$;

2) $\Psi(t,E)$ 是连续的, $\forall t\in\boldsymbol{R}, E\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$;

3) $\Psi(t_2,\Psi(t_1,E))=\Psi(t_1+t_2,E), \forall t_1,t_2\in\boldsymbol{R}, \forall E\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$.

若图 D^e 满足 $\Phi(t,D^e)=D^e, \forall t\in\boldsymbol{R}$,则 D^e 称为平衡图. 同样,若矩阵 E^e 满足 $\Psi(t,E)=E^e, \forall t\in\boldsymbol{R}$,则 E^e 称为平衡邻接矩阵. 在不影响概念的情况下,可用 $D(t,D)$ 代替 $\Phi(t,D)$,用 $E(t,E)$ 代替 $\Psi(t,E)$.

对于 D^e 的稳定性,可利用其对应的 E^e 定义:

定义 3 1) 对于 $\forall\varepsilon>0$ 及 $t_0\in\boldsymbol{R}$,若存在 $\delta>0$,使当 $\|E_0-E^e\|<\delta$ 时 $\|E(t,E_0)-E^e\|<\varepsilon$, $\forall t\geqslant t_0$ 成立,则称 E^e(或 D^e)为李雅普诺夫意义下稳定;2) 若 E^e 为李雅普诺夫意义下稳定,且有

$$\lim_{t\to\infty}\|E(t,E_0)-E^e\|=0,$$

则称 E^e(或 D^e)为渐近稳定;3) 若 1) 中 $\varepsilon\to\infty$ 时,2) 仍成立,则称 E^e(或 D^e)为全局渐近稳定.

若动态图 D 的平衡 D^e 是全局渐近稳定的,则称该动态图是联结稳定的.

3 复杂动态互联系统模型

复杂动态互联系统可看成一个动态图. 根据动态图与动态邻接矩阵的对应关系,该类系统 $S=\{S_i\}$ 的状态空间模型可表示为

$$S_i:\dot{x}_i=A_{ii}x_i+B_{ii}u_i+\sum_{j=1}^{N}e_{ij}x_j,$$
$$y_i=C_{ii}x_i,\ i=1,2,\cdots,N. \tag{1}$$

其中: $x_i(t)\in\boldsymbol{R}^{n_i}$, $u_i(t)\in\boldsymbol{R}^{m_i}$ 和 $y_i(t)\in\boldsymbol{R}^{l_i}$ 分别表示子系统 S_i 在 $t\in\boldsymbol{R}$ 时的状态、输入和输出向量; $E=(e_{ij})$ 表示子系统之间的动态互联,并有

$$n=\sum_{i=1}^{N}n_i,\ m=\sum_{i=1}^{N}m_i,\ l=\sum_{i=1}^{N}l_i,$$
$$x=[x_1^{\mathrm T},x_2^{\mathrm T},\cdots,x_N^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$
$$u=[u_1^{\mathrm T},u_2^{\mathrm T},\cdots,u_N^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$
$$y=[y_1^{\mathrm T},y_2^{\mathrm T},\cdots,y_N^{\mathrm T}]^{\mathrm T}. \tag{2}$$

这里的 $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$, $u(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 和 $y(t)\in\boldsymbol{R}^l$ 分别表示系统 S 在 $t\in\boldsymbol{R}$ 时的状态、输入和输出向量,并且

$$A=\mathrm{blockdiag}(A_{11},\cdots,A_{NN}),$$
$$B=\mathrm{blockdiag}(B_{11},\cdots,B_{NN}),$$
$$C=\mathrm{blockdiag}(C_{11},\cdots,C_{NN}),$$
$$E=(e_{ij}),\ e_{ii}=0,\ i,j\in\{1,2,\cdots,N\}. \tag{3}$$

因此,复杂系统 S 也可表示为

$$S:\dot{x}=(A+E)x+Bu,\ y=Cx. \tag{4}$$

其动态互联矩阵 E 的微分方程可表示为

$$G:\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}E=F(t,E). \tag{5}$$

为了简化,将式(5)化为向量微分方程,步骤如下:

1) 将矩阵 E 按行排列组成一个向量 $\bar{e}\in\boldsymbol{R}^{N^2}$,即

$$\bar{e}=(e_{11},e_{12},\cdots,e_{1N},e_{21},e_{22},\cdots,$$
$$e_{2N},\cdots,e_{N1},e_{N2},\cdots,e_{NN}). \tag{6}$$

2) 删除 $e_{ij}=0$ 的项,保持 $\bar{e}$ 中元素顺序不变,得

$$e=(e_1,e_2,\cdots,e_M)^{\mathrm T},\ e\in\boldsymbol{R}^M,\ e_i\neq0. \tag{7}$$

则可得到式(5)对应的向量微分方程

$$G:\dot{e}=g(t,e), \tag{8}$$

其中函数 $g(\cdot)$ 跟随 $F(\cdot)$. 考虑动态互联 E 的输入 v 和 r,根据式(8)可以得到系统的动态互联方程

$$G:\dot{e}=g(t,e,v,r). \tag{9}$$

这里选择应用比较广泛的 Lotka-Volterra 方程[6-8]作为该复杂系统的动态互联模型

$$G:\dot{e}=R(Pe+Qv+r). \tag{10}$$

其中: $e\in\boldsymbol{R}^M$ 是动态互联矩阵 E 的状态, $v\in\boldsymbol{R}^L$ 和 $r\in\boldsymbol{R}^M$ 是 E 的输入; $P\in\boldsymbol{R}^{M\times M}$ 和 $Q\in\boldsymbol{R}^{M\times L}$ 是具有适当维数的常量矩阵,系统矩阵 $R=\mathrm{diag}\{e_1,e_2,\cdots,e_M\}$.

将式(4)与(10)结合到一起,可得到一对耦合系统 S 和 G 作为复杂动态互联系统的模型,即

$$S:\dot{x}=(A+E)x+Bu,\ y=Cx;$$
$$G:\dot{e}=R(Pe+Qv+r). \tag{11}$$

4 动态互联模型的稳定性分析

要对式(11)的系统进行稳定性分析,须分析其互联模型的稳定性. 首先分析输入 $v=0$ 时的情况,即

$$G:\dot{e}=R(Pe+r). \tag{12}$$

动态邻接矩阵 E 的平衡由以下方程决定:

$$R(Pe+r)=0. \tag{13}$$

因为人们在实际中经常感兴趣的是非负定限 $\bar{\boldsymbol{R}}_+^M=\{e\in\boldsymbol{R}^M:e_i\geqslant0,\forall i\in M\}$ 内的平衡 e^e,因而若式(12)有一正解 e^e,则解唯一,且有 $e^e=-P^{-1}r$. 令

$$e^e=[e_a^e\quad e_b^e]^{\mathrm T}. \tag{14}$$

其中: $e_a^e\in\boldsymbol{R}_+^k$, $0\leqslant k\leqslant M$,且 $e_b^e=0$. 引入向量

$$q=Pe^e+r=[q_a\quad q_b]^{\mathrm T}, \tag{15}$$

并令

$$r=\begin{bmatrix}r_a\\ r_b\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}P_{aa}&P_{ab}\\ P_{ba}&P_{bb}\end{bmatrix}. \tag{16}$$

由式(13)可知，$q_a=0$，因此有

$$q_b = P_{ba}e_a^e + r_b. \tag{17}$$

重写式(12)，可以得到动态互联的系统方程

$$G: \dot{e} = R[P(e-e^e)+q]. \tag{18}$$

引理 1　$\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$ 是系统(10)的一个不变集.

证明　对于任意初始值 $e_0\in\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$，由方程(10)可得

$$e(t;t_0,e_0)=$$
$$e_0\cdot\exp\left\{\int_0^{+\infty}[Pe(s)+Qv(s)+r(s)]\mathrm{d}s\right\}. \tag{19}$$

显然，当 $e_0\geqslant 0$ 时，必有 $e(t;t_0,e_0)\geqslant 0$. □

定义 4　若 $\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$ 是动态邻接矩阵 E 的一个不变集，则称 E 为一个正动态系统.

由于在非负定限 $\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$ 内考虑系统的稳定性，E 是一个正动态系统. 结合定义 3，可给出正定限 $\boldsymbol{R}_+^M=\{e\in\boldsymbol{R}^M: e_i>0,\forall i\in M\}$ 稳定性的定义如下：

定义 5　若动态邻接矩阵 E 是非负定限 $\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$ 内的一个正动态系统，其平衡 $e^e\in\boldsymbol{R}_+^M$，对于 $e_0\in\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$ 有

$$\lim_{t\to\infty}\|e(t;t_0,e_0)-e^e\|=0$$

成立，则称平衡 e^e 是 $\boldsymbol{R}_+^M$ 稳定的.

为了构建平衡 $e^e\in\boldsymbol{R}_+^M$ 的 $\boldsymbol{R}_+^M$ 稳定，引入 Volterra 类型的李雅普诺夫函数

$$V(e)=\sum_{i=1}^{k}\delta_i[e_i-e_i^e-e_i^e\ln(e_i/e_i^e)]+\sum_{i=k+1}^{M}\delta_i e_i. \tag{20}$$

其中：δ_i 是正数，函数 $V:\boldsymbol{R}_+^M\cup\{e^e\}\to\bar{\boldsymbol{R}}_+^M$ 是连续微分且在 $\boldsymbol{R}_+^M$ 上正定. 注意到，当 $e\to 0$ 或 $\|e\|\to+\infty$ 时，有 $V(e)\to+\infty$. 对式(20)求导，得

$$\dot{V}(e)\mid_E=$$
$$\sum_{i=1}^{k}\delta_i[e_i-e_i^e]\dot{e}_i/e_i+\sum_{i=k+1}^{M}\delta_i e_i\leqslant$$
$$-(e-e^e)^{\mathrm{T}}\Pi(e-e^e)+e_b^{\mathrm{T}}\Delta_b q_b. \tag{21}$$

其中

$$e_b=(e_{k+1},e_{k+2},\cdots,e_M)^{\mathrm{T}},$$
$$\Delta_b=\mathrm{diag}\{\delta_{k+1},\delta_{k+2},\cdots,\delta_M\},$$
$$\Pi=-\frac{1}{2}(P^{\mathrm{T}}\Delta+\Delta P),$$
$$\Delta=\mathrm{diag}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}. \tag{22}$$

根据李雅普诺夫方法，要求满足 $V(e)>0$，$\dot{V}(e)\mid_E<0$ 时式(12)的平衡才是渐近稳定的. 由式(21)知，要使 $\dot{V}(e)\mid_E<0$，则要求 Π 为正定矩阵，且 q_b 为非正向量，从而可得到如下定理：

定理 1　若存在一个正对角阵 Δ，使得矩阵 Π 是正定的，且 q_b 为非正向量，则 E 的平衡 e^e 是 $\boldsymbol{R}_+^M$ 稳定的.

对于存在一个正对角矩阵 Δ 使得 Π 正定的一个简单条件是矩阵 P 的对角元素 $p_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 为负数，且存在正数 d_i 使得下式成立：

$$d_i\mid a_{ii}\mid>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}d_j\mid a_{ij}\mid,$$
$$i=1,2,\cdots,n. \tag{23}$$

于是可得到如下推论：

推论 1　如果矩阵 P 的对角元素 $p_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 为负数，且存在正数 d_i 使得式(23)成立，并有 q_b 为非正向量，则 E 的平衡 e^e 是 $\boldsymbol{R}_+^M$ 稳定的.

为方便测试式(23)的条件，定义如下测试矩阵 $\bar{P}=(\bar{p}_{ij})$：

$$\bar{p}_{ij}=\begin{cases}-\mid p_{ii}\mid, & i=j;\\ \mid p_{ij}\mid, & i\neq j.\end{cases} \tag{24}$$

那么条件

$$(-1)^k\begin{vmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \cdots & \bar{p}_{1k}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \cdots & \bar{p}_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{p}_{k1} & \bar{p}_{k2} & \cdots & \bar{p}_{kk}\end{vmatrix}>0,$$
$$k=1,2,\cdots,n \tag{25}$$

与式(23)的条件等同.

下面分析输入 $v\neq 0$ 时的情况. 令辅助系统为

$$F: \dot{e}=Pe+Qv. \tag{26}$$

对于该系统，要找到一个状态反馈

$$v=-Ke, \tag{27}$$

使得李雅普诺夫函数

$$V(e)=e^{\mathrm{T}}\Delta e \tag{28}$$

满足闭环系统

$$F_b: \dot{e}=(P-QK)e=P_k e, \tag{29}$$

其中 $P_k=P-QK$. 要使该系统渐近稳定，需满足李雅普诺夫方程

$$P_k^{\mathrm{T}}\Delta+\Delta P_k=-2\Pi. \tag{30}$$

前面已讨论，若 Δ 为正定对角矩阵，使得 Π 为正定矩阵，则对于式(30)，总能找到适当的反馈矩阵 K，使其成立. 因此，对于输入 v，总能通过合适的状态反馈，使闭环动态互联系统

$$G_b: \dot{e}=R(P_k e+r) \tag{31}$$

为 $\boldsymbol{R}_+^M$ 全局渐近稳定. 从式(31)也可看出，输入 r 能将平衡 e^e 设定到 $\boldsymbol{R}_+^M$ 中的任何预定位置，即使系统具有预定的联结强度，且有 $e^e=-P_k^{-1}r$.

实际上，上述结论对于非负定限之外的其他定限内的平衡及其稳定性也适用.

5　动态互联复杂系统的稳定性分析

对于复杂系统 S 的每个无重叠子系统

$$S_i: \dot{x}_i=A_{ii}x_i+B_{ii}u_i, \tag{32}$$

可通过分散反馈，使其在 $x_i^e=0$ 处有一个稳定的平衡. 对于式(1)中系统的互联项 $\sum e_{ij}x_j$，也可以使整

个系统在 $x_i^e = 0$ 处有一个平衡.

对于动态互联复杂系统,需要根据实际情况保持子系统 S_i 之间的相互作用在预定的联结强度. 由前面的分析可知,该预定联结强度可由 E^e 的元素定义,由互联系统的输入 r 设定. 同时希望在一个包含 E^e 的允许区域内,从所有的 E_0 到平衡 E^e 是可达的,且不破坏整个系统 S 的稳定性.

下面讨论具有动态互联的复杂系统 S 的稳定性. 对于式(11) 中的 S,利用状态反馈

$$u = -K_s x, \tag{33}$$

得闭环系统方程

$$S_b: \dot{x} = (A + E - BK_s)x = A_k x, \tag{34}$$

其中令 $A_k = (A + E - BK_s)$. 该系统的平衡 $x_i^e = 0$ 是渐近稳定的充要条件是:对于任意正定实对称矩阵 H,存在一个正定实对称矩阵 Δ_s,使 $A_k^{\mathrm{T}}\Delta_s + \Delta_s A_k = -H$ 成立,系统的李雅普诺夫函数为 $V(x) = x^{\mathrm{T}}\Delta_s x$.

由于 E 是动态的,定义区域

$$\Omega_s = \{e \in \boldsymbol{R}^M : e_i \in [0, \hat{e}_i],\ i \in M\}, \tag{35}$$

其中 $\hat{E} = (\hat{e}_i)$ 为 E 的约束矩阵,并有 $0 \leqslant E \leqslant \hat{E}$.

定义 6 若 $E \in \Omega_s$,总能找到一个反馈 K_s 使上述充要条件满足,则 Ω_s 称为系统 S 的联结稳定域.

定义 7 定义一个区域 $\Omega_d \subset \boldsymbol{R}_+^M$,若在该区域利用动态联结方程的输入 r 可设定一个平衡 e^e,输入 v 可使该平衡渐近稳定,则称 Ω_a 为平衡 e^e 的吸引域.

定义 8 对于所有 $e_0 \in \Omega_a$,若复杂系统的平衡 $x^e = 0$ 是全局渐近稳定的,则称系统 S 是动态联结稳定的.

根据以上定义可知,若使整个复杂系统渐近稳定,则需在联结稳定域内设定动态联结的平衡,并使其渐近稳定. 于是可得如下定理:

定理 2 如果 $\Omega_a \subset \Omega_s$,则复杂系统 S 的平衡 $x^e = 0$ 是渐近动态联结稳定的.

6 结 论

本文从动态图和动态邻接矩阵角度,利用李雅普诺夫方法,对具有 Lotka-Volterra 方程类型动态互联的复杂系统进行了建模及稳定性分析,得到了动态互联复杂系统渐近稳定的相关条件及定理.

参考文献(References)

[1] 肖人彬,陶振武. 群集智能的研究进展[J]. 管理科学学报, 2007, 10(3): 80-96.
(Xiao R B, Tao Z W. Research progress of swarm intelligence[J]. J of Management Sciences in China, 2007, 10(3): 80-96.)

[2] Amaral L A N, Ottino J M. Complex networks: Augmenting the framework for the study of complex systems[J]. The European Physical J B, 2004, 38(2): 147-162.

[3] Tanner H G, Jadbabaie A, Pappas G J. Stable flocking of mobile agents, Part II: Dynamic topology[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Hawaii, 2003, 2: 2016-2021.

[4] Zavlanos M M, Pappas G J. Controlling connectivity of dyanmic graphs[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, 2005: 6388-6393.

[5] Šiljak D D. Dynamic graphs[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2008, 2(2): 544-567.

[6] Ikeda M, Šiljak D D. Lotka-Volterra equations: Decomposition, stability and structrue[J]. J of Mathematical Biology, 1980, 9(1): 65-83.

[7] Tarcisio M Rocha Filho, Iram M Gleria, Annibal Figueiredo, et al. The Lotka-Volterra canonical format [J]. Ecological Modelling, 2005, 183(1): 95-106.

[8] Teresa Faria, Oliveira J J. Local and global stability for Lotka-Volterra systems with distributed delays and instantaneous negative feedbacks[J]. J of Differential Equations, 2008, 244(5): 1049-1079.

下 期 要 目