

文章编号: 1001-0920(2009)11-1753-04

## 刚体航天器姿态跟踪的高阶滑模控制器设计

林 壮, 段广仁, 宋申民

(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 针对存在参数不确定性和外加干扰的刚体航天器的姿态跟踪控制问题, 提出一种基于高阶滑模的姿态跟踪控制方法. 首先介绍高阶滑模控制的基本原理, 并建立基于修正罗德里格参数描述的航天器数学模型; 然后采用李雅普诺夫第 2 法推导出高阶滑模姿态控制律. 理论分析和仿真结果均表明, 该方法能够有效消除系统抖振, 实现航天器姿态跟踪的精确定位, 并且系统具有全局稳定性和鲁棒性.

**关键词:** 刚体航天器; 姿态跟踪; 高阶滑模控制; 修正罗德里格参数

中图分类号: V448

文献标识码: A

## Design of higher-order sliding mode controller for rigid spacecraft attitude tracking maneuver

LIN Zhuang, DUAN Guang-ren, SONG Shen-min

(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.

Correspondent: LIN Zhuang, E-mail: linzhuang@tom.com)

**Abstract:** With the higher-order sliding mode control theory, we present a sliding mode control method of attitude tracking maneuver for a rigid spacecraft in presence of parameter variations and external disturbances. Firstly, the basic idea of the higher-order sliding mode control is introduced, and the spacecraft mathematical model based on the modified Rodrigues parameter(MRP) is described. Then the higher-order sliding mode attitude control law is derived based on Lyapunov second method. Theoretical analysis and simulation results show that the method can effectively eliminate system chattering, achieve precision positioning of spacecraft attitude tracking maneuver and get global stability and robustness at the same time.

**Key words:** Rigid spacecraft; Attitude tracking maneuver; Higher-order sliding mode control; Modified Rodrigues parameter(MRP)

### 1 引 言

近年来,刚体航天器姿态跟踪的滑模控制问题一直是世界各国科学界密切关注和广泛研究的一个重要方向. 在相关研究成果中, Liu 等<sup>[1]</sup>提出的模糊滑模姿态控制器, 采用模糊控制柔化了控制信号, 将不连续的控制信号连续化后减轻了一般滑模控制存在的抖振现象. Jin 等<sup>[2]</sup>则设计了控制量受约束情况下的时变滑模姿态控制器, 较好地消除了系统抖振, 并具有良好的鲁棒性. 但是, 传统滑模控制通常只考虑执行机构的慢变或平均作用的影响, 往往会导致实际滑模控制系统不稳定<sup>[3]</sup>, 进而影响实际的控制效果. 因此, 部分国内外学者提出了在控制器中加入

滑模高阶动态特性的高阶滑模控制方法. Floquet 等<sup>[4]</sup>将高阶滑模控制方法应用于刚体航天器的角速度镇定问题, 取得了较好的效果, 为高阶滑模控制方法应用于刚体航天器的姿态控制打下了基础. 但其对姿态角度的镇定问题没有作进一步深入探讨, 也没有讨论其在姿态跟踪问题方面的应用.

文献<sup>[5-7]</sup>给出了一系列准连续高阶滑模控制器的设计方法, 可以实现任意相对阶的高阶滑模控制. 该方法较前述高阶滑模控制大大简化, 而且能在保持常规意义下滑模控制鲁棒性的同时消除抖振, 具有更好的控制精度. 因此, 本文在其基本控制思想的基础上加以改进, 针对由修正罗德里格参数描述的一类空间刚体航天器姿态跟踪控制问题, 考虑系

收稿日期: 2008-12-17; 修回日期: 2009-03-03.

基金项目: 国家 863 计划重点项目(2007AA704338).

作者简介: 林壮(1978—), 男, 哈尔滨人, 博士后, 从事航天器控制、欠驱动系统控制等研究; 段广仁(1962—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、鲁棒控制等研究.

统存在不满足匹配性条件的参数不确定性和外部干扰力矩,基于李雅普诺夫第2法设计相应高阶滑模控制律.该控制律能够确保系统在有限时间到达滑动模面,而且具有全局渐近稳定性,能有效消除系统抖振,提高控制精度.最后以数值仿真表明了该控制律在三轴稳定航天器姿态跟踪控制中的有效性和实用性,并给出了相应的理论推导和仿真结果.

## 2 刚体航天器数学模型

令  $\omega$  和  $\omega_d$  分别表示本体坐标系和期望坐标系在本体坐标系下的旋转角速度,则角速度误差  $\omega_e = \omega - \omega_d$ .由 Euler 动力学方程,角速度误差满足如下的误差动力学方程:

$$J\dot{\omega}_e + \omega^\times J\omega_e = u + d - \omega. \quad (1)$$

式中:  $J \in R^{3 \times 3}$  为航天器的对称正定转动惯量矩阵;  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T \in R^3$  为三轴控制力矩矢量;  $d = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T \in R^3$  为航天器所受的干扰力矩;  $u$  为刚体受到的控制力矩;  $\omega = dh_d/dt = J\dot{\omega}_d + \omega^\times J\omega_d$ ,  $h_d$  为期望坐标系下的角动量,可将它看成一种干扰输入.则由 MRP 描述的误差运动学方程为

$$\dot{\sigma}_e = G(\sigma_e)\omega_e. \quad (2)$$

其中

$$G(\sigma_e) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sigma_e^2}{2} I_3 + \sigma_e^\times + \sigma_e \sigma_e^T \right), \quad (3)$$

$\sigma_e = [\sigma_{e1} \ \sigma_{e2} \ \sigma_{e3}]^T$  为本体坐标系相对于惯性坐标系的 MRP 参数.

## 3 高阶滑模控制基本原理

考虑如下非线性仿射系统:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u. \quad (4)$$

其中:  $x \in R^n$  和  $u \in R^m$  分别为系统的状态和控制向量;  $B(x) = (b_1, \dots, b_m)$ ;  $f, b_1, \dots, b_m$  为充分光滑的向量函数.设  $S = (S_1, \dots, S_m)^T$  为  $R^n \rightarrow R^m$  的光滑向量函数,且每一分量  $S_i$  有直到  $r_i$  阶 ( $r_i$  为正整数) 的光滑导数,则有下列等式成立:

$$S_i = \dot{S}_i = \dots = S_i^{(r_i-1)} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

显然,在系统进入滑模运动后,当  $S_i^{(r_i)} = 0$  时,可解得相应类似传统滑模控制的等效控制,即可实现由下式确定的高阶滑模运动:

$$\Xi = s_i^{r_i-1} + \mu_i^{r_i-1} s_i^{r_i-2} + \dots + \mu_i^2 s_i + \mu_i s_i. \quad (6)$$

这里只要取常数  $\mu_i^j$  使式(6)右端对应的特征多项式具有期望的特征值,系统便能够实现所期望的高阶滑模运动.但是,由于这一滑模控制系统只是局部渐近稳定<sup>[3]</sup>,其在参数选择上较为严格,通常需要对由高阶滑模控制理论推导出的控制输入进行积分.为解决这一问题,此处文献[5-7]相关理论的基础上,将式(4)所表示的系统重新表达为下面的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \\ s = s(t, x). \end{cases} \quad (7)$$

设系统的相对阶为  $r$ ,则  $u$  首次出现在  $r$  阶时间导数中,在给定点有  $\frac{d}{du} s^{(r)} \neq 0$  存在.引入局部坐标  $y$

$$= (y_1, \dots, y_n), y_1 = s, y_2 = \dot{s}, \dots, y_r = s^{(r-1)}, \text{ 则有} \\ s^{(r)} = h(t, y) + g(t, y)u, \quad g(t, y) \neq 0. \quad (8)$$

选择控制输入

$$\begin{aligned} u &= -K \operatorname{sgn}(s), \quad K > \sup |u_{eq}|, \\ u_{eq} &= -h(t, y)/g(t, y). \end{aligned} \quad (9)$$

式中的函数  $h(t, y)$  和  $g(t, y)$  应该有界,且  $h > 0$ .因此,对于某些  $K_m, K_M, C > 0$ ,有

$$\begin{aligned} 0 < K_m < \frac{\partial}{\partial u} s^{(r)} < K_M, \\ |L_a^r S| &\leq C, \quad |S^{(r)}|_{u=0} \leq C, \\ s^{(r)} &\in [-C, C] + [K_m, K_M]u. \end{aligned} \quad (10)$$

设  $i = 0, 1, \dots, r-1$ , 令

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r} &= s, \quad N_{0,r} = |s|^{(r-0)/r}, \\ \Psi_{0,r} &= \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \operatorname{sign}(s), \\ \varphi_{i,r} &= s^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r}, \\ N_{i,r} &= |s^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}, \\ \Psi_{i,r} &= \varphi_{i,r}/N_{i,r}, \end{aligned}$$

其中  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  为正整数.有如下定理:

**定理1**<sup>[5]</sup> 设系统(7)对输出函数  $s$  的相对阶为  $r$ ,且满足式(9),则适当选择  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  后,如下形式的控制器:

$$u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}), \quad (11)$$

能够保证系统轨迹在有限时间到达滑动流形  $s = 0$ .

证明过程和控制器结构参见文献[5].

定理1说明,对于任意相对阶的非线性系统,在选定  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  后,即可设计任意相对阶的高阶滑模控制器.

## 4 高阶滑模姿态控制器设计

定义滑动模面

$$s = \omega_e + k\sigma_e. \quad (12)$$

其中:  $k = \operatorname{diag}\{k_1 \ k_2 \ k_3\}$ ,  $k_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**定理2** 对于式(1)和(2)构成的刚体航天器系统,控制规律

$$\begin{aligned} u &= -\phi - \alpha \frac{\ddot{s} + 2(|\dot{s}| + \epsilon)}{|\dot{s}| + \epsilon} \rightarrow \\ &\leftarrow \frac{|s|^{2/3} \epsilon^{-1/2} (\dot{s} + |s|^{2/3} \operatorname{sgn}(s))}{2(|\dot{s}| + \epsilon)^{-1/2} + \epsilon}. \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$ ,  $\epsilon$  为一尽量小的正常数,  $\phi$  的具体表达详见证明过程.该控制输入能够确保系统到达滑动面流形,满足滑动模态的到达条件,并保证系统的稳定性与全局收敛性,即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_e, \sigma_e) =$

(0,0) 成立.

**证明** 令  $J = J_0 + \Delta J$ ,  $J_0$  和  $\Delta J$  分别代表转动惯量的名义值和不确定部分, 取李雅普诺夫函数

$$V_s = \frac{1}{2} s^T J s \geq 0. \quad (14)$$

采用李雅普诺夫第 2 法相关原理, 对  $V_s$  求导, 并将式(1) 和(2) 代入, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = & s^T \{-\omega^\times J_0 \omega_e + d - J_0 \dot{\omega}_d - \omega^\times J_0 \omega_d + \\ & K J_0 G(\sigma_e) \omega_e - \omega^\times \Delta J \omega_e - \Delta J \dot{\omega}_d - \\ & \omega^\times \Delta J \omega_d + K \Delta J G(\sigma_e) \omega_e + u\}. \end{aligned} \quad (15)$$

此处令

$$\begin{aligned} \phi &= \{-\omega^\times J_0 \omega_e - J_0 \dot{\omega}_d - \omega^\times J_0 \omega_d + \\ & K J_0 G(\sigma_e) \omega_e\}, \\ \gamma &= \{-\omega^\times \Delta J \omega_e - \Delta J \dot{\omega}_d - \omega^\times \Delta J \omega_d + \\ & K \Delta J G(\sigma_e) \omega_e + d\}. \end{aligned} \quad (16)$$

则式(15) 变为

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = s^T (\phi + \gamma + u) = \\ \sum_{i=1}^3 s_i (\phi_i + \gamma_i + u_i). \end{aligned} \quad (17)$$

取控制输入(13), 代入式(17), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = \sum_{i=1}^3 \alpha_i |s_i| \left( \frac{\gamma_i \operatorname{sgn}(s_i)}{\alpha_i} - \frac{\ddot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) +}{|\dot{s}_i| +} \right. \\ \left. \frac{2(\dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + |s_i|^{2/3})}{(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2}} \right) \\ \leftarrow \frac{2(\dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + |s_i|^{2/3})}{2(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2} + \epsilon}. \end{aligned} \quad (18)$$

为保证式(18) 小于等于零, 即保证系统能够达到滑动模面, 需满足

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_i \operatorname{sgn}(s_i)}{\alpha_i} \leq \\ \frac{\ddot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + 2 \frac{(\dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + |s_i|^{2/3})}{(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2}}}{|\dot{s}_i| + 2(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2} + \epsilon}. \end{aligned} \quad (19)$$

若此处有

$$\begin{cases} \dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) \leq |\dot{s}_i|, \ddot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) \leq |\ddot{s}_i|, \\ 2 \frac{(\dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + |s_i|^{2/3})}{(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2}} \leq 2(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2}, \\ \epsilon > 0. \end{cases} \quad (20)$$

则

$$\frac{\ddot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + 2 \frac{(\dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + |s_i|^{2/3})}{(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2}}}{|\dot{s}_i| + 2(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2} + \epsilon} \leq 1, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{\ddot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + 2 \frac{(\dot{s}_i \operatorname{sgn}(s_i) + |s_i|^{2/3})}{(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2}}}{|\dot{s}_i| + 2(|\dot{s}_i| + |s_i|^{2/3})^{1/2} + \epsilon} \geq \\ \frac{\gamma_i \operatorname{sgn}(s_i)}{\alpha_i} \end{aligned} \quad (22)$$

成立. 这里  $\epsilon$  的作用是避免在  $\dot{s}_i = s_i = 0$  时出现控制奇异. 那么, 上式等价于

$$\alpha_i \geq \gamma_i \operatorname{sgn}(s_i). \quad (23)$$

因为  $\gamma_i$  的上界可通过对系统的干扰和不确定性的估计和得到, 因此如果满足

$$|\gamma_i| < \gamma_i^{\max}(\omega, \omega_d, \sigma_e, d, \Delta J) \leq \alpha_i, \quad (24)$$

则必有  $\dot{V}_s < 0$ . 由此, 按文献[5-7] 相关理论, 定理得证.  $\square$

与上述文献不同的是, 本文在此处仅采用高阶滑模控制来消除系统的不确定和干扰部分  $\gamma$ , 而对于确定部分  $\phi$  依然采用反馈法予以抵消. 原方法<sup>[5]</sup> 需要对系统的全部状态和参数进行估计, 要求采取较大的  $\alpha_i$  值来满足系统的稳定要求, 但这同时会导致系统进入稳态的时间变长, 影响控制的效果. 而选择式(13) 的控制输入不仅可以保证系统稳定和全局收敛, 而且可通过  $\epsilon$  保证控制器处处连续, 以及选择较小的  $\alpha_i$  来同时满足系统到达滑动模平面的时间要求, 提高实际的控制效果.

### 5 控制系统仿真分析

为验证本文提出的姿态跟踪高阶滑模控制方法的可行性和有效性, 设某航天器为三轴稳定刚体航天器. 考虑航天器姿态跟踪控制问题, 选取如下航天器参数进行数学仿真验证.

刚体航天器的转动惯量(单位  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

$$J_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 4.5 \\ 0 & 85 & 0 \\ 4.5 & 0 & 75 \end{bmatrix};$$

初始姿态  $\sigma_0 = [0.3 \quad 0.2 \quad -0.3]^T$ ; 期望姿态  $\sigma_d = [0.013 \quad 1 \quad 0.019 \quad 6 \quad 0.022 \quad 6]^T$ ; 干扰力矩(单位  $\text{N} \cdot \text{m}$ )

$$d = \begin{bmatrix} 1 + \sin(\pi t/125) + \sin(\pi t/250) \\ 1 + \sin(\pi t/125) + \sin(\pi t/250) \\ 1 + \cos(\pi t/125) + \cos(\pi t/250) \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$

初始姿态角速度  $\omega_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \text{rad/s}$ ; 期望姿态角速度(单位  $\text{rad/s}$ )

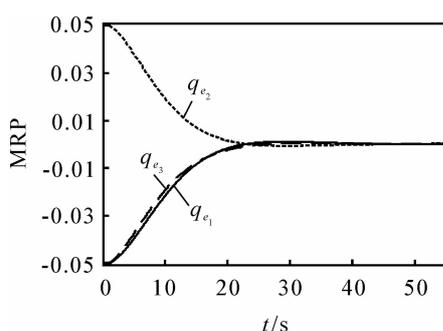
$$\omega_d = \begin{bmatrix} \sin(\pi t/75) \\ 2\sin(\pi t/75) \\ -\sin(\pi t/75) \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$

转动惯量的不确定部分上限  $\Delta J \leq 0.2 J_0$ .

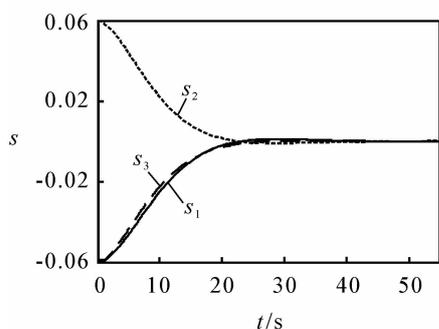
系统参数和控制器参数分别选择如下:

$$\alpha_i = 0.9, k_i = 0.2, \epsilon = 0.001.$$

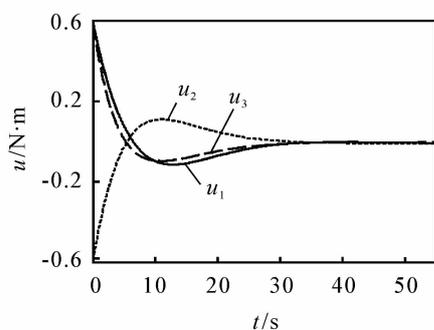
仿真结果如图 1 所示. 图 1(a)~图 1(d) 分别给出了 MRP 向量变化曲线、滑动模面变化曲线、三轴所需控制力矩的变化曲线以及姿态角速度误差变化曲线.



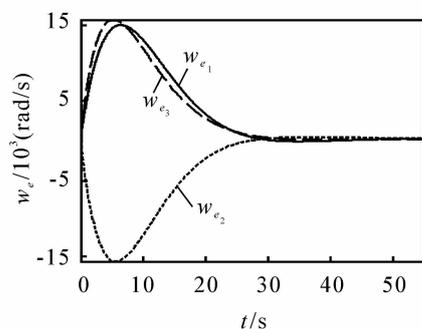
(a) 修正罗德里格参数误差曲线



(b) 滑动模面曲线



(c) 控制器输入力矩曲线



(d) 角速度误差曲线

图1 仿真结果

通过对上述仿真结果的分析可以看出,在系统存在参数不确定性和外加干扰力矩的情况下,高阶滑模控制器能够在控制力矩最大为  $0.6 \text{ N} \cdot \text{m}$  时,  $25 \text{ s}$  内使系统进入稳态,  $45 \text{ s}$  内完成航天器的姿态跟踪控制,实现精确定位.同时,由于高阶滑模控制方法采用了代表系统响应变化率的滑模一阶导数来

评估系统状态,系统的响应速度与文献[1,3]的类似仿真结果相比有较大提高,而且没有出现抖振情况.

综上所述,高阶滑模姿态控制器能够提高刚体航天器姿态跟踪的控制精度,基本消除抖振,并在缩短稳定时间的同时改善了控制效果.

## 6 结 论

本文针对刚体航天器存在模型不确定性因素和外部扰动情况下的姿态跟踪控制问题,利用高阶滑模变结构控制理论,设计了基于高阶滑模的刚体航天器姿态跟踪控制系统.首先介绍了相关高阶滑模控制的基本理论,建立了修正罗德里格参数描述的刚体航天器数学模型;然后针对该模型设计了基于李雅普诺夫第2法以及反馈控制理论的高阶滑模控制器,证明了其稳定性和全局收敛性,并通过模型不确定性和系统状态的分析,精心选择了使姿态控制系统具有良好动态品质的控制器参数;最后通过对数值仿真结果的分析,表明了高阶滑模姿态控制器与传统滑模控制器相比,不仅具有全局收敛性和较强鲁棒性,而且在缩短系统稳定时间的同时提高了系统的控制精度,从而进一步说明了该设计理论的正确性以及方法的可行性.

## 参考文献(References)

- [1] Liu X J, Guan P, Liu J Z. Fuzzy sliding mode control for satellite[C]. Engineering Decision and Control and European Control Conf. Seville, 2005: 1970-1975.
- [2] Jin Yongqiang, Liu Xiangdong, Qiu Weihou, et al. Time-varying sliding mode controls in rigid spacecraft attitude tracking[J]. Chinese J of Aeronautics, 2008, 21(3): 352-360.
- [3] Arie Levant. Higher order sliding: Differentiation and black-box control[C]. Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney, 2000: 1703-1708.
- [4] Floquet T, Perruquetti W, Barbot J-P. Angular velocity stabilization of a rigid body via vss control[J]. J of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2000, 122(4): 669-673.
- [5] Arie Levant. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(11): 1812-1816.
- [6] Arie Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design[J]. Automatica, 2005, 41(4): 823-830.
- [7] Arie Levant. Finite differences in homogeneous discontinuous control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(7): 1208-1217.