

文章编号: 1001-0920(2009)11-1625-04

基于量子层析的量子态测量方案及其仿真

吴庆林, 陈宗海, 张陈斌

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027)

摘要: 为解决量子态信息获取问题, 基于量子层析理论, 深入分析了单量子比特和多量子比特的层析理论, 设计了利用量子态层析进行量子态测量的实验方案, 并通过计算机仿真技术对单量子比特层析实验进行了模拟. 在理论分析和仿真实验的基础上得到如下结论: 通过适当选取测量次数, 量子层析技术可以较为精确地重构量子态密度矩阵, 获取量子态信息, 同时可以兼顾实验效率.

关键词: 量子层析; 量子态测量; 量子系统仿真

中图分类号: O413.1; TP391.9

文献标识码: A

Quantum state measurement based on quantum tomography and its simulation

WU Qing-lin, CHEN Zong-hai, ZHANG Chen-bin

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China. Correspondent: CHEN Zong-hai, E-mail: chenzh@ustc.edu.cn)

Abstract: In order to solve the problem of information acquisition of quantum state, based on the quantum tomography theory, the single-qubit and multi-qubits tomography techniques are analyzed in details and an experiment for quantum state measurement is designed. Then the practicability of this method is verified by the simulation for single-qubit tomography with computer simulation technology. Simulation results show that not only the density matrix can be reconstructed and the information of quantum state can be obtained, but also the efficiency of experiment is satisfying, when suitable measurement times are chosen in quantum tomography experiment.

Key words: Quantum tomography; Quantum state measurement; Quantum system simulation

1 引言

随着量子理论的建立和发展, 人们拥有了更为有效的了解和研究微观系统的手段和方法, 从而使人们对微观领域的运动规律产生了更为浓厚的兴趣. 伴随着一个个曾经看似“奇异”的物理现象, 得到了量子理论的成功解释以及量子理论在化学反应、基因工程、原子物理、量子信息等领域的重要应用, 使其得到了进一步发展和完善. 随着近年来信息技术的飞速发展, 量子信息技术成为物理研究领域中的一个重要领域, 它是量子理论与信息理论相结合的产物, 主要研究分支包括量子通讯^[1]、量子密码和量子计算^[2]等.

在量子信息技术中, 信息的获取是所研究问题的关键, 量子态作为信息的载体成为研究的主要对象, 对量子态的制备、操纵和测量成为日益重要的一

个研究内容. 量子态的不可克隆和不确定性, 使得量子态的测量从本质上区别于经典物理系统, 人们很难在不破坏量子态本身的情况下获取量子态的完全信息.

为了解决量子态的测量问题, 早在 1852 年, Stokes 便提出了一种通过实验来近似测定量子态的方法^[3], 第一次提出通过实验测定 4 个参数来唯一确定偏振光极化态的方案, 该方案后来被称为量子层析技术^[4](Quantum tomography). 量子层析在测量目标量子态的多个相同副本的基础上, 通过对得到的实验数据进行线性变换来获得量子态的密度矩阵, 从而获得量子态的全部信息. 1969 年, Cahill 和 Glauber 发表了题为《Density operators and quasiprobability distributions》的文章^[5], 从理论上详细分析了通过重构密度矩阵来获取量子态状态信

收稿日期: 2008-12-25; 修回日期: 2009-03-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60804020).

作者简介: 吴庆林(1980—), 男, 黑龙江嫩江人, 博士生, 从事量子信息控制的研究; 陈宗海(1963—), 男, 安徽桐城人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模仿真、智能系统、量子控制等研究.

息的方法,为量子层析技术的发展奠定了坚实的理论基础.

在过去的几十年间,量子层析实验技术得到了进一步的发展,一些研究小组已经成功地对各种不同量子系统实施了成功的层析实验. 1989年, Vogel 和 Risken 首次设计出了利用光学零差探测法确定量子态密度矩阵的实验^[6]. 1990年, Ashburn 等对含有 9 能级 ($n=3$) 的氢原子系统进行量子层析实验,并得到了简化的量子层析实验方案^[7]. 1993年, Smithey 和 Beck 等成功地对量子压缩态和真空态实施了量子零差探测层析^[8]. 1995年, 分子振动态的层析实验获得成功^[9], Leonhardt 提出根据实验数据推断有限维量子系统的层析实验方案,并推导出了魏格纳方程的离散形式^[10]. 在其后的几年中, 离子和原子的量子系统^[11], 含有四基态的铯原子内部角动量系统^[12], 以及利用 NMR 技术测定的 1/2 自旋电子态^[13] 的层析实验都获得了成功. 利用自发参数下转换产生纠缠光子态的层析实验在 1999 年也获得了成功^[14]. 随着理论研究的深入和部分实验的成功, 量子层析技术开始在量子光学和量子信息学的研究中广泛应用^[15-17].

本文详细分析了量子层析原理, 介绍了利用 Stokes 参数方法设计的任意量子态测量方案, 实现了量子层析技术的计算机模拟, 并在仿真实验数据分析的基础上得出了一些结论. 最后对该技术存在的问题和可能的应用前景进行了分析和展望.

2 量子态层析

由量子力学的知识可知, 一个量子系统的密度矩阵 ρ 包含了该系统的所有可知信息^[18,19], 因此如果可以得到某个系统的密度矩阵 ρ , 便可认为已经掌握了这个系统的特性. 量子层析技术正是这样一种基于统计信息重构量子态密度矩阵的方法. 它属于一种统计测量方法, 通过测量未知量子态的大量全同样本的一组完备可观测量的平均值来确定量子态的密度矩阵 ρ .

2.1 单量子比特(Qubit)的量子层析

对于单量子比特而言, 其密度算符 ρ 可展开为^[3]

$$\rho = \frac{1}{2}(S_0\sigma_0 + S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_3\sigma_3). \quad (1)$$

其中

$$\sigma_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

S_i 均为实数, 由 $\text{tr}(\rho) = 1$ 易知 $S_0 = 1$.

下面以偏振光子为例来说明如何确定量子态的密度矩阵:

1) 让任意待测光子的 N 个相同副本通过水平偏振的波片, 并记录其数量

$$n_0 = N\text{tr}(\rho\mu_0) = N\langle 0 | \rho | 0 \rangle = \frac{N}{2}(S_0 + S_3); \quad (2)$$

2) 让任意待测光子的 N 个相同副本通过垂直偏振的波片, 并记录其数量

$$n_1 = N\text{tr}(\rho\mu_1) = N\langle 1 | \rho | 1 \rangle = \frac{N}{2}(S_0 - S_3); \quad (3)$$

3) 让任意待测光子的 N 个相同副本通过左旋方向的波片, 并记录其数量

$$n_2 = N\text{tr}(\rho\mu_2) = N\langle + | \rho | + \rangle = \frac{N}{2}(S_0 + S_1); \quad (4)$$

4) 让任意待测光子的 N 个相同副本通过右旋方向的波片, 并记录其数量

$$n_3 = N\text{tr}(\rho\mu_3) = N\langle - | \rho | - \rangle = \frac{N}{2}(S_0 + S_2). \quad (5)$$

其中

$$|0\rangle = (1, 0)^T, |1\rangle = (0, 1)^T, \\ |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, |-\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

表示 4 个光子偏振极化态; 而

$$\mu_0 = |0\rangle\langle 0|, \mu_1 = |1\rangle\langle 1|, \\ \mu_2 = |+\rangle\langle +|, \mu_3 = |-\rangle\langle -|$$

为 4 个正交投影算符.

这样, 由 (n_0, n_1, n_2, n_3) 便可以构造出待测光子的密度矩阵

$$\rho = \frac{1}{2}(S_0\sigma_0 + S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_3\sigma_3) = \\ \left[\begin{array}{c} \frac{n_0}{N}, \left(\frac{n_2}{N} - \frac{n_0 + n_1}{2N} \right) - i \left(\frac{n_3}{N} - \frac{n_0 + n_1}{2N} \right) \\ \left(\frac{n_2}{N} - \frac{n_0 + n_1}{2N} \right) + i \left(\frac{n_3}{N} - \frac{n_0 + n_1}{2N} \right), \frac{n_1}{N} \end{array} \right]. \quad (6)$$

2.2 多量子比特(Multiple qubits)量子层析^[20]

多量子比特可看作单量子比特情况的一种形式上的推广, 对于 n -qubits 量子态, 其密度矩阵可描述为

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^3 r_{i_1, \dots, i_n} \sigma_{i_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_n}. \quad (7)$$

其中: 4^n 个参数 r_{i_1, \dots, i_n} 均为实数, 需通过实验数据来测定; \otimes 表示算符间的直积.

由 $n = N\text{tr}(\rho\mu)$ 可知

$$n_{i_1, \dots, i_n} = N\text{tr}\{\rho(\mu_{i_1} \otimes \dots \otimes \mu_{i_n})\}. \quad (8)$$

将式(7)代入(8)得到

$$n_{i_1, \dots, i_n} = \frac{N}{2^n} \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^3 \text{tr}\{\mu_{i_1} \sigma_{j_1}\} \times \text{tr}\{\mu_{i_2} \sigma_{j_2}\} \cdots \text{tr}\{\mu_{i_n} \sigma_{j_n}\} \times r_{i_1, \dots, i_n},$$

$$\mu_i = \sum_{j=0}^3 Y_{ij} \sigma_j. \quad (9)$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

根据关系式 $\text{tr}\{\sigma_i \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, 可将式(9)化简为

$$n_{i_1, \dots, i_n} = N \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^3 Y_{i_1 j_1} Y_{i_2 j_2} \cdots Y_{i_n j_n} r_{i_1, \dots, i_n}. \quad (10)$$

可以得到

$$N r_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^3 Y_{i_1 j_1}^{-1} Y_{i_2 j_2}^{-1} \cdots Y_{i_n j_n}^{-1} \times n_{i_1, \dots, i_n} = S_{i_1, \dots, i_n}. \quad (11)$$

根据 $\text{tr}(\rho) = 1$ 易知 $r_{0, \dots, 0} = 1$, 则有 $S_{0, \dots, 0} = N$, 可将式(7)变换为

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^3 \frac{S_{i_1, \dots, i_n}}{S_{0, \dots, 0}} \sigma_{i_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i_n}. \quad (12)$$

这样便得到了理论上求解 n -qubits 系统的密度矩阵的方法. 值得注意的是, 测量算符 $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ 的选取并不是唯一的, 可根据实验或者计算的方便进行适当选取.

3 量子态测量方案及仿真研究

通过以上分析, 已经从理论上得到了利用量子层析进行量子态测量的方法. 然而, 理论上的成功往往不能代表实际系统中的有效性和可行性. 为此, 下面通过计算机仿真来模拟利用量子层析技术获取量子态信息的实验过程, 从而进一步对该方法进行分析和评价.

3.1 量子态测量实验方案

单量子比特层析实验示意图如图 1 所示. 通过量子通道或量子控制场的量子态即为待测量子态,

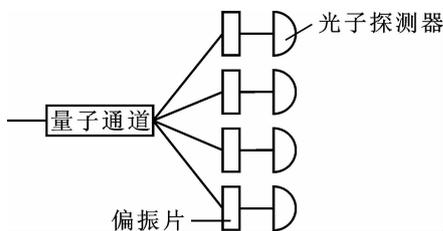


图 1 单量子比特层析实验示意图

让其分别通过 4 种不同方向的偏振波片, 并利用光子探测器记录通过各偏振波片的光子数. 将所得到的数据用来重构量子态的密度矩阵, 从而获取量子态的状态信息.

3.2 量子态测量的计算机仿真及结果分析

实际系统主要包含两方面误差: 1) 实验过程中产生的不可避免的测量误差, 如实验仪器的精度及灵敏度, 外界环境噪声和随机干扰等; 2) 由测量引起的输出态随机塌缩造成的统计误差, 若要完全精确地获取量子态信息, 则要进行无穷次探测, 这在实际上是无法做到的. 本文通过计算机仿真人加入测量误差, 并根据仿真结果来分析统计误差对该方法有效性的影响.

单量子比特层析实验的仿真流程如图 2 所示.

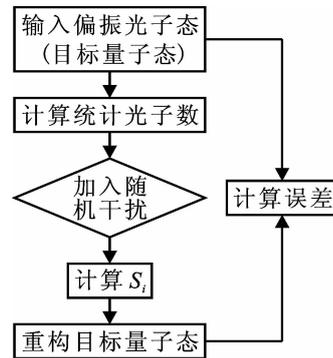


图 2 仿真算法流程图

本文通过在理论计算出的统计光子数(即式(6)中的 n_i) 上加入一个随机数来模拟实验中的测量误差, 利用加入干扰后的光子数重构量子态的密度矩阵, 并与输入的目标量子态比较, 分别计算密度矩阵各分量的误差

$$\Delta\rho_{ij} = |\rho'_{ij} - \rho_{ij}|. \quad (13)$$

对于单量子比特, 有 $i, j = 1, 2$. 其中: ρ'_{ij} 为通过计算重构的量子态密度矩阵, ρ_{ij} 为输入目标态的密度矩阵, $\Delta\rho_{ij}$ 为它们之间误差的模. 本文通过改变输入光子数来得到一系列的误差数据, 并绘制出了误差曲线(见图 3).

从图 3 所示实验结果可以得出以下结论:

1) 由于实验中存在测量误差, 统计光子数与理论值有一定的差距, 从而会导致重构的密度矩阵与目标量子态的密度矩阵之间存在偏差, 重构的密度矩阵可能不满足完全正定性和保迹性, 而且这种偏差是随机产生且不可避免的, 尤其在输入光子数较小时对结果影响较为明显.

2) 根据量子层析理论, 若要完全精确地获取量子态信息, 则要进行无穷次探测, 这在实验中是无法做到的. 但是, 从仿真曲线中可以看到, 随着输入光子数的增加, 误差会较好地收敛到令人满意的程度.

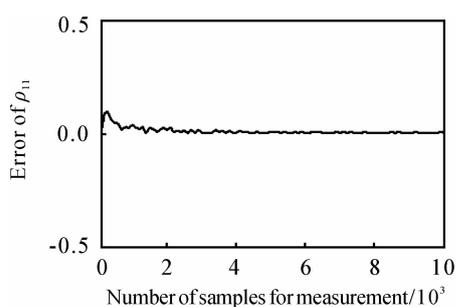
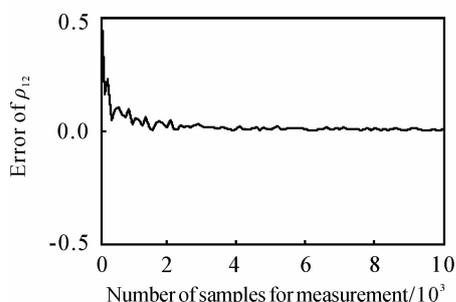
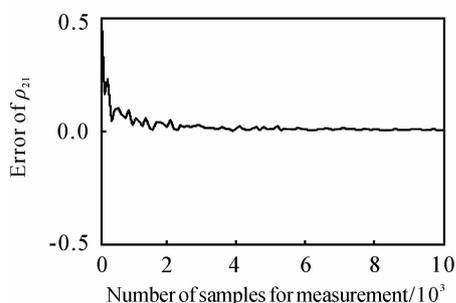
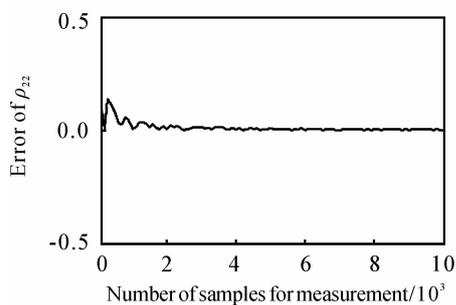
(a) 重构量子态密度矩阵元素 ρ_{11} 误差曲线(b) 重构量子态密度矩阵元素 ρ_{12} 误差曲线(c) 重构量子态密度矩阵元素 ρ_{21} 误差曲线(d) 重构量子态密度矩阵元素 ρ_{22} 误差曲线

图3 重构量子态与目标量子态间密度矩阵误差曲线

从图3可看出,在输入光子数达到3000以上时,便基本上消除了测量误差和统计误差对结果的影响。

3) 从理论上讲,可通过无限增加输入光子数的方式来尽量消除误差,但这样做会增加实验成本,降低实验效率。为了平衡误差与效率之间的矛盾,可通过适当选择实验中的输入光子数来达到消除实验误差的目的,同时可以控制实验成本,保证实验效率。

综上所述,量子层析技术作为一种统计测量手段,可以有效地实现量子态测量,获取量子态的状态

信息。

4 结 论

量子层析技术可以实现量子态的测量,获取量子态的状态信息,是了解量子系统状态的方法之一。在获取量子态信息的基础上,可以实现量子态的识别、制备、操控,尤其在量子闭环控制中,量子信息的成功获取是构成完整反馈环的关键。希望在进一步的工作中,利用这些结论设计出有效的量子反馈控制策略,实现以量子信息反馈为基础的真正意义上的量子反馈控制系统。

重构的密度矩阵可能失去了完全正定性和保迹性。为了防止这一现象的发生,可利用一些数值处理方法(如极大似然估计方法)来保持密度矩阵的这些特性,从而使得重构的密度矩阵在物理上是可实现的。这也是下一步工作的一个重点。

参考文献(References)

- [1] Ronald D W. Quantum communication and complexity [J]. Theoretical Computer Science, 2002, 287(1): 337-353.
- [2] Steane A. Quantum computing [J]. Reports on Progress in Physics, 1998, 61(2): 117-173.
- [3] Stokes G C. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources [J]. Trans Cambridge Philosophy Society, 1852, 9(1): 399-416.
- [4] Artiles L M, Gill R D, Guta M I. An invitation to quantum tomography [J]. J of the Royal Statistical Society Series B-Statistical Methodology, 2005, 67(2): 109-134.
- [5] Cahill K E, Glauber R J. Ordered expansions in boson amplitude operators [J]. Physical Review, 1969, 177(5): 1857-1881.
- [6] Vogel W, Welsch D G. k -photon jayme's-cummings model with coherent atomic preparation: Squeezing and coherence [J]. Physical Review A, 1989, 40(12): 7113-7120.
- [7] Ashburn J R, Cline R A, Van Der Burgt P J M, et al. Experimentally determined density matrices for H ($n=3$) formed in H+-He collisions from 20 to 100 KeV [J]. Physical Review A, 1990, 41(5): 2407-2421.
- [8] Smithy D T, Beck M, Raymer M G, et al. Measurement of the wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum [J]. Physical Review Letters, 1993, 70(9): 1244-1247.

(下转第1634页)