文章编号：1001-0920(2009)11-1647-05

具有区间时变时滞的离散 Markov 跳变系统鲁棒 H_∞ 控制

刘健辰[1,2]，章 兢[1]
(1. 湖南大学 电气与信息工程学院，长沙 410082；2. 湖南科技大学 信息与电气工程学院，湖南 湘潭 411201)

摘 要：研究一类具有区间时变时滞的离散时间不确定 Markov 跳变系统的时滞相关鲁棒 H_∞ 控制问题. 通过构造新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，基于有限和不等式方法设计状态反馈控制器，使得闭环系统在容许不确定性下鲁棒稳定，且对能量有界的输入噪声满足一定输入输出 H_∞ 增益. 在新控制器存在条件中未引入任何自由变量矩阵，使之可更为有效地求解. 基于锥补线性化的迭代算法可有效求解 H_∞ 次优控制器. 数值算例表明了所提出方法的有效性.

关键词：Markov 跳变系统；区间时变时滞；有限和不等式；锥补线性化
中图分类号：TP13 **文献标识码**：A

Robust H_∞ control for discrete-time Markov jump systems with interval time-varying delays

LIU Jian-chen[1,2], *ZHANG Jing*[1]
(1. School of Electric and Information Engineering, Hu'nan University, Changsha 410082, China; 2. School of Information and Electric Engineering, Hu'nan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China. Correspondent: LIU Jian-chen, E-mail: liujian4587@sina.com)

Abstract: The problem of delay-dependent robust H_∞ control for a class of discrete-time uncertain Markov jump systems with interval time-varying delay is studied. By constructing a new Lyapunov-Krasovskii functional and using a finite sum inequality, state feedback controllers are designed such that the closed-loop systems are robust stochastic stable under all admissible uncertainties, and have certain input/output H_∞ gain for energy bounded noise inputs. No free variable matrix is introduced in the new conditions, which makes the obtained results more efficient. Then, an iterative algorithm based on the cone complementarity linearization method is proposed to obtain a suboptimal H_∞ controller. Numerical examples show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Markov jump system; Interval time-varying delay; Finite sum inequality; Cone complementary linearization

1 引 言

有关时滞系统的研究已受到国内外众多学者的广泛重视. 近几年，随着对网络控制系统等的研究[1,2]，越来越多的学者开始关注具有区间时变时滞的离散系统稳定性分析和控制器设计问题[3-8]. 已有的方法可分为：Moon 不等式法[3,8]，自由矩阵法[4,6]，有限和不等式(Finite sum inequality)法[5,7]. 其中有限和不等式法未引入任何自由矩阵，变量个数最少，具有最高的求解效率. 但是，文献[5]中存在对二次型项的“过度定界(The over bounding)”问题，这给所得结果带来了不必要的保守性. 另一方面，很多实际系统可能因元件或系统互联故障、环境变化以及网络传输延迟等原因，发生结构和参数上的突然变化，这时系统常常可以用 Markov 跳变系统进行建模[9]. 目前，对于具有模态相关时滞的 Markov 跳变系统已取得了一些研究成果[10,11]，但对于具有一般时变时滞的情况，仅在文献[12]中研究了时滞相关镇定问题，而且文献[12]采用了基于模型变换和 Moon 不等式的方法，所得结果的保守性较大.

本文通过构造新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，研究具有区间时变时滞和参数不确定性的离散 Markov 跳变系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 控制器的存在条件为矩阵不等式形式，进而给出基于锥补线性

收稿日期：2008-12-01；**修回日期**：2009-04-12.
作者简介：刘健辰(1978—)，男，辽宁朝阳人，博士生，从事随机跳变系统鲁棒控制和智能控制的研究；章兢(1957—)，男，湖南韶山人，教授，博士生导师，从事复杂系统理论、智能控制等研究.

化的迭代求解算法. 最后，通过数值算例验证了所提出方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下离散不确定 Markov 跳变系统：

$$\begin{cases} x_{k+1} = \\ (A_{r_k} + \Delta A_{r_k,k})x_k + (A_{d,r_k} + \Delta A_{d,r_k,k})x_{k-d_k} + \\ (B_{r_k} + \Delta B_{r_k,k})u_k + B_{w,r_k}w_k, \\ z_k = \\ (C_{r_k} + \Delta C_{r_k,k})x_k + (C_{d,r_k} + \Delta C_{d,r_k,k})x_{k-d_k} + \\ (D_{r_k} + \Delta D_{r_k,k})u_k + D_{w,r_k}w_k, \\ x_k = \phi(k),\ k = -h_2, -h_2+1, \cdots, 0. \end{cases} \tag{1}$$

式中：$x_k \in R^n$，$u_k \in R^m$ 和 $z_k \in R^r$ 分别为系统的状态、控制输入和被控输出向量；$w_k \in R^q$ 为 $L_2[0,\infty)$ 上的扰动输入，$L_2[0,\infty)$ 代表平方可积向量函数空间；$\phi(k)$ 为初始状态函数；r_k 为系统模态，是取值于有限集合 $\boldsymbol{S} = \{1,\cdots,s\}$ 上的齐次 Markov 过程，从模态 i 到模态 j 的转移概率为 $\pi_{ij} = \Pr\{r_{k+1} = j \mid r_k = i\}$，其中 $\pi_{ij} \geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij} = 1$.

$\Delta A_{r_k,k}$ 等描述系统时变不确定性，具有以下形式：

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{r_k,k} & \Delta A_{d,r_k,k} & \Delta B_{r_k,k} \\ \Delta C_{r_k,k} & \Delta C_{d,r_k,k} & \Delta D_{r_k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,r_k} \\ H_{2,r_k} \end{bmatrix} F_k [E_{1,r_k} \quad E_{2,r_k} \quad E_{3,r_k}]. \tag{2}$$

式中：H_{1,r_k}，H_{2,r_k} 和 E_{j,r_k} $(j = 1,2,3)$ 为适当维数的常数矩阵；F_k 为未知时变矩阵，且满足 $F_k^{\mathrm{T}}F_k \leqslant I(\forall k)$；$d_k$ 为区间时变时滞，满足 $0 \leqslant h_1 \leqslant d_k \leqslant h_2$，其中 h_1 和 h_2 为已知非负整数. 为简化叙述，记 $A_{r_k=i}$ 为 A_i，其他矩阵类推，并记 $y_k = x_{k+1} - x_k$.

定义 1[12] 对于任意 $\phi(k)$ 和 $r_k \in \boldsymbol{S}$，如果有

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty} x_k^{\mathrm{T}} x_k \mid \phi(k), r_0\Big] < \infty \tag{3}$$

成立，则称无扰动标称开环系统(1)($u_k = 0, F_k = 0, w_k = 0$) 随机稳定. 对于任意容许的系统不确定性(2)，如果无扰动开环系统(1)($u_k = 0, w_k = 0$) 均随机稳定，则称其鲁棒稳定. 其中 $\mathrm{E}[\cdot]$ 表示数学期望.

定义 2 给定标量 $\gamma > 0$，对于任意 $\phi(k)$ 和 $r_0 \in \boldsymbol{S}$，如果存在状态反馈控制器

$$u_k = k_i x_k, \tag{4}$$

使得闭环系统(1) 鲁棒稳定，且

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty} z_k^{\mathrm{T}} z_k\Big] \leqslant \gamma^2 \Big[\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{\mathrm{T}} w_k\Big], \tag{5}$$

则称控制器(4) 为系统(1) 的鲁棒 H_∞ 控制器.

在得出本文主要结果之前，首先给出如下引理：

引理 1[5] 向量函数 $x_i:[-h_2,0] \to R^n$，则对于任意矩阵 $0 < M \in R^n$，有

$$(h_2 - h_1 + 1)\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1} x_i^{\mathrm{T}} M x_i \geqslant \Big[\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1} x_i^{\mathrm{T}}\Big] M \Big[\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1} x_i\Big]. \tag{6}$$

引理 2[13] 给定适当维数的矩阵 $Z^{\mathrm{T}} = Z$，E，Δ 和 F，且 Δ 满足 $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I$，则

$$Z + E\Delta F + F^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} < 0$$

成立的充要条件是存在正数 $\varepsilon > 0$，使得下式成立：

$$Z + \varepsilon EE^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F < 0.$$

3 主要结果

下面给出本文的主要结果. 首先，由引理 1 可得如下无扰动标称开环系统(1) 的时滞相关随机稳定判据：

定理 1 如果存在矩阵 $P_i > 0$，$Q_l > 0$，$R_k > 0$ $(i \in \boldsymbol{S}, l = 1,2, k = 1,2,3)$，使得如下 LMIs 成立：

$$\begin{bmatrix} \Xi_i & h_2\Gamma_i^{\mathrm{T}}R_1 & \rho\Gamma_i^{\mathrm{T}}R_2 & h_1\Gamma_i^{\mathrm{T}}R_3 \\ * & -R_1 & 0 & 0 \\ * & * & -R_2 & 0 \\ * & * & * & -R_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

其中

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \Upsilon_i & A_i^{\mathrm{T}}G_iA_{di} & R_3 & R_1 \\ * & A_{di}^{\mathrm{T}}G_iA_{di} - 2R_2 & R_2 & R_2 \\ * & * & -Q_1 - R_2 - R_3 & 0 \\ * & * & * & -Q_2 - R_1 - R_2 \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_i = A_i^{\mathrm{T}}G_iA_i - P_i + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_3,$$

$$\rho = h_2 - h_1,\ G_i = \sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}P_j,$$

$$\Gamma_i = [\bar{A}_i \quad A_{di} \quad 0 \quad 0],\ \bar{A}_i = A_i - I.$$

则无扰动标称开环系统(1) 随机稳定.

证明 考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函：

$$V(x_k, r_k) = x_k^{\mathrm{T}}P_ix_k + \sum_{i=k-h_1}^{k-1} x_i^{\mathrm{T}}Q_1x_i + \sum_{i=k-h_2}^{k-1} x_i^{\mathrm{T}}Q_2x_i + \sum_{\theta=-h_2+1}^{0}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1} y_j^{\mathrm{T}}h_2R_1y_j + \sum_{\theta=-h_2+1}^{-h_1}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1} y_j^{\mathrm{T}}\rho R_2y_j + \sum_{\theta=-h_1+1}^{0}\sum_{j=k-1+\theta}^{k-1} y_j^{\mathrm{T}}h_1R_3y_j. \tag{8}$$

对 $V(x_k, r_k)$ 的前向差分取数学期望，即

$$\Delta V(x_k, r_k) = \mathrm{E}[V(x_{k+1}, r_{k+1})] - V(x_k, r_k),$$

有

$$\begin{aligned}&\Delta V(x_k, r_k) = \\ &x_k^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}G_iA_i - P_i)x_k + 2x_k^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}G_iA_{di}x_{k-d_k} + \\ &x_{k-d_k}^{\mathrm{T}}A_{di}^{\mathrm{T}}G_iA_{di}x_{k-d_k} + x_k^{\mathrm{T}}(Q_1 + Q_2)x_k - \\ &x_{k-h_1}^{\mathrm{T}}Q_1x_{k-h_1} - x_{k-h_2}^{\mathrm{T}}Q_2x_{k-h_2} + y_k^{\mathrm{T}}(h_2^2R_1 + \\ &\rho^2R_2 + h_1^2R_3)y_k - h_2\sum_{j=k-h_2}^{k-l}y_j^{\mathrm{T}}R_1y_j - \\ &\rho\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}y_j^{\mathrm{T}}R_2y_j - h_1\sum_{j=k-h_2}^{k-1}y_j^{\mathrm{T}}R_3y_j.\end{aligned} \tag{9}$$

根据引理 1,有

$$-h_2\sum_{j=k-h_2}^{k-1}y_j^{\mathrm{T}}R_1y_j \leqslant \begin{bmatrix}x_k\\x_{k-h_2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-R_1 & R_1\\R_1 & -R_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_k\\x_{k-h_2}\end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}-\rho\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}y_j^{\mathrm{T}}R_2y_j \leqslant &\begin{bmatrix}x_{k-d_k}\\x_{k-h_2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-R_2 & R_2\\R_2 & -R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{k-d_k}\\x_{k-h_2}\end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix}x_{k-d_k}\\x_{k-h_1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-R_2 & R_2\\R_2 & -R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{k-d_k}\\x_{k-h_1}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{11}$$

$$-h_1\sum_{j=k-h_1}^{k-l}y_j^{\mathrm{T}}R_3y_j \leqslant \begin{bmatrix}x_k\\x_{k-h_1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-R_3 & R_3\\R_3 & -R_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_k\\x_{k-h_1}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

将式(10)～(12)代入(9),整理可得

$$\Delta V(x_k, r_k) \leqslant \xi_k^{\mathrm{T}}[\varXi_i + \varGamma_i^{\mathrm{T}}(h_2^2R_1 + \rho^2R_2 + h_1^2R_3)\varGamma_i]\xi_k. \tag{13}$$

其中:$\xi_k = [x_k^{\mathrm{T}} \quad x_{k-d_k}^{\mathrm{T}} \quad x_{k-h_1}^{\mathrm{T}} \quad x_{k-h_2}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,其他矩阵如式(7)中定义.

根据 Schur 补,如果式(7)成立,则有

$$\boldsymbol{Q}_i = \varXi_i + \varGamma_i^{\mathrm{T}}(h_2^2R_1 + \rho^2R_2 + h_1^2R_3)\varGamma_i < 0,$$

故有

$$\mathrm{E}[V(x_{k+1}, r_{k+1})] - V(x_k, r_k) \leqslant -\beta x_k^{\mathrm{T}}x_k, \tag{14}$$

其中 $\beta = \inf\{\lambda_{\min}(-\boldsymbol{Q}_i), i \in \boldsymbol{S}\}$. 进而,对于 $T \geqslant 1$,有

$$\mathrm{E}[V(x_{T+1}, r_{T+1})] - \mathrm{E}[V(x_0, r_0)] \leqslant -\beta\sum_{k=0}^{T}x_k^{\mathrm{T}}x_k.$$

令 $T \to \infty$,即得

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}x_k^{\mathrm{T}}x_k\Big] \leqslant \frac{1}{\beta}\mathrm{E}[V(x_0, r_0)] < \infty.$$

这样,根据定义 1 可得无扰动标称开环系统(1)随机稳定. □

注 1　由于定理 1 在构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函(8)时,充分利用了区间时变时滞 d_k 的信息(包括 h_1, h_2 和 ρ),使所得稳定性判据比只采用部分时滞信息时具有更小的保守性.

注 2　文献[14]指出,为了获得保守性较小的结果,需避免对 $-\rho\sum_{j=k-h_2}^{k-h_1-1}y_j^{\mathrm{T}}R_2y_j$ 等二次型项过度定界. 实际上,本文未使用常用的 $-\rho\sum_{j=k-d_k}^{k-h_1-1}y_j^{\mathrm{T}}R_2y_j$,而是使用了更加严格的定界(11),这有利于减小所得结果的保守性.

注 3　文献[4,7]在推导系统稳定性条件时,除 Lyapunov-Krasovskii 泛函矩阵外,还引入了一些冗余的自由变量矩阵. 这些自由变量矩阵或通过恒零等式引入[4],或通过有限和不等式隐含引入[7]. 最近,文献[15]研究发现,引入这些自由变量矩阵,实际上并不能减小所得结果的保守性,且过多的变量在系统维数增大时,将造成计算负担急剧增长,从而影响求解效率. 据此,定理 1 中采用有限和不等式方法,从而避免了任何冗余变量矩阵的引入. 实际上,对于单模态情况,求解式(7)涉及 $3n^2 + 3n$ 个变量,而文献[7]中的方法需求解 $7.5n^2 + 1.5n$ 个变量.

下面考虑标称系统的镇定问题. 将控制器(4)代入(1),令 $A_{Ki} = A_i + B_iK_i$,再由 Schur 补可得无扰动标称闭环系统(1)随机稳定的充分条件为:存在矩阵 $P_i > 0$, $Q_l > 0$, $R_k > 0$ ($i \in \boldsymbol{S}$, $l = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$),使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\tilde{\varXi}_i & h_2\tilde{\varGamma}_i^{\mathrm{T}}R_1 & \rho\tilde{\varGamma}_i^{\mathrm{T}}R_2 & h_1\tilde{\varGamma}_i^{\mathrm{T}}R_3\\ * & -R_1 & 0 & 0\\ * & * & -R_2 & 0\\ * & * & * & -R_3\end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

其中

$$\tilde{\varXi}_i = \begin{bmatrix}\tilde{\Upsilon}_i & 0 & R_3 & R_1 & A_{Ki}^{\mathrm{T}}W_i\boldsymbol{P}\\ * & -2R_2 & R_2 & R_2 & A_{di}^{\mathrm{T}}W_i\boldsymbol{P}\\ * & * & -Q_1 - R_2 - R_3 & 0 & 0\\ * & * & * & -Q_2 - R_1 - R_2 & 0\\ * & * & * & * & -\boldsymbol{P}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Upsilon}_i = -P_i + Q_1 + Q_2 - R_1 - R_3,$$

$$\tilde{\varGamma}_i = [\bar{A}_i + B_iK_i \quad A_{d_i} \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$W_i = [\sqrt{\pi_{i1}}\, I \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{is}}\, I],$$
$$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{P_1, \cdots, P_s\}.$$

进而，用 $\mathrm{diag}\{P_i^{-1}, P_i^{-1}, P_i^{-1}, P_i^{-1}, \boldsymbol{P}^{-1}, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}\}$ 对式(15)进行合同变换，并令 $X_i = P_i^{-1}$，$\bar{Q}_{li} = P_i^{-1} Q_l P_i^{-1}$，$\bar{R}_{ki} = P_i^{-1} R_k P_i^{-1}$，$Y_i = K_i P_i^{-1}$ ($i \in \boldsymbol{S}, l = 1,2,\ k = 1,2,3$)，可得如下推论：

推论 1 无扰动标称闭环系统(1) 随机稳定的充分条件为存在矩阵 $X_i > 0$，$\bar{Q}_{li} > 0$，$\bar{R}_{ki} > 0$ ($i \in \boldsymbol{S}$，$l = 1,2,\ k = 1,2,3$) 和 Y_i，使得如下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_i & h_2 \bar{\Gamma}_i^{\mathrm{T}} & \rho \bar{\Gamma}_i^{\mathrm{T}} & h_1 \bar{\Gamma}_i^{\mathrm{T}} \\ * & -X_i \bar{R}_{1i}^{-1} X_i & 0 & 0 \\ * & * & -X_i \bar{R}_{2i}^{-1} X_i & 0 \\ * & * & * & -X_i \bar{R}_{3i}^{-1} X_i \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

其中

$$\bar{\Xi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_i & 0 & \bar{R}_{3i} & \bar{R}_{1i} & \widetilde{A}_{Ki}^{\mathrm{T}} W_i \\ * & -2\bar{R}_{2i} & \bar{R}_{2i} & \bar{R}_{2i} & X_i A_{di}^{\mathrm{T}} W_i \\ * & * & -\bar{Q}_{1i} - \bar{R}_{2i} - \bar{R}_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q}_{2i} - \bar{R}_{1i} - \bar{R}_{2i} & 0 \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{X} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Upsilon}_i = -X_i + \bar{Q}_{1i} + \bar{Q}_{2i} - \bar{R}_{1i} - \bar{R}_{3i},$$
$$\bar{\Gamma}_i = [\bar{A}_{Ki} \quad A_{di} X_i \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$
$$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{X_1, \cdots, X_s\},$$
$$\widetilde{A}_{Ki} = A_i X_i + B_i Y_i,$$
$$\bar{A}_{Ki} = \bar{A}_i X_i + B_i Y_i.$$

类似于定理 1 的证明过程，在推论 1 的基础上可得标称闭环系统(1) 的 H_∞ 控制器的存在条件.

定理 2 对于给定的 $\gamma > 0$，如果存在矩阵 $X_i > 0$，$\bar{Q}_{li} > 0$，$\bar{R}_{ki} > 0$ 和 Y_i ($i \in \boldsymbol{S}, l = 1,2,\ k = 1,2,3$)，使得如下矩阵不等式成立：

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i & h_2 \Pi_{1i}^{\mathrm{T}} & \rho \Pi_{1i}^{\mathrm{T}} & h_1 \Pi_{1i}^{\mathrm{T}} & \Pi_{2i}^{\mathrm{T}} \\ * & -X_i \bar{R}_{1i}^{-1} X_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -X_i \bar{R}_{2i}^{-1} X_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -X_i \bar{R}_{3i}^{-1} X_i & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

其中

$$\bar{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Upsilon}_i & 0 & \bar{R}_{3i} & \bar{R}_{1i} & B_{wi} & \bar{A}_{Ki}^{\mathrm{T}} W_i \\ * & -2\bar{R}_{2i} & \bar{R}_{2i} & \bar{R}_{2i} & 0 & X_i A_{di}^{\mathrm{T}} W_i \\ * & * & -\bar{Q}_{1i} - \bar{R}_{2i} - \bar{R}_{3i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{Q}_{2i} - \bar{R}_{1i} - \bar{R}_{2i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{X} \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{1i} = [\bar{A}_{Ki} \quad A_{di} X_i \quad 0 \quad 0 \quad B_{wi} \quad 0],$$
$$\Pi_{2i} = [C_i X_i + D_i Y_i \quad C_{di} X_i \quad 0 \quad 0 \quad D_{wi} \quad 0],$$

则标称闭环系统(1) 随机稳定且具 H_∞ 范数界 γ，得到的 H_∞ 控制器增益 $K_i = Y_i X_i^{-1}$.

注 4 注意到式(16) 和(17) 中均存在 $X_i \bar{R}_{ki}^{-1} X_i$ ($k = 1,2,3$) 等非线性项，所以推论 1 和定理 2 均是非凸条件. 一种简单的处理方法是令 $\bar{R}_{ki} = X_i$，但这将使所得结果具有较大的保守性. 以下基于锥补线性化[16] 方法给出一种迭代求解算法：

算法 1 给定 h_1 和 h_2，最小化 γ

Step1：选择充分大的 γ_{init}，使得存在正定对称矩阵 X_i，$\bar{Q}_{li}$，$\bar{R}_{ki}$，J_{ki}，$\mathcal{X}_i$，$\mathcal{R}_{ki}$，$\mathcal{J}_{ki}$ 和矩阵 Y_i ($i \in \boldsymbol{S}, l = 1,2,\ k = 1,2,3$) 满足式(18) 和(19). 设 $\gamma = \gamma_{\mathrm{init}}$，$t = 0$.

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_i & h_2 \Pi_{1i}^{\mathrm{T}} & \rho \Pi_{1i}^{\mathrm{T}} & h_1 \Pi_{1i}^{\mathrm{T}} & \Pi_{2i}^{\mathrm{T}} \\ * & -J_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -J_{2i} & 0 & 0 \\ * & * & * & -J_{3i} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0; \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{ki} & \mathcal{X}_i \\ \mathcal{X}_i & \mathcal{R}_{ki} \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} J_{ki} & I \\ I & \mathcal{J}_{ki} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$
$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & \mathcal{X}_i \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} R_{ki} & I \\ I & \mathcal{R}_{ki} \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{19}$$

Step2：求解满足式(18) 和(19) 的可行解(X_i^{T}，$\bar{Q}_{li}^{\mathrm{T}}$，$\bar{R}_{ki}^{\mathrm{T}}$，$Y_i^{\mathrm{T}}$，$J_{ki}^{\mathrm{T}}$，$\mathcal{X}_i^{\mathrm{T}}$，$\mathcal{R}_{ki}^{\mathrm{T}}$，$\mathcal{J}_{ki}^{\mathrm{T}}$).

Step3：对(X_i，$\bar{Q}_{ki}$，$\bar{R}_{ki}$，Y_i，J_{ki}，$\mathcal{X}_i$，$\mathcal{R}_{ki}$，$\mathcal{J}_{ki}$) 求解

$$\text{Minimize Trace}\Big(\sum_{i=1}^{s}\Big[X_i^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_i + X_i^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_i + \sum_{k=1}^{3}(J_{ki}^{\mathrm{T}} \mathcal{J}_{ki} + \mathcal{J}_{ki}^{\mathrm{T}} \mathcal{J}_{ki} + \bar{R}_{ki}^{\mathrm{T}} \mathcal{R}_{ki} + \mathcal{R}_{ki}^{\mathrm{T}} \bar{R}_{ki})\Big]\Big),$$

subject to 式(18) 和(19).

令 $J_{ki}^{t+1} = J_{ki}$，$X_i^{t+1} = X_i$，$\bar{R}_{ki}^{t+1} = \bar{R}_{ki}$，$\mathcal{J}_{ki}^{t+1} = \mathcal{J}_{ki}$，$\mathcal{X}_i^{t+1}$

$= X_i, \bar{\mathcal{R}}_{ki}^{t+1} = \bar{\mathcal{R}}_{ki}$.

Step4：如果 Step 3 的最优解满足式(17)，则令 $\gamma = \gamma - \Delta\gamma$，并返回 Step 2，其中 $\Delta\gamma$ 为迭代步长. 否则，如果 $t+1 \leqslant t_{\max}$，则令 $t = t+1$，并返回 Step3，其中 $t_{\max}$ 为最大迭代数；否则结束算法.

将系统不确定性(2) 代入式(17)，可得如下鲁棒 H_∞ 控制器的存在条件：

定理 3　对于给定的 $\gamma > 0$，如果存在矩阵 $X_i > 0, \bar{Q}_{li} > 0, \bar{R}_{ki} > 0, Y_i$ 以及标量 $\varepsilon_i > 0$ ($i \in \boldsymbol{S}, l = 1, 2, k = 1,2,3$)，使得如下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & \varepsilon_i \bar{H}_i & \bar{E}_i^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0. \tag{20}$$

其中

$$\bar{H}_i = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad H_{1i}^{\mathrm{T}} W_i \rightarrow$$
$$\leftarrow h_2 H_{1i}^{\mathrm{T}} \quad \rho H_{1i}^{\mathrm{T}} \quad h_1 H_{1i}^{\mathrm{T}} \quad H_{2i}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{E}_i = [E_{1i} X_i + E_{3i} Y_i \quad E_{2i} X_i \quad 0 \rightarrow$$
$$\leftarrow 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

则闭环系统(1) 鲁棒稳定且具 H_∞ 范数界 γ，相应的鲁棒 H_∞ 控制器增益 $K_i = Y_i X_i^{-1}$.

注 5　类似于定理 2，算法 1 可用于定理 3 的求解.

4　数值算例

例 1　考虑一个单模态标称系统，参数如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

计算 $h_1 = 2, 6, 10$ 和 12 时，该系统随机稳定的最大 h_2，计算结果见表 1. 由表 1 可见，本文所得结果比文献[3-7] 具有更小的保守性.

表 1　最大时滞上界 h_2

方 法	$h_1 = 2$	$h_1 = 6$	$h_1 = 10$	$h_1 = 12$
文献[3]	7	9	12	13
文献[4]	10	11	13	14
文献[5]	10	12	16	16
文献[6]	13	14	15	17
文献[7]	10	11	13	14
本 文	13	14	15	18

例 2　考虑文献[12] 给出的两模态标称系统，参数见文献[12]，此略.

固定 $h_1 = 1$，利用推论 1 和算法 1，可得最大 $h_2 = 10.3$，对应的控制器增益为

$$K_1 = [0.1325 \quad -0.0009],$$
$$K_2 = [0.3465 \quad 0.0088].$$

而采用文献[12] 中的算法，最大 $h_2 = 10$. 可见本文方法具有更小的保守性.

例 3　考虑文献[11] 中例 2 给出的不确定两模态系统(1)，参数见文献[11]，此略.

文献[11] 假设系统存在模态相关时滞 d_1 和 d_2. 实际上，模态相关时滞也是一种时变时滞，且有 $h_1 = \min\{d_1, d_2\}, h_2 = \max\{d_1, d_2\}$. 对于 $d_1 = d_2 = 40$，文献[11] 得到的最低 $\gamma = 1.022$，而采用本文中的定理 3 和算法 1，可求得最低 $\gamma = 0.4547$，且相应的控制器增益为

$$K_1 = [-0.2084 \quad -3.6046],$$
$$K_2 = [0.2882 \quad -6.4837].$$

对于 $d_1 = 30, d_2 = 28$，文献[11] 得到的最低 $\gamma = 2.6001$，而本文求得的最低 $\gamma = 0.2785$，相应的控制器增益为

$$K_1 = [-6.3543 \quad -2.4478],$$
$$K_2 = [0.6498 \quad -15.4898].$$

可见，本文方法具有更小的保守性.

5　结　　论

本文研究了具有区间时变时滞的离散 Markov 跳变系统的鲁棒 H_∞ 控制. 通过构造新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，充分利用了系统时滞的信息，使所得结果具有较小的保守性. 采用有限和不等式方法，不引入任何冗余变量矩阵，从而在减小保守性的同时，提高了求解效率. 所提出的时滞相关稳定性条件为一组线性矩阵不等式，可以直接求解. 控制器存在条件为一组非线性矩阵不等式，可通过给出的迭代算法有效求解. 最后的数值算例表明了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Jiang X, Han Q L. Networked-induced delay-dependent H_∞ controller design for a class of networked control systems[J]. Asian J of Control, 2006, 8(2): 97-106.

[2] Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. Automatica, 2005, 41(6): 999-1007.

[3] Gao H, Lam J, Wang C. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay[J]. IEE Proc Control Theory and Applications, 2004, 151(6): 691-698.

[4] Liu X, Martin R, Tang M. Delay-dependent robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay[J]. IEE Proc Control Theory Application, 2006, 153(6): 689-702.

[5] Jiang X, Han Q L, Yu X H. Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay[C]. Proc of the American Control Conf. Portland, 2005: 2817-2822.

(下转第 1656 页)