

文章编号: 1001-0920(2010)07-1063-06

基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器

王小旭^{1,2}, 赵琳¹, 夏全喜¹, 郝勇¹

(1. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001; 2. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘要: 针对强跟踪滤波器(STF)存在要求非线性函数连续可微和强非线性时滤波性能不佳等理论局限性, 提出一种基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器(UTSTF). UTSTF 基于 STF 的理论框架, 采用 Unscented 变换代替 STF 中的雅可比矩阵计算; UTSTF 兼具 STF 鲁棒性强、Unscented 变换精度高、实现简单的优点, 有效克服了 STF 的理论局限性. 仿真实例验证了 UTSTF 的有效性.

关键词: 非线性; 强跟踪滤波器; Unscented 变换; 鲁棒性强; 精度高

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Strong tracking filter based on unscented transformation

WANG Xiao-xu^{1,2}, ZHAO Lin¹, XIA Quan-xi¹, HAO Yong¹

(1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: WANG Xiao-xu, E-mail: woyaofly1982@163.com)

Abstract: Strong tracking filter (STF) has some theoretical limitations including bad filtering performance in strong nonlinear and calling for nonlinear function continuous and differentiable. Therefore, STF based on unscented transformation (UTSTF) is proposed. UTSTF views STF as the basic theory framework and makes unscented transformation take place of calculating nonlinear function Jacobian matrix, so it combines strong robustness of STF with high accuracy and easy implementation of unscented transformation. The simulation examples show the effectiveness of UTSTF.

Key words: Nonlinear; Strong tracking filter; Unscented transformation; Strong robustness; High accuracy

1 引言

长期以来, 扩展卡尔曼滤波器(EKF)因其实现简单、收敛速度快等优点而被广泛应用于多传感器信息融合、雷达机动目标跟踪及卫星通信等各种非线性高斯系统状态估计中^[1]. 然而, EKF 对系统模型具有严格的要求, 系统模型的不确定性包括: 模型状态简化、系统噪声及初始状态的统计特性建模不准确、实际系统的模型参数发生变动等, 都会造成滤波器的状态估计值偏离系统的真实状态, 引起滤波发散, 即 EKF 不具有能克服系统模型不确定的鲁棒性.

早已证明, 当理论模型与实际系统完全匹配时, 卡尔曼滤波器输出残差序列是互不相关的高斯白噪声序列^[2]. 基于此, 文献[3]提出了一种带次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器, 称之为强跟踪滤波器(STF), 其通过在状态预测协方差阵中引入渐消因子的方法, 在线实时调整增益矩阵, 强迫输出残差序列保持相互正交. 这样 STF 在系统模型不确定时仍能保持

对系统状态的跟踪能力, 有效解决了 EKF 关于模型不确定的鲁棒性差、滤波发散等问题. 但其与 EKF 类似, 依然存在自身无法克服的理论局限性: 1) 要求非线性系统状态函数和量测函数必须是连续可微的, 限制了它的应用范围; 2) 对非线性函数的一阶线性化近似精度偏低, 特别当系统具有强非线性时, STF 估计精度严重下降, 甚至发散; 3) 需要计算非线性函数的雅可比矩阵, 这一过程非常繁琐且容易出错, 造成 STF 数值稳定性能不佳, 易出现计算发散.

与此同时, Julier 等^[4,5]提出了一种基于 Sigma 点采样来逼近非线性高斯系统状态后验分布的 Unscented 变换(UT). 不论系统非线性程度如何, UT 变换理论上至少能以三阶泰勒精度逼近任何非线性高斯系统状态的后验均值和协方差, 且无需计算非线性函数的雅可比矩阵, 不要求非线性函数连续可微. 这样, UT 变换便为克服 STF 的理论局限性提供了一种有效的解决途径. 鉴于此, 本文提出

收稿日期: 2009-07-03; 修回日期: 2009-09-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974104).

作者简介: 王小旭(1982-), 男, 山西曲沃人, 博士, 从事组合导航非线性滤波算法的研究; 赵琳(1968-), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事惯性导航、卫星导航等研究.

一种基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器 (UTSTF). UTSTF 以 STF 作为滤波器的基本理论框架, 继承了 STF 关于系统模型不确定时鲁棒性强的特点; 同时采用 UT 变换代替 STF 中的雅可比矩阵计算, 有效克服了 STF 的理论局限性, 拓展了 STF 应用范围. 进行不同条件下的仿真分析, 结果验证了 UTSTF 的有效性和可行性.

2 强跟踪滤波器

考虑如下所示的非线性离散系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统状态向量和量测向量; $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^p$ 是控制输入向量; $\mathbf{f}_k(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{h}_k(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 分别为系统非线性状态函数和量测函数; \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 是互不相关的高斯白噪声, 且具有如下统计特性:

$$\begin{cases} E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{q}_k, \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}, \\ E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{r}_k, \text{Cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}, \\ \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j^T] = 0. \end{cases}$$

其中: $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$ 都为正定对称阵; δ_{kj} 为 kronecker- δ 函数.

EKF 是在线性卡尔曼滤波器基础之上发展而来的, 即通过对非线性状态及量测函数的泰勒展开式进行一阶线性化截断, 继而将非线性滤波问题转化为线性卡尔曼滤波. 将式 (1) 与式 (2) 分别围绕状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 与预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 展成泰勒级数, 并忽略二阶以上项, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &\approx \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \Phi_{k+1,k}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_{k+1} &\approx \mathbf{h}_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{v}_{k+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \Phi_{k+1,k} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k}, \\ \mathbf{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}. \end{cases}$$

2.1 STF 实现

EKF 应对模型不确定的鲁棒性很差, 造成状态估计精度下降, 甚至引起滤波发散. 而 STF 通过在状态预测协方差阵 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 中引入渐消因子 λ_{k+1} 的方法, 在线实时调整增益矩阵 \mathbf{K}_{k+1} , 使得:

- 1) $E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})^T] = \min,$
- 2) $E[\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1+j} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T] = 0, k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$

条件 1) 是 EKF 的性能指标, 条件 2) 要求不同时刻的输出残差序列处处保持正交.

在实际应用中, 系统模型不确定性会造成滤波输出残差序列不正交. 建立在性能指标 1) 和 2) 的 STF, 通过引入渐消因子强行使输出残差序列保持正交, 具有类似高斯白噪声的性质, 最大程度地提取输出残差序列中一切有效信息, 这样 STF 在模型不确定时仍能保持对系统状态的跟踪能力.

采用次优渐消因子, 分别对不同的滤波数据通道进行渐消, 则 STF 递推公式如下所示:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{q}_k, \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \lambda_{k+1} \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{Q}_k, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \mathbf{h}_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{r}_{k+1}, \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}), \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k}, \quad (9)$$

其中 $\lambda_{k+1} \geq 1$ 为渐消因子. 设理论输出残差序列为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$, 则渐消因子 λ_{k+1} 的计算采用文献 [6] 中的算法, 即

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \lambda_0, \lambda_0 \geq 1 \\ 1, \lambda_0 < 1 \end{cases}, \lambda_0 = \frac{\text{tr}[\mathbf{N}_{k+1}]}{\text{tr}[\mathbf{M}_{k+1}]}; \quad (10)$$

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{k+1}^T - \mathbf{R}_{k+1}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k+1} &= \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T \mathbf{H}_{k+1}^T = \\ &= \mathbf{H}_{k+1} [\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} - \mathbf{Q}_k] \mathbf{H}_{k+1}^T = \\ &= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} \mathbf{H}_{k+1}^T - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{k+1}^T = \\ &= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{V}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中: $\text{tr}(\cdot)$ 为求矩阵迹的算子; $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 表示没有引入渐消因子时的状态预测协方差阵, 且

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{Q}_k; \quad (13)$$

\mathbf{V}_{k+1} 为实际输出残差序列的协方差阵, 实际中 \mathbf{V}_{k+1} 是未知的, 可由下式估算:

$$\mathbf{V}_{k+1} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T, k = 1; \\ \frac{\rho \mathbf{V}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T}{1 + \rho}, k \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

式中 $0 < \rho \leq 1$ 为遗忘因子, 通常取 $\rho = 0.95$.

2.2 STF 等价表述

在引入渐消因子前, 状态预测协方差 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$, 输出预测协方差 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$ 及互协方差 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$ 可表示为

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} = E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T],$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} = E[(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^T],$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} = E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^T],$$

其中 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 由式 (13) 给出. 对于 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$ 和 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$, 联

合式(3)与式(6), 再根据 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 与量测噪声 \mathbf{v}_{k+1} 互不相关性, 可知

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} &= \\ & \text{E}[(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^T] = \\ & \text{E}\{[\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1}] \cdot \\ & [\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1}]^T\} = \\ & \mathbf{H}_{k+1} \text{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T] \mathbf{H}_{k+1}^T + \\ & \text{E}[(\mathbf{v}_{k+1} - \hat{\mathbf{r}}_{k+1})(\mathbf{v}_{k+1} - \hat{\mathbf{r}}_{k+1})^T] = \\ & \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} &= \\ & \text{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^T] = \\ & \text{E}\{[\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \cdot \\ & [\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1}]^T\} = \\ & \text{E}[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T] \mathbf{H}_{k+1}^T = \\ & \mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} \mathbf{H}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (16)$$

已知 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 表示在 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 引入渐消因子 λ_{k+1} 后的状态预测协方差阵, 故采用 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 取代式(15), (16)中的 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$, 并定义

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T. \quad (18)$$

上一节已假设 \mathbf{Q}_k 为正定对称阵, 故 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 和 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 的逆矩阵一定存在, 则由式(16), (18)可知

$$\mathbf{H}_{k+1} = [\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}]^T [\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}]^{-1}, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^T \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1}. \quad (20)$$

于是, 将式(17), (18)和(20)代入式(8)和(9)中, 可得 \mathbf{K}_{k+1} 和 \mathbf{P}_{k+1} 的等价表达式如下:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{-1}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{-1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^T = \\ & \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} \mathbf{K}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (22)$$

同理, 将式(15), (16)和(19)代入式(11)和(12)中, 可得 \mathbf{N}_{k+1} 和 \mathbf{M}_{k+1} 的等价表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{k+1} &= \\ & \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{R}_{k+1} - [\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}]^T [\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}]^{-1} \mathbf{Q}_k \cdot \\ & [\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}]^{-1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} - \mathbf{V}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1}. \quad (24)$$

3 基于Unscented变换的强跟踪滤波器

由上节可知: 传统 STF 是建立在输出残差序列正交性原理之上的扩展卡尔曼滤波器, 因此与 EKF 类似, STF 中状态后验均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$ 及后验协方

差 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}$ 的计算只能达到一阶精度, 不适用于强非线性系统; STF 需要求解雅可比矩阵 $\Phi_{k+1,k}$, \mathbf{H}_{k+1} , 其应用场合仅限于状态方程是弱非线性的, 且连续可微。

理论上已经证明^[5], UT变换对后验均值和协方差的近似精度高于 EKF, 且无需计算雅可比矩阵, 具有实现简单、适用于不连续或不可微的非线性系统滤波等特点. 为此, 本文提出采用 UT 变换代替求解非线性函数雅可比矩阵, 计算状态后验均值和协方差, 从而得到基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器 (UTSTF).

根据 STF 等价表述, 基于非线性系统(1)和(2)的 UTSTF 具体算法流程如下:

Step 1 选择 Sigma 点采样策略. 在 UT 算法中, 最重要的是确定 Sigma 点的采样策略, 也就是确定使用 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值. 目前已有的 Sigma 采样策略^[7]有: 对称采样、单形采样、3阶矩偏度采样, 以及高斯分布 4 阶矩对称采样等. 其后, 为了保证输出变量协方差的半正定性, 提出了对上述基本采样策略进行比例修正的算法框架^[8].

Step 2 预测方程. 按照 Step1 所选择的采样策略, 由 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 \mathbf{P}_k 计算 Sigma 点 $\xi_{i,k}$ ($i = 0, 1, \dots, L$), 其通过非线性状态函数(1)传播为 $\gamma_{i,k+1|k}$, 由 $\gamma_{i,k+1|k}$ 可得一步状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 及误差协方差阵 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 如下:

$$\gamma_{i,k+1|k} = \mathbf{f}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{q}_k, \quad i = 0, 1, \dots, L,$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \gamma_{i,k+1|k} = \\ & \sum_{i=0}^L W_i^m \mathbf{f}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{q}_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} &= \sum_{i=0}^L W_i^c [(\gamma_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdot \\ & (\gamma_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T] + \mathbf{Q}_k. \end{aligned}$$

为了使滤波器具有应对系统模型不确定的鲁棒性, 在状态预测协方差阵 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 中引入渐消因子 λ_{k+1} , 相比于式(5)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k} &= \lambda_{k+1} \sum_{i=0}^L W_i^c [(\gamma_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdot \\ & (\gamma_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T] + \mathbf{Q}_k. \end{aligned} \quad (25)$$

利用 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$, 按照 Step 1 所选的采样策略计算 Sigma 点 $\xi_{i,k+1|k}^{(l)}$, $i = 0, 1, \dots, L$, 其通过非线性测量函数(2)传播为 $\chi_{i,k+1|k}^{(l)}$. 由 $\chi_{i,k+1|k}^{(l)}$ 可得输出预测 $\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$ 及自协方差阵 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$ 和互协方差 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$ 如下:

$$\begin{aligned}\chi_{i,k+1|k}^{(l)} &= \mathbf{h}_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{(l)}) + \mathbf{r}_{k+1}, \\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \chi_{i,k+1|k}^{(l)} = \\ & \sum_{i=0}^L W_i^m \mathbf{h}_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}^{(l)}) + \mathbf{r}_{k+1}, \\ \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} &= \sum_{i=0}^L W_i^c [(\chi_{i,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \cdot \\ & (\chi_{i,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^T] + \mathbf{R}_{k+1}, \\ \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)} &= \sum_{i=0}^L W_i^c [(\xi_{i,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdot \\ & (\chi_{i,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k})^T].\end{aligned}$$

已知 $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$ 和 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{(l)}$, 则式 (25) 中的渐消因子 λ_{k+1} 可通过式 (13), (23), (34) 和 (14) 计算得到。

已经求得渐消因子 λ_{k+1} , 利用 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 和 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 按照 Step1 所选的采样策略计算 Sigma 点 $\xi_{i,k+1|k}$, $i = 0, 1, \dots, L$, 其通过非线性测量函数 (2) 传播为 $\chi_{i,k+1|k}$. 由 $\chi_{i,k+1|k}$ 可得引入渐消因子之后的自协方差阵 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}$ 和互协方差 $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}$ 如下:

$$\begin{aligned}\chi_{i,k+1|k} &= \mathbf{h}_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}) + \mathbf{r}_{k+1}, \\ \bar{\chi}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \chi_{i,k+1|k} = \\ & \sum_{i=0}^L W_i^m \mathbf{h}_{k+1}(\xi_{i,k+1|k}) + \mathbf{r}_{k+1}, \\ \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} &= \sum_{i=0}^L W_i^c [(\chi_{i,k+1|k} - \bar{\chi}_{k+1|k}) \cdot \\ & (\chi_{i,k+1|k} - \bar{\chi}_{k+1|k})^T] + \mathbf{R}_{k+1}, \\ \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} &= \sum_{i=0}^L W_i^c [(\xi_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \cdot \\ & (\chi_{i,k+1|k} - \bar{\chi}_{k+1|k})^T].\end{aligned}$$

Step3 在获得新的量测后 \mathbf{z}_{k+1} , 利用式 (21) 和 (22) 进行 UTSTF 滤波更新, 有

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}), \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{-1}, \\ \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^{-1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}}^T = \\ & \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}} \mathbf{K}_{k+1}^T.\end{aligned}$$

由以上理论分析不难看出, 采用逼近精度更高的 UT 变换计算状态的后验均值和协方差, 既克服了 STF 一阶近似精度偏低的缺点, 又避免了计算雅可比矩阵的麻烦. UTSTF 无需导数运算, 其数值稳定性及估计精度较 STF 明显提高. 另外, UTSTF 通过在状态

协方差阵中引入渐消因子, 继承了 STF 关于系统模型不确定时鲁棒性强的优点, 其在模型参数失配、噪声统计时变等不确定情况下, 依然具有良好的估计性能。

4 仿真分析

情况 1 考虑如下所示的强非线性系统:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \\ \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cos(x_{2,k}) \\ 2x_{1,k}^2 e^{-0.005x_{2,k}} \\ x_{2,k}/(1 - 0.5 \sin(x_{1,k}x_{3,k})) \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{z}_k = x_{1,k} + e^{-5x_{2,k}x_{3,k}} + v_k, \quad (27)$$

其中 $\mathbf{w}_k = [w_{1,k} \ w_{2,k} \ w_{3,k}]^T$ 和 v_k 均为互不相关的高斯白噪声, 且理论上它们的统计特性如下所示:

$$\begin{cases} w_{i,k} \sim N\{0.1, 0.01 \sin(0.01k)\}, \\ v_k \sim N\{0.2, 0.04 \cos(0.01k)\}, \end{cases}$$

即 \mathbf{w}_k 和 v_k 具有时变噪声统计特性。

对上述带时变噪声统计的非线性系统 (26) 和 (27), 根据强跟踪滤波器的特性, 无论系统噪声 \mathbf{w}_k 和量测噪声 v_k 的先验统计是否准确, UTSTF 的状态估计效果都比较好. 一般情况下, 选择系统及量测噪声方差阵比先验值大一些, 这样就将许多未建模的误差包含进去, 使 UTSTF 变得更加简单可靠. 为此, 在实际仿真中取

$$q_k = 0.1, \mathbf{Q}_k = 0.01\mathbf{I}, r_k = 0.2, \mathbf{R}_k = 0.04. \quad (28)$$

设非线性系统 (26) 和 (27) 的理论初始值为

$$\mathbf{x}_0 = [-1 \ 0.5 \ 1]^T,$$

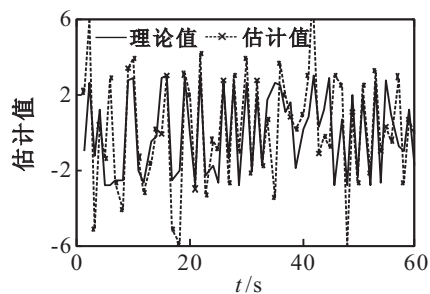
状态估计的初始值为

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [-1 \ 0.5 \ 1]^T, \mathbf{P}_0 = \mathbf{I},$$

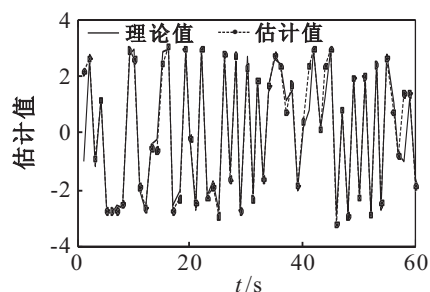
且 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 与 \mathbf{w}_k, v_k 互不相关。

分别采用 STF 及本文所设计的 UTSTF 对式 (26) 和 (27) 所示的非线性系统状态进行估计, 以状态 x_1 为例, 其估计及误差曲线如图 1 和图 2 所示。

不难看出, 在强非线性及时变噪声统计情况下, STF 对状态 x_1 的跟踪效果不佳, 而 UTSTF 依然能稳定快速地跟踪状态 x_1 的变化, 是因为 UT 变换对非线性状态后验均值和协方差的逼近精度高于雅可比矩阵的计算, 从而保证了 UTSTF 在强非线性状态估计过程中的滤波精度. 另外, 渐消因子的引入增强了 UTSTF 应对噪声统计变化的自适应能力, 从而保证了 UTSTF 在模型不确定时依然具有很强的收敛性. 状态 x_1 的估计误差及均方误差仿真曲线也充分验证了上述观点。

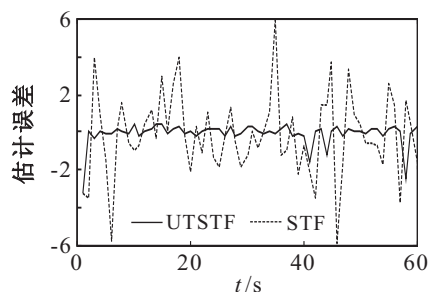


(a) STF下状态 x_1 估计值

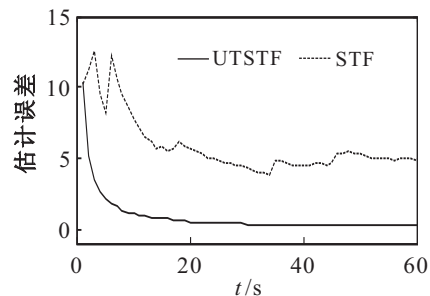


(b) UTSTF下状态 x_1 估计值

图1 状态 x_1 估计值



(a) 两种算法下状态 x_1 估计误差



(b) 两种算法下状态 x_1 均方估计误差

图2 状态 x_1 估计误差

情况2 考虑如下所示带模型参数的不可微强非线性系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos(a_k x_{2,k}) \\ 2x_{1,k}^2 e^{-0.05x_{2,k}} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k, \quad (29)$$

$$z_k = x_{1,k} - e^{-a_k x_{2,k}} + 2\text{sign}(\sin(x_{1,k})) + v_k. \quad (30)$$

其中: $\mathbf{w}_k = [w_{1,k} \ w_{2,k}]^T$ 和 v_k 均为互不相关的高斯白噪声, 其统计特性如式(28)所示; a_k 为未知待估计的模型参数; $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数, 即

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t \leq 0. \end{cases}$$

显然 $\text{sign}(\cdot)$ 不连续不可微.

为了估计参数 a_k , 需要进行状态扩维, 即

$$\mathbf{x}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ a_k \end{bmatrix}.$$

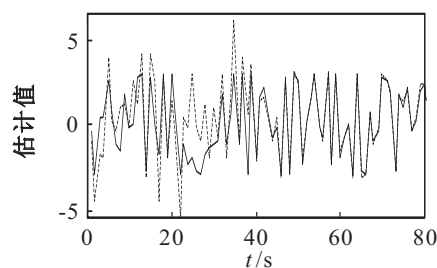
同时, 理论上取

$$\mathbf{x}_0 = [-0.5 \ 1]^T, \quad a_k = 3.$$

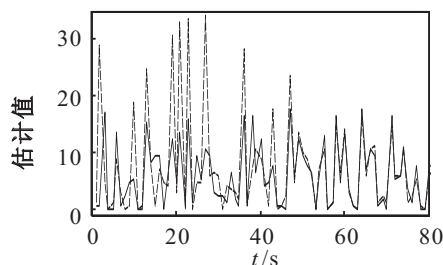
在实际仿真中取状态估计的初始值为

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = [-0.5 \ 1 \ 2]^T, \quad \hat{\mathbf{P}}_0^a = \mathbf{I},$$

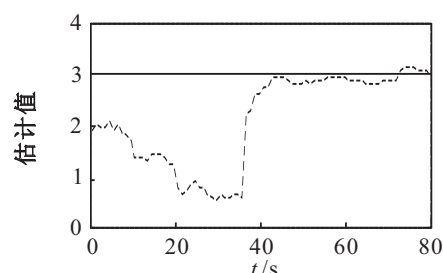
则状态及模型参数估计仿真如图3所示.



(a) UTSTF下状态 x_1 估计值



(b) UTSTF下状态 x_2 估计值



(c) UTSTF下状态模型参数 a_k 估计值
——理论值 ——估计值

图3 状态及模型参数估计值

从仿真图中不难发现, UTSTF滤波开始时, 因模型参数 a_k 未知不准确, 故其状态估计误差较大而滤波精度不佳, 但随着 UTSTF 大约从 45 s 开始对 a_k 的精确跟踪, 状态估计误差由大变小, 且逐渐趋于零. 这说明在量测函数不连续不可微及模型参数未知失配情况下, UTSTF 依然能实现对状态变化的有效跟踪, 且能准确估计出未知的模型参数 a_k , 证明了 UTSTF 在解决不连续不可微的非线性系统滤波问题时的有效性. 另外, STF 在计算雅可比矩阵时要求非线性函数必须连续可微, 故针对系统(29)和(30)的非线性滤波, STF 已经失效, 仿真过程中所出现的一

些不确定数值 (NaN) 也验证了上述观点.

5 结 论

针对 STF 所存在的理论局限性, 本文提出一种基于 UT 变换的强跟踪滤波器, 其以 STF 作为滤波器的基本理论框架, 推导了 STF 的等价表述. 在此基础上, 采用 Unscented 变换代替 STF 中的雅可比矩阵计算, 进行不同条件下的仿真分析. 仿真结果表明: UT-STF 不仅具有 UT 变换对强非线性系统状态后验分布近似精度高、容易实现的优点, 有效克服了 STF 的理论局限性, 而且兼顾 STF 关于系统模型不确定 (如噪声统计时变、模型参数失配等) 时鲁棒性强的特点. 特别地, UTSTF 避免了计算非线性函数的雅可比矩阵, 无需求非线性系统必须是连续可微的, 同样适用于不连续或不可微的非线性系统滤波.

参考文献(References)

- [1] 徐毓, 杨瑞娟, 周焰. 一种实现机动目标跟踪的 STF 动态模型 PDA 算法[J]. 电子学报, 2003, 31(7): 981-984.
(Xu Y, Yang R J, Zhou Y. An algorithm STF-PDA for maneuvering target tracking with dynamic model[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(7): 981-984.)
- [2] Maybeck P S. Stochastic models, estimation and control[M]. New York: Academic Press, 1979.
- [3] Zhou D H, Wang Q L. Strong tracking filtering of nonlinear systems with colored noise[J]. J of Beijing Institute of Technology, 1997, 17(3): 321-326.
- [4] Julier S J, Uhlmann J K. A new approach for filtering nonlinear system[C]. Proc of the 1995 American Control Conf. 1995: 1628-1632.
- [5] Julier S J, Uhlmann J K. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [6] 周东华, 叶银忠. 现代故障诊断与容错控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 60-68.
(Zhou D H, Ye Y Z. Modern fault diagnose and fault-tolerant control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000: 60-68.)
- [7] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器—UKF 综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 481-489.
(Pan Q, Yang F, Ye L, et al. Survey of a kind of nonlinear filters-UKF[J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 481-489.)
- [8] Julier S J. The scaled unscented transformation[C]. Proc of American Control Conf. Jefferson City, 2002: 4555-4559.
- [11] Jiang Y P, Fan Z P, Ma J. A method for group decision making with multi-granularity linguistic assessment information[J]. Information Sciences, 2008, 178(4): 1098-1109.
- [12] 姜艳萍, 樊治平. 基于不同粒度语言判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程学报, 2006, 21(3): 249-253.
(Jiang Y P, Fan Z P. Approach to group decision making with multi-granularity linguistic comparison matrices[J]. J of Systems Engineering, 2006, 21(3): 249-253.)
- [13] Xu Z S. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment[J]. Information Sciences, 2004, 168(1~4): 171-184.
- [14] 刘洋, 樊治平. 一种具有多粒度不确定语言短语的群决策方法[J]. 东北大学学报, 2009, 30(4): 601-604.
(Liu Y, Fan Z P. A group decision-making method with multi-granularity uncertain linguistic information[J]. J of Northeastern University, 2009, 30(4): 601-604.)
- [15] Chen X, Fan Z P. Study on assessment level of experts based on difference preference information[J]. Systems Engineering-Theory Practice, 2007, 27(2): 27-35.
- [16] Ma J, Fan Z P, Jiang Y P, et al. A method for repairing the inconsistency of fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(1): 20-33.
- [17] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
(Li R J. Fuzzy multiple criteria decision making theory and application[M]. Beijing: Science Press, 2002.)

(上接第 1062 页)