文章编号：1001-0920(2009)12-1899-04

一类具有状态反馈 NCS 的 H_∞ 优化控制

江　兵，张崇巍
（合肥工业大学 电气与自动化工程学院，合肥 230009）

摘　要：研究一类网络控制系统(NCS)的 H_∞ 优化控制问题.状态反馈是兼顾系统性能和敏感性的最有效的控制方式，因此，针对一类不确定时延和有限能量干扰输入的状态反馈 NCS，将其建模为不确定的线性时滞系统，并利用 Lyapunov 理论和线性矩阵不等式(LMI)研究 H_∞ 优化控制问题.首先给出 NCS 的鲁棒稳定的充分条件；然后给出 NCS 状态反馈次优和最优 H_∞ 控制律的设计方法.仿真结果表明了该方法的可行性和有效性.

关键词：网络控制系统；H_∞ 控制；线性矩阵不等式；不确定时延；时滞系统
中图分类号：TP13；TP273　　**文献标识码**：A

H_∞ optimal control of a class of NCS with state-feedback

JIANG Bing , *ZHANG Chong-wei*
(School of Electric Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China. Correspondent: JIANG Bing, E-mail: jbhfut@163.com)

Abstract: The H_∞ optimal control problems of a class of networked control systems (NCS) is studied. The state-feedback is the most effective control mode, which combines system function and sensibility. Therefore, a class of state-feedback NCS with uncertain time-delay and limited energy disturbance input is modeled as the uncertain linear time-delay system. Then by using the Lyapunov theory and LMI, the problems about the H_∞ optimal control are researched. The sufficient condition is first given for the robust stability of networked control system, and then the design methods of NCS state-feedback suboptimum and optimum H_∞ control laws are obtained consequently. The simulation results show the feasibility and effectiveness of the results.

Key words: Networked control systems; H_∞ control; LMI; Uncertain time-delay; Time-delay system

1 引　言

由于现场总线和工业以太网等工业通信网络的引入，使得网络控制系统(NCS)的分析与设计较为复杂，同时也给控制系统带来很多问题.最明显的是信息传输过程中存在的时延对系统稳定性和性能的影响.网络时延的存在，不但会降低系统的控制性能，有时甚至使系统不稳定，因此，近年来 NCS 的分析和设计引起了众多学者的关注. NCS 的 H_∞ 控制问题一直是研究 NCS 的一个热点问题[1-5].

本文针对不超过一个采样周期的不确定时延，考虑包括过程和测量噪声在内的有限能量的外部扰动，基于一定的假设条件，研究状态反馈 NCS 的 H_∞ 控制问题.文献[4]和[5]采用的是动态输出反馈；考虑到状态反馈是兼顾系统性能和敏感性的最有效的控制方式，本文采用的是状态反馈[6].这种研究方式可作为以上文献的有益补充.

2 NCS 的建模

具有干扰输入的 NCS 如图 1 所示.其中：$z(k)$，$y(k)$，$\omega(k)$，$u(k)$ 分别是控制输出、测量输出、干扰输入以及控制输入[7]；τ_{sc}^k 为传感器到控制器的网络时延；τ_{ca}^k 为控制器到执行器的网络时延；整个闭合回路第 k 周期的网络时延 $\tau_k = \tau_{sc}^k + \tau_{ca}^k$（忽略计算时延）不确定，但大小不超过一个周期.再作以下假设：传感器时钟驱动，以周期 T 采样；控制器和执行器事件驱动；数据单包传输，不存在数据包时序错乱和丢失. NCS 被控对象可表示为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + H_0\omega(t),\\ z(t) = Cx(t) + H_1\omega(t).\end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t) \in R^n$ 为对象状态；$u(t) \in R^r$ 为控制输入；$z(t) \in R^m$ 为控制输出；$\omega(t) \in R^q$ 为干扰输入；A, B, C, H_0, H_1 为适维的常矩阵.

对于任意满足 $F^{\mathrm{T}}(\tau_k)F(\tau_k) \leqslant I$ 约束的不确定

收稿日期：2009-02-08；**修回日期**：2009-06-14.

作者简介：江兵(1970—)，男，安徽和县人，讲师，博士生，从事网络控制系统、工业通信网络的研究；张崇巍(1945—)，男，安徽巢湖人，教授，博士生导师，从事控制理论与控制工程、电力电子与电力传动等研究.

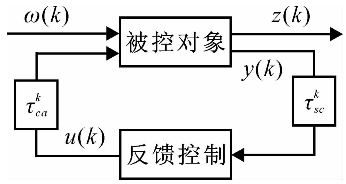

图 1　具有干扰输入的网络控制系统

时延,式(1) 可以变换为下式:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + (B_0 + DFE)u(k) + \\ \qquad (B_1 - DFE)u(k-1) + H_0\omega(k), \\ z(k) = Cx(k) + H_1\omega(k). \end{cases} \tag{2}$$

其中:B_0, B_1, D, E 和 $F = F(\tau_k)$ 的求法见文献[8].

3　H_∞ 次优控制

定义 1　对于给定的正常数 γ,系统(2) 在状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)$ 作用下的闭环系统鲁棒渐近稳定,且在零初始条件 $x(t) = 0(t \leqslant 0)$ 下,干扰输入 $\omega(k)$ 和控制输出 $z(k)$ 满足 H_∞ 范数约束条件 $\| z(k) \|_2 \leqslant \gamma \| \omega(k) \|_2$. 则称系统(2) 可实现 γ- 次优状态反馈 H_∞ 镇定,系统 H_∞ 扰动抑制度为 γ,相应的控制律为 γ- 次优状态反馈控制律. 进一步,优化求解使 γ 最小的状态反馈 H_∞ 控制律称为 γ- 最优状态反馈 H_∞ 控制律[9].

引理 1　设 W, M, N, F 为适维的实矩阵,其中 F 满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$,$W$ 为对称矩阵,则

$$W + N^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} + MFN < 0,$$

当且仅当存在常数 $a > 0$,使得 $W + a^{-1}N^{\mathrm{T}}N + aMM^{\mathrm{T}} < 0$.

引理 2　当不考虑干扰输入时($\omega(t) = 0$),如果存在矩阵 K,对称正定矩阵 P 和 Q,矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} M & \Omega_1^{\mathrm{T}}P\Omega_2 \\ \Omega_2^{\mathrm{T}}P\Omega_1 & \Omega_2^{\mathrm{T}}P\Omega_2 - Q \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

成立. 其中

$$M = \Omega_1^{\mathrm{T}}P\Omega_1 - P + K^{\mathrm{T}}QK + S + K^{\mathrm{T}}RK,$$

$$\Omega_1 = A_d + B_0K + DFEK,$$

$$\Omega_2 = B_1 - DFE.$$

则系统(2) 在状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)$ 的作用下渐近稳定.

证明　对于具有不确定时延 $\tau_k \in [0, T]$ 且满足 $F(\tau_k)^{\mathrm{T}}F(\tau_k) \leqslant I$ 关系的被控系统(2),若存在对称正定矩阵 P, Q 和矩阵 K,使矩阵不等式(3) 成立. 再取控制律 $u(k) = Kx(k)$,则导出的闭环系统为

$$x(k+1) = A_d x(k) + (B_0K + DFEK)x(k) + (B_1K - DFEK)x(k-1).$$

选取一个 Lyapunov 函数

$$V(k) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k) + x^{\mathrm{T}}(k-1)K^{\mathrm{T}}QKx(k-1), \tag{4}$$

则 $V(k)$ 是正定的,沿闭环系统的任意轨线,$V(k)$ 的前向差分为

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Kx(k-1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Omega_1^{\mathrm{T}}P\Omega_1 - P + K^{\mathrm{T}}QK & \Omega_1^{\mathrm{T}}P\Omega_2 \\ \Omega_2^{\mathrm{T}}P\Omega_1 & \Omega_2^{\mathrm{T}}P\Omega_2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ Kx(k-1) \end{bmatrix}.$$

由条件(3) 可得 $\Delta V(k) < 0$. 由 Lyapunov 稳定性理论知,闭环系统(4) 是渐近稳定的. □

定理 1　对于给定的抑制度 $\gamma > 0$,若存在正定矩阵 P 和 Q,标量 a,使得系统(2) 在状态反馈控制律 $u(k) = Kx(k)$ 的作用下,满足下列条件:

$$\begin{bmatrix} -P + K^{\mathrm{T}}QK + C^{\mathrm{T}}C & 0 & C^{\mathrm{T}}H_1 & A_d^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}B_0^{\mathrm{T}} & (EK)^{\mathrm{T}} \\ 0 & -Q & 0 & B_1^{\mathrm{T}} & -E^{\mathrm{T}} \\ H_1^{\mathrm{T}}C & 0 & H_1^{\mathrm{T}}H_1 - \gamma^2 I & H_0^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_d + B_0K & B_1 & H_0 & aDD^{\mathrm{T}} - P^{-1} & 0 \\ EK & -E & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

则系统(2) 可实现 γ- 次优状态反馈 H_∞ 镇定.

证明　令

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)],$$

根据定义 1,使系统(2) 实现 γ- 次优状态反馈 H_∞ 镇定,则 $\| z(k) \|_2 \leqslant \gamma \| \omega(k) \|_2$,因而 $J \leqslant 0$. 选择 Lyapunov 函数为(4),根据引理 2,该系统鲁棒渐近稳定. 在零初始条件下,$\forall \omega(k) \in L_2[0, \infty)$,有 $J \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} [z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k) + \Delta V(k)]$. 而

$$x(k+1) = A_d x(k) + (B_0K + DFEK)x(k) + (B_1K - DFEK)x(k-1) = \Omega_1 x(k) + \Omega_2 Kx(k-1) + H_0\omega(k).$$

所以

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Kx(k-1) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \widetilde{N} \begin{bmatrix} x(k) \\ Kx(k-1) \\ \omega(k) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{N} = \begin{bmatrix} \Omega_1^{\mathrm{T}}P\Omega_1 - P + K^{\mathrm{T}}QK & \Omega_1^{\mathrm{T}}P\Omega_2 & \Omega_1^{\mathrm{T}}PH_0 \\ \Omega_2^{\mathrm{T}}P\Omega_1 & \Omega_2^{\mathrm{T}}P\Omega_2 - Q & \Omega_2^{\mathrm{T}}PH_0 \\ H_0^{\mathrm{T}}P\Omega_1 & H_0^{\mathrm{T}}P\Omega_2 & H_0^{\mathrm{T}}PH_0 \end{bmatrix}.$$

因而

$$z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\mathrm T}(k)\omega(k)+\Delta V(k)=$$

$$\begin{bmatrix} x(k)\\ Kx(k-1)\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} \Omega_1^{\mathrm T}P\Omega_1-P+K^{\mathrm T}QK+C^{\mathrm T}C & \Omega_1^{\mathrm T}P\Omega_2 & \Omega_1^{\mathrm T}PH_0+C^{\mathrm T}H_1\\ \Omega_2^{\mathrm T}P\Omega_1 & \Omega_2^{\mathrm T}P\Omega_2-Q & \Omega_2^{\mathrm T}PH_0\\ H_0^{\mathrm T}P\Omega_1+H_1^{\mathrm T}C & H_0^{\mathrm T}P\Omega_1 & H_0^{\mathrm T}PH_0+H_1^{\mathrm T}H_1-\gamma^2 I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ Kx(k-1)\\ \omega(k)\end{bmatrix}.$$

令

$$\widetilde{M}=\begin{bmatrix} \Omega_1^{\mathrm T}P\Omega_1-P+K^{\mathrm T}QK+C^{\mathrm T}C & \Omega_1^{\mathrm T}P\Omega_2 & \Omega_1^{\mathrm T}PH_0+C^{\mathrm T}H_1\\ \Omega_2^{\mathrm T}P\Omega_1 & \Omega_2^{\mathrm T}P\Omega_2-Q & \Omega_2^{\mathrm T}PH_0\\ H_0^{\mathrm T}P\Omega_1+H_1^{\mathrm T}C & H_0^{\mathrm T}P\Omega_1 & H_0^{\mathrm T}PH_0+H_1^{\mathrm T}H_1-\gamma^2 I\end{bmatrix},$$

再设 $\tilde{z}^{\mathrm T}(k)=[x^{\mathrm T}(k),(Kx(k-1))^{\mathrm T},\omega^{\mathrm T}(k)]$，因而 $J\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}[\tilde{z}^{\mathrm T}(k)\widetilde{M}\tilde{z}(k)]$. 若使 $J\leqslant 0$，则 $\widetilde{M}<0$，即有

$$\begin{bmatrix} -P+K^{\mathrm T}QK+C^{\mathrm T}C & 0 & C^{\mathrm T}H_1\\ 0 & -Q & 0\\ H_1^{\mathrm T}C & 0 & H_1^{\mathrm T}H_1-\gamma^2 I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Omega_1^{\mathrm T}\\ \Omega_2^{\mathrm T}\\ H_0^{\mathrm T}\end{bmatrix}P[\Omega_1\ \Omega_2\ H_0]<0.$$

根据 Schur 补性质，上式转换为

$$\begin{bmatrix} -P+K^{\mathrm T}QK+C^{\mathrm T}C & 0 & C^{\mathrm T}H_1 & \Omega_1^{\mathrm T}\\ 0 & -Q & 0 & \Omega_2^{\mathrm T}\\ H_1^{\mathrm T}C & 0 & H_1^{\mathrm T}H_1-\gamma^2 I & H_0^{\mathrm T}\\ \Omega_1 & \Omega_2 & H_0 & -P^{-1}\end{bmatrix}<0.$$

将 Ω_1 和 Ω_2 展开，再设

$$\begin{bmatrix} -P+K^{\mathrm T}QK+C^{\mathrm T}C & 0 & C^{\mathrm T}H_1 & A_d^{\mathrm T}+K^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T}\\ 0 & -Q & 0 & B_1^{\mathrm T}\\ H_1^{\mathrm T}C & 0 & H_1^{\mathrm T}H_1-\gamma^2 I & H_0^{\mathrm T}\\ A_d+B_0K & B_1 & H_0 & -P^{-1}\end{bmatrix}$$

为 Ω_3，因而

$$\Omega_3+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\D\end{bmatrix}F[EK\quad -E\quad 0\quad 0]+[EK\quad -E\quad 0\quad 0]^{\mathrm T}F^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\D\end{bmatrix}^{\mathrm T}<0.$$

根据引理 1，上式转换为

$$\Omega_3+a\begin{bmatrix}0\\0\\0\\D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\D\end{bmatrix}^{\mathrm T}+a^{-1}[EK\quad -E\quad 0\quad 0]^{\mathrm T}\times[EK\quad -E\quad 0\quad 0]<0.$$

再根据 Schur 补性质，得到式(5). □

定理 2　对于系统(2)，若存在对称正定矩阵 X 和 M，矩阵 W，标量 a 和 μ，使得下列矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & 0 & (A_dX)^{\mathrm T}+(B_0W)^{\mathrm T} & (EW)^{\mathrm T} & (CX)^{\mathrm T} & W^{\mathrm T}\\ 0 & -M & 0 & MB_1^{\mathrm T} & -(EM)^{\mathrm T} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mu I & H_0^{\mathrm T} & 0 & H_1^{\mathrm T} & 0\\ A_dX+B_0W & B_1M & H_0 & aDD^{\mathrm T}-X & 0 & 0 & 0\\ EW & -EM & 0 & 0 & -aI & 0 & 0\\ CX & 0 & H_1 & 0 & 0 & -I & 0\\ W & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M\end{bmatrix}<0. \tag{6}$$

则 γ- 次优状态反馈 H_∞ 控制律为 $u(k)=WX^{-1}x(k)$，且该系统 H_∞ 扰动抑制度为 $\gamma=\sqrt{\mu}$.

证明　对于系统(2)，由定理 1 可知，γ- 次优状态反馈 H_∞ 控制律存在，则式(5) 成立.

由 Schur 补性质，式(5) 可转换为

$$\begin{bmatrix} -P+K^{\mathrm T}QK & 0 & 0 & A_d^{\mathrm T}+K^{\mathrm T}B_0^{\mathrm T} & (EK)^{\mathrm T} & C^{\mathrm T}\\ 0 & -Q & 0 & B_1^{\mathrm T} & -E^{\mathrm T} & 0\\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & H_0^{\mathrm T} & 0 & H_1^{\mathrm T}\\ A_d+B_0K & B_1 & H_0 & aDD^{\mathrm T}-P^{-1} & 0 & 0\\ EK & -E & 0 & 0 & -aI & 0\\ C & 0 & H_1 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0.$$

上式左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, Q^{-1}, I, I, I, I\}$，再令 $X = P^{-1}$，$W = KP^{-1}$，$M = Q^{-1}$，可得

$$\begin{bmatrix} -X + W^{\mathrm{T}}M^{-1}W & 0 & 0 & (A_dX)^{\mathrm{T}} + (B_0W)^{\mathrm{T}} & (EW)^{\mathrm{T}} & (CX)^{\mathrm{T}} \\ 0 & -M & 0 & MB_1^{\mathrm{T}} & -(EM)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & H_0^{\mathrm{T}} & 0 & H_1^{\mathrm{T}} \\ A_dX + B_0W & B_1M & H_0 & aDD^{\mathrm{T}} - X & 0 & 0 \\ EW & -EM & 0 & 0 & -aI & 0 \\ CX & 0 & H_1 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

再根据 Schur 补性质，设 $\mu = \gamma^2$，得到式(6).

若式(6)有可行解 X, M, W, a 和 μ，则可得到 γ-次优状态反馈 H_∞ 控制律为 $u(k) = WX^{-1}x(k)$，且该系统 H_∞ 扰动抑制度为 $\gamma = \sqrt{\mu}$. □

4 最优控制

推论 1 对于系统(2)，若下面的优化问题有可行解：

$$\min_{a>0, \mu>0, X>0, M>0} \mu,$$
$$\text{s.t. 式(6)}, \tag{7}$$

则 γ-最优状态反馈 H_∞ 控制律为 $u^*(k) = WX^{-1}x(k)$，而最小 H_∞ 扰动抑制度 $\gamma^* = \sqrt{\mu^*}$.

使用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解优化问题(7)，得到最优解 $\mu^*, a^*, X^*, M^*, W^*$ 等，从而得到 γ-最优状态反馈 H_∞ 控制律和最小 H_∞ 扰动抑制度[5,10].

5 仿真算例

考虑 NCS 被控对象如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \\ \qquad \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \omega(t), \\ z(t) = [0.01 \quad 0]x(t) + [-1 \quad -2]\omega(t). \end{cases}$$

假设该 NCS 的采样周期为 10 ms，通信网络的数据传输时延不确定，但满足 $\tau_k \leqslant T$.

由于 A 的特征值为 -1 和 -2，选取的对应特征向量为 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$，根据文献[7]可得

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0099 \\ -0.0197 & 0.9703 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.0099 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

在 $\tau_k \leqslant T$ 内，为保证 $\mathrm{e}^{\lambda_i(T-\tau_k-\alpha_i)} < 1\ (i = 1, 2)$，选择 $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$，则

$$D = \begin{bmatrix} -2.7183 & -3.6945 \\ 2.7183 & 7.3891 \end{bmatrix},$$
$$F(\tau_k) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-1(0.01-\tau_k+1)}, \mathrm{e}^{-2(0.01-\tau_k+1)}),$$

其中 $F(\tau_k)$ 满足 $F(\tau_k)^{\mathrm{T}}F(\tau_k) \leqslant I$.

利用 mincx 求解，应用定理 2 和推论 1，得到 γ-最优状态反馈 H_∞ 控制的可行解分别为

$$\mu^* = 5.8156,\ a^* = 6.9465 \times 10^{-9},$$
$$W^* = 10^{-8}[-0.01499 \quad 0.0282],$$
$$M^* = 3.3957 \times 10^{-9},$$
$$X^* = \begin{bmatrix} 0.7003 & -0.1197 \\ -0.1197 & 0.4826 \end{bmatrix}.$$

因此，γ-最优状态反馈 H_∞ 控制律为 $u^*(k) = WX^{-1}x(k) = 10^{-8}[-0.2131 \quad 0.0056]x(k)$，最小 H_∞ 扰动抑制度 $\gamma^* = \sqrt{\mu^*} = 2.4116$. 与文献[5]相比，$\gamma$ 的最小值更小. γ 越小，表明系统的性能越好. 再设 $x_0 = [3.5 \ -2.3]^{\mathrm{T}}$，$\omega(t) = \dfrac{10}{(t+1)^2}[1 \ 1]$，在控制器 $K = 10^{-8}[-0.2131 \quad 0.0056]$ 的作用下，系统的状态响应曲线如图 2 所示. 可见，系统在外部扰动的作用下，不仅能够稳定，而且具有很好的性能.

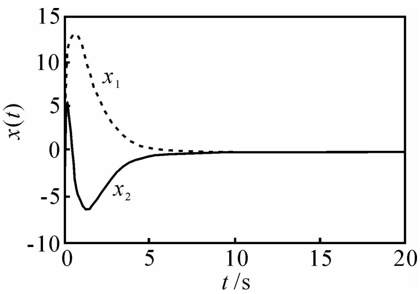

图 2 闭环系统状态响应曲线图

6 结 论

本文针对一类具有不确定时延和外部扰动的状态反馈 NCS，将其建模为不确定的线性时滞系统，给出了 NCS 状态反馈次优和最优 H_∞ 控制律的设计方法. 仿真结果表明了该方法的有效性和可行性. 由于在状态可测的情况下采用状态反馈，使系统运行兼顾了性能和鲁棒性，实用价值较为明显.

参考文献(References)

[1] Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. Automatica, 2005, 41(6): 999-1007.

[2] Zhang L, Huang H, Lam J. H_∞ model reduction of Markovian jump linear systems[J]. Systems Control Letters, 2003, 50(2): 103-118.

（下转第 1908 页）