

文章编号: 1001-0920(2009)12-1805-05

基于不动点的新弱化缓冲算子的研究

吴正朋^{1,2}, 刘思峰², 崔立志²

(1. 中国传媒大学 应用数学系, 北京 100080; 2. 南京航空航天大学 经济管理学院, 南京 210016)

摘要: 在灰色系统理论缓冲算子公理体系下, 基于反函数与广义时间序列的平均发展速度, 构造了一类新的弱化缓冲算子, 并研究其一些特性和内在联系, 有效解决了冲击扰动数据序列在建模预测过程中经常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题. 实例分析结果表明了该类算子的有效性和实用性.

关键词: 时间序列; 平均发展速度; 不动点; 弱化缓冲算子

中图分类号: N94 **文献标识码:** A

Study on new weakening buffer operators

WU Zheng-peng^{1,2}, LIU Si-feng², CUI Li-zhi²

(1. Department of Applied Mathematics, Communication University of China, Beijing 100080, China; 2. College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China.
Correspondent: WU Zheng-peng, E-mail: wuzhengpeng@126.com)

Abstract: Under the axiomatic system of buffer operator in grey system theory, some new weakening buffer operators are established based on average tempo of time series. Meanwhile, the characters and the inherent relation among them are studied. The problem that there are some contradictions between quantitative analysis and qualitative analysis in pretreatment for vibration data sequences is resolved effectively. A practical example shows the effectiveness and practicability of the operators.

Key words: Time series; Average tempo; Fixed point; Weakening buffer operator

1 引言

无论是实验数据还是统计数据, 在选择模型之前都必须对所获得的数据进行分析, 否则就会出现定量预测结果与定性分析结论不相符的情况. 问题的原因往往不在于所选模型的优劣, 而是由于系统行为数据因系统本身受到某种外在冲击而失真. 因此, 寻求定量预测与定性分析的结合点, 设法排除系统行为数据所受到的冲击干扰, 还原数据本来面目, 从而提高预测的精度, 乃是摆在每一位预测工作者面前的一项重要任务^[1].

灰色系统理论通过对社会、经济、生态等系统的原始数据挖掘和整理来寻求其变化规律, 是一种从数据中寻找数据规律的理论体系. 灰色系统理论认为, 尽管客观系统表象复杂, 数据离乱, 但它是有整体功能的, 因此必然蕴涵某种内在规律, 关键在于如何选择适当的方法去挖掘它和利用它. 刘思峰^[2-4]提出的缓冲算子理论, 可以对所获得的数据序列经过

某种生成, 弱化其随机性, 显示其规律性, 成功地排除了外在冲击干扰, 得到了能够反映系统变化规律的数据序列.

冲击扰动因素对系统行为数据序列的干扰, 既有加快数据的发展趋势或使数据的振荡幅度变大, 也有减缓数据的发展趋势或使数据序列的振荡幅度变小. 为排除这些冲击因素的干扰, 文献[5-7]提出了一种实用弱化缓冲算子; 文献[8, 9]构造了一种强化缓冲算子.

本文在上述工作的基础上, 根据“新信息优先利用”的原理和缓冲算子三公理, 提出一类新的弱化缓冲算子, 并研究其特性及各种弱化缓冲算子之间的内在关系, 从而使序列前一部分增长(减缓)速度过快, 而后一部分增长(衰减)速度过慢的冲击扰动系统数据序列, 在建模预测过程中常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题得到有效解决.

2 基本概念

收稿日期: 2008-12-21; 修回日期: 2009-04-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037); 南京航空航天大学创新集体和科研创新基金项目(Y0488-091).

作者简介: 吴正朋(1964—), 男, 安徽巢湖人, 博士后, 从事管理科学与工程、数量经济学等研究; 刘思峰(1956—), 男, 郑州人, 教授, 博士生导师, 从事管理科学与工程、系统工程等研究.

定义 1^[1] 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统行为数据序列, 如果:

1) 若 $\forall k = 2, 3, \dots, n, x(k) - x(k-1) > 0$, 则称 X 为单调增长序列;

2) 若 $\forall k = 2, 3, \dots, n, x(k) - x(k-1) < 0$, 则称 X 为单调衰减序列;

3) 若 $\exists k, k' \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, 有 $x(k) - x(k-1) > 0, x(k') - x(k'+1) < 0$, 则称 X 为随机振荡序列. 令

$$M = \max\{x(k) \mid k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

$$m = \min\{x(k) \mid k \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

称 $M - m$ 为序列 X 的振幅.

定义 2^[1] 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统行为数据序列, D 为作用于 X 的算子, X 经过 D 作用后记为

$$XD = (x(1)d, x(2)d, \dots, x(n)d).$$

则称 D 为序列算子, 称 XD 为一阶算子作用序列.

序列算子作用可以多次进行. 相应地, 若 D_1, D_2, D_3 都为序列算子, 则称 $D_1 D_2$ 为二阶算子作用序列, 等等.

公理 1^[1] (不动点公理) 设 X 为系统行为数据序列, D 为序列算子, 则 D 满足 $x(n)d = x(n)$.

不动点公理限定在序列算子作用下, 系统行为数据序列中的数据 $x(n)$ 保持不变, 即运用序列算子对系统行为数据进行调整时, 不会改变 $x(n)$.

公理 2^[1] (信息充分利用公理) 系统行为数据序列 X 中的每一个数据 $x(k) (k = 1, 2, \dots, n)$ 都应充分参与算子作用的全过程.

信息充分利用公理限定, 任何序列算子都应以现有序列中的信息为基础进行定义, 而不允许抛开原始数据序列.

公理 3^[1] (解析化、规范化公理) 任意的 $x(k)d, k = 1, 2, \dots, n$, 都可以由一个统一的 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ 初等解析式表达.

解析化、规范化公理要求, 由系统行为数据序列得到算子作用序列的程序应清晰、规范、统一且尽可能简化, 以便于计算出算子作用序列, 并使计算易于在计算机上实现.

定义 3^[1] 称上述 3 个公理为缓冲算子三公理, 满足缓冲算子三公理的序列算子称为缓冲算子, 一阶、二阶、... 缓冲算子作用序列称为一阶、二阶、... 缓冲序列.

定理 1^[1] 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统行为数据序列, 缓冲序列记为 $XD = (x(1)d, x(2)d, \dots, x(n)d)$, 则:

1) 当 X 为单调增长序列时, D 为弱化缓冲算子

$$\Leftrightarrow x(k)d \geq x(k), k = 1, 2, \dots, n;$$

2) 当 X 为单调衰减序列时, D 为强化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k)d \leq x(k), k = 1, 2, \dots, n;$

3) 当 X 为振荡序列时, D 为弱化缓冲算子, 则

$$\max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\},$$

$$\min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\} \geq \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\}.$$

从上述定理可以看出, 单调增长序列在弱化算子作用下, 数据膨胀; 单调衰减序列在强化缓冲算子作用下, 数据萎缩.

3 一类新的弱化缓冲算子的构造

定理 2 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统原始行为数据序列, $x(k) > 0, k = 1, 2, \dots, n, f$ 为一严格单调递增函数, g 为其反函数, $f > 0$. 其缓冲序列为 $XD_1 = (x(1)d_1, x(2)d_1, \dots, x(n)d_1)$, 其中

$$x(k)d_1 = g\left[f(x(k))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\right],$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列和振荡序列时, D_1 都为弱化缓冲算子.

证明 容易验证, D_1 满足缓冲算子三公理, 所以, D_1 为缓冲算子. 下面证明 D_1 为弱化缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 即

$$0 \leq x(k) \leq \dots \leq x(n).$$

因 f 为一严格单调递增函数, $f > 0$, 故有

$$0 \leq f(x(k)) \leq \dots \leq f(x(n)),$$

$$\left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} \geq 1,$$

$$f(x(k))\left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} \geq f(x(k)).$$

又因 g 为 f 的反函数, 则有

$$x(k)d_1 = g\left\{f(x(k))\left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\right\} \geq$$

$$g[f(x(k))] = x(k).$$

由定理 1 知, 缓冲算子 D_1 为弱化缓冲算子.

2) 当 X 为单调衰减序列时, 即

$$x(k) \geq \dots \geq x(n) \geq 0.$$

因 f 为一严格单调递增函数, $f > 0$, 故有

$$f(x(k)) \geq \dots \geq f(x(n)) \geq 0,$$

$$\left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} \leq 1,$$

$$f(x(n))\left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} \leq f(x(k)).$$

又因 g 为 f 的反函数, 则有

$$x(k)d_1 = g\left\{f(x(k))\left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\right\} \leq$$

$$g[f(x(k))] = x(k).$$

由定理 1 知, 缓冲算子 D_1 为弱化缓冲算子.

3) 若 X 为振荡序列时, 设

$$\begin{aligned} x(k) &= \max\{x(i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \\ x(h) &= \min\{x(i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}, \\ x(k) &\geq x(1), \dots, x(n), \\ x(h) &\leq x(1), \dots, x(n). \end{aligned}$$

由 $x(k) \geq x(n), x(h) \leq x(n)$, 又因 f 为一严格单调递增函数, $f > 0$, 故有

$$\begin{aligned} f(x(k)) &\geq f(x(n)), f(x(h)) \leq f(x(n)); \\ \left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} &\leq 1, \left[\frac{f(x(n))}{f(x(h))}\right]^{\frac{1}{n-h+1}} \geq 1; \\ f(x(k)) \left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} &\leq f(x(k)), \\ f(x(h)) \left[\frac{f(x(n))}{f(x(h))}\right]^{\frac{1}{n-h+1}} &\geq f(x(h)). \end{aligned}$$

又因 g 为 f 的反函数, 则有

$$\begin{aligned} x(k)d_1 &= g\left\{f(x(k)) \left[\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}}\right\} \leq \\ &g[f(x(k))] = x(k), \\ x(h)d_1 &= g\left\{f(x(h)) \left[\frac{f(x(n))}{f(x(h))}\right]^{\frac{1}{n-h+1}}\right\} \geq \\ &g[f(x(h))] = x(h). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\} &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\}, \\ \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\} &\geq \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\}. \end{aligned}$$

由定理 1 知, 缓冲算子 D_1 为弱化缓冲算子. \square

定理 3 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统原始行为数据序列, $x(k) > 0, k = 1, 2, \dots, n, f$ 为一严格单调递增函数, g 为其反函数, $f > 0$. 其缓冲序列为 $XD_2 = (x(1)d_2, x(2)d_2, \dots, x(n)d_2)$, 其中

$$\begin{aligned} x(k)d_2 &= \\ g\left[\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n f(x(i)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right], \\ &k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列和振荡序列时, D_2 都为弱化缓冲算子.

证明 容易验证, D_2 满足缓冲算子三公理, 所以 D_2 为缓冲算子. 下面证明 D_2 为弱化缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 即

$$0 \leq x(k) \leq \dots \leq x(n).$$

因 f 为一严格单调递增函数, $f > 0$, 故有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x(k)) \leq \dots \leq f(x(n)), \\ \left[\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right]^{\frac{1}{n-i+1}} &\geq 1, \\ f(x(i)) \left[\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right]^{\frac{1}{n-i+1}} &\geq f(x(i)), \\ \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n f(x(i)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}} &\geq f(x(i)). \end{aligned}$$

又因 g 为 f 的反函数, 则有

$$\begin{aligned} x(k)d_2 &= \\ g\left[\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n f(x(i)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right] &\geq \\ g[f(x(k))] &= x(k). \end{aligned}$$

由定理 1 知, 缓冲算子 D_2 为弱化缓冲算子.

可仿定理 2 证明, 当 X 为单调衰减序列和振荡序列时, D_2 都为弱化缓冲算子. \square

定理 4 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统原始行为数据序列, $x(k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n, D_1$ 和 D_2 为弱化缓冲算子. 如定理 2 和定理 3 所述, 则:

- 1) 当 X 为单调增长序列时
 $x(k)d_1 \geq x(k)d_2, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\};$
- 2) 当 X 为单调衰减序列时
 $x(k)d_1 \leq x(k)d_2, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$

证明 1) 当 X 为单调增长序列时, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, 有

$$0 \leq x(k) \leq \dots \leq x(n).$$

因 f 为一严格单调递增函数, $f > 0$, 故有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x(k)) \leq \dots \leq f(x(n)), \\ \frac{f(x(k+1)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k+1))}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{f(x(k)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}} &= \\ \frac{f(x(k+1)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k+1))}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{f(x(k)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k}} \times \frac{f(x(n))}{f(x(k))}} &\leq \\ \frac{f(x(k+1)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k+1))}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{f(x(k)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k}}} &= \\ \left[\frac{f(x(k))}{f(x(k+1))}\right]^{\frac{1}{n-k+1}} &\leq 1. \end{aligned}$$

又因 g 为 f 的反函数, 则

$$\frac{x(k+1)d_1}{x(k)d_1} \leq 1.$$

所以 $\{x(k)d_1 \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ 为递减序列. 有

$$\begin{aligned} x(k)d_2 &= \\ g\left[\frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n f(x(i)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right] &= \\ g\left[\frac{f(x(k)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}{n-k+1} + \right. \\ \left. \frac{f(x(k+1)) \left(\frac{f(x(n))}{f(x(k+1))}\right)^{\frac{1}{n-k}}}{n-k} + \right. \\ \left. \dots + \frac{f(x(n))}{n-k+1}\right] &\leq \end{aligned}$$

$$g\left[\frac{f(x(k))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}{n-k+1} + \dots + \frac{f(x(k))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}}{n-k+1}\right] = g\left[f(x(k))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(k))}\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\right] = x(k)d_1.$$

即 $x(k)d_1 \geq x(k)d_2$.

2) 当 X 为单调衰减序列时, 同理可证 $x(k)d_1 \leq x(k)d_2$. \square

定理 5 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统原始行为数据序列, $x(k) > 0, k = 1, 2, \dots, n, f$ 为一严格单调递增函数, g 为其反函数, $f > 0$. 其缓冲序列为 $XD_3 = (x(1)d_3, \dots, x(n)d_3)$, 其中 $x(k)d_3 =$

$$g\left[\frac{2}{(n-k+1)(n+k)} \sum_{i=k}^n if(x(i))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列和振荡序列时, D_3 都为弱化缓冲算子.

证明 容易验证, D_3 满足缓冲算子三公理, 所以 D_3 为缓冲算子. 下面证明 D_3 为弱化缓冲算子.

1) 当 X 为单调增长序列时, 即

$$0 \leq x(k) \leq \dots \leq x(n).$$

因 f 为一严格单调递增函数, $f > 0$, 有

$$0 \leq f(x(k)) \leq \dots \leq f(x(n)),$$

$$\left[\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right]^{\frac{1}{n-i+1}} \geq 1,$$

$$if(x(i))\left[\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right]^{\frac{1}{n-i+1}} \geq if(x(i)),$$

$$\frac{2}{(n-k+1)(n+k)} \sum_{i=k}^n if(x(i))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}} \geq f(x(i)).$$

又因 g 为 f 的反函数, 则

$$x(k)d_3 =$$

$$g\left[\frac{2}{(n-k+1)(n+k)} \sum_{i=k}^n if(x(i))\left(\frac{f(x(n))}{f(x(i))}\right)^{\frac{1}{n-i+1}}\right] \geq g[f(x(k))] = x(k).$$

由定理 1 知, 缓冲算子 D_3 为弱化缓冲算子.

可仿定理 2 证明, 当 X 为单调衰减序列和振荡序列时, D_3 都为弱化缓冲算子. \square

定理 6 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统原始行为数据序列, $x(k) > 0, k = 1, 2, \dots, n, D_1$ 和 D_2 为弱化缓冲算子. 如定理 2 和定理 5 所述, 则:

1) 当 X 为单调增长序列时

$$x(k)d_1 \geq x(k)d_3, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\};$$

2) 当 X 为单调衰减序列时

$$x(k)d_1 \leq x(k)d_3, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

定理 6 的证明推导过程可仿照定理 4, 此略.

4 实例分析

取 $f(x) = g(x) = x$ 来构造缓冲算子. 以中国城镇登记失业人数(单位为万人)为例, 验证本文弱化缓冲算子在 GM(1,1) 预测过程中的作用.

例 1 选取 2000 ~ 2006 年中国城镇登记失业人数作为原始数据序列, 见表 1.

年份	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
失业人数	595	681	770	800	827	839	847

以 2000 ~ 2005 年的数据作为建模数据, 2006 年数据作为模型检验数据. 计算城镇登记失业增长率分别为 14.454%, 13.069%, 3.896%, 3.375%, 1.451%, 0.954%. 显然前半部分增长速度较快, 后半部分增长速度较慢. 如果用此数据直接建模预测, 不可取. 经分析发现原因有二: 一方面, 从 20 世纪 90 年代中后期到 21 世纪初, 由于国有企业改革, 造成了许多工人下岗; 另一方面, 因为大中专院校扩大招生规模, 为社会培养了许多大学毕业生, 因此, 就业压力增大, 失业人数大大增加. 后来, 由于中央政府和地方政府陆续出台了促进下岗职工再就业和扶持大学生就业的政策, 减缓了就业压力, 表现为城镇登记失业人数增长减缓. 为了消除原始数据序列受到冲击扰动因素的影响, 采用缓冲算子进行作用.

以本文构造的缓冲算子对原始数据进行一阶弱化处理, 分别建立如下预测模型:

无缓冲算子作用, 直接建立的 GM(1,1) 模型为 $\hat{x}(k+1) = 14912.796e^{0.047k} - 14317.796$;

缓冲算子 D_1 作用后建立的 GM(1,1) 模型为 $\hat{x}(k+1) = 19308.681e^{0.038k} - 18678.607$;

缓冲算子 D_2 作用后建立的 GM(1,1) 模型为 $\hat{x}(k+1) = 63785.612e^{0.013k} - 63017.018$;

缓冲算子 D_3 作用后建立的 GM(1,1) 模型为 $\hat{x}(k+1) = 98293.850e^{0.008k} - 97490.980$;

算术平均缓冲算子 $x(k)E_1 = \frac{x_k + \dots + x_n}{n-k+1}$, 作

用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 47435.54e^{0.0165k} - 46593.52;$$

加权算术平均缓冲算子 $x(k)E_2 = \frac{kx_k + \dots + nx_n}{k + \dots + n}$, 作用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 71641.49e^{0.0112k} - 70849.49.$$

通过上述 GM(1,1) 模型得到的平均相对误差和预测值见表 2.

表 2 不同弱化缓冲算子作用后预测值及相对误差

缓冲算子	平均相对误差 / %	预测值
无缓冲算子	2.64	899
XD_1	2.35	889
XD_2	0.58	854
XD_3	0.26	848
XE_1	0.63	857
XE_2	0.21	850

由表 2 可知,原始数据序列经过弱化缓冲算子 D_1, D_2, D_3, E_1, E_2 作用后,平均相对误差都比原始序列直接建模的平均相对误差小,其中 D_3 作用后得到的预测值为 848,最逼近观测值 847;一步预测相对误差只有 0.19%,即预测精度最高.

例 2^[10] 选取 2003 ~ 2007 年某市房地产总产值数据作为原始数据序列,见表 3.

表 3 某市房地产总产值数据 亿元

年份	2003	2004	2005	2006	2007
房地产值数据	901	1175	1246	1275	1307

以 2003 ~ 2006 年的数据作为建模数据,2007 年数据作为模型检验数据. 房地产总产值数据增长率分别为 30.4%,6.1%,2.5%,2.5%. 显然前半部分增长速度较快,后半部分增长速度较慢. 原因分析可对照例 1. 建模结果如下:

无缓冲算子作用,直接建立 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 28718.7e^{0.0403k} - 27817.7;$$

缓冲算子 D_1 作用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 44147.2e^{0.027k} - 43365.2;$$

缓冲算子 D_2 作用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 44219.74e^{0.027k} - 43237.74;$$

缓冲算子 D_3 作用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 158510.73e^{0.0078k} - 157283.73;$$

算术平均缓冲算子 $x(k)E_1 = \frac{x_k + \dots + x_n}{n - k + 1}$,作

用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 71594.04e^{0.017k} - 70445.05;$$

加权算术平均缓冲算子 $x(k)E_2 =$

$\frac{kx_k + \dots + nx_n}{k + \dots + n}$,作用后建立的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}(k+1) = 97425.76e^{0.013k} - 96217.77.$$

通过上述模型得到的平均相对误差和预测值见表 4. 由表 4 可知,原始数据序列经过弱化缓冲算子 D_1, D_2, D_3, E_1, E_2 作用后,平均相对误差都比原始序列直接建模的平均相对误差小,其中 D_1 作用后得到的预测值为 1314,最逼近观测值 1307;一步预测相对误差只有 0.53%,即预测精度最高.

表 4 不同弱化缓冲算子作用后预测值及相对误差

缓冲算子	平均相对误差 / %	预测值
无缓冲算子	0.788	1334
XD_1	0.69	1314
XD_2	0.21	1291
XD_3	0.11	1286
XE_1	0.23	1299
XE_2	0.105	1292

5 结 论

本文在已有文献基础上,构造了一类新的弱化缓冲算子,并研究了它们之间的相互关系. 利用所构造的缓冲算子,对具有前半部分增长速度较快、后半部分增长速度较慢特征的原始数据序列,用一阶弱化缓冲序列分别进行了预测精度比较. 两个算例都表明:1)用 D_1, D_2, D_3, E_1, E_2 弱化处理的缓冲序列预测精度比原始数据序列有显著提高;2)通过比较 5 个弱化缓冲算子作用后的弱化缓冲序列的预测值可以发现,“新信息优先”的原理是灰色系统的基本原理,具体表现为例 1 和例 2 都是基于“新信息优先”所构造的缓冲算子预测精度最高,其中例 1 与例 2 分别为 XD_3 和 XD_1 . 但模拟的平均相对误差有点复杂. 总之,本文所构造的弱化缓冲算子确实能够充分有效地消除原始数据序列中的冲击扰动因素的干扰. 关于这类新的弱化缓冲算子的性质是今后进一步研究的重点.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[2] Liu Si-feng. The three axioms of buffer operator and their applications[J]. The J of Grey System, 1991, 3(1): 39-48.

[3] 刘思峰. 缓冲算子及其应用[J]. 灰色系统理论与实践, 1992, 2(1): 45-50.
(Liu S F. Buffer operator and its application [J]. Theories and Practices of Grey System, 1992, 2(1): 45-50.)

[4] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27.
(Liu S F. The trap in the prediction of a shock disturbed system and the buffer operator [J]. J of Huazhong University of Science and Technology, 1997, 25(1): 25-27.)

(下转第 1815 页)