

文章编号: 1001-0920(2010)01-0075-05

基于在线优化的线性系统状态反馈鲁棒镇定

于志刚^{1,2}, 沈永良¹, 李桂英¹

(1. 黑龙江大学 黑龙江省普通高等学校电子工程重点实验室,
哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 建立关于 Sylvester 方程的鲁棒极点配置梯度流优化算法模型, 在线求解相应的二次优化问题, 并在线计算状态反馈增益矩阵, 使得闭环系统矩阵的全部特征值位于给定的区域中. 对于一切满足条件的扰动, 具有最小灵敏度, 闭环系统大范围一致渐近稳定. 仿真结果验证了该方法适用于非线性系统的鲁棒镇定问题和在线鲁棒极点配置问题.

关键词: Sylvester 方程; 在线极点配置; 鲁棒控制; 梯度流算法

中图分类号: TP13

文献标识码: A

State feedback robust stabilization for linear system based on on-line optimization

YU Zhi-gang^{1,2}, SHEN Yong-liang¹, LI Gui-ying¹

(1. Key Lab of Electronic Engineering of College of Heilongjiang Province, Heilongjiang University, Harbin 150080, China; 2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: YU Zhi-gang, E-mail: yzgly@126.com)

Abstract: A gradient flow algorithm models developed for the on-line robust pole assignment is proposed for solving Sylvester equations. The algorithm shows to be capable of synthesizing linear feedback control systems via on-line computing feedback gain matrix and desired closed-loop poles. Meanwhile, the close-loop system matrix is least sensitive to perturbation or uncertainty, and uniformly asymptotically stable in largely range. Simulation results show that the proposed approach is suitable to the problem of robust stabilization for nonlinear system and on-line robust pole assignment.

Key words: Sylvester equation; on-linear pole assignment; robust control; gradient flow algorithm

1 引言

定常线性系统的极点完全决定了系统的稳定性(渐近稳定性), 还决定了系统的响应速度. 设计某种形式的线性定常控制律, 使得闭环系统具有指定的希望的一组极点并且具有最小闭环极点灵敏度的控制系统设计是鲁棒控制领域中的一个重要问题. 该方法受到控制理论界的普遍关注, 并取得了一些成果^[1-3]. 如 Kautsky 等人^[1]首次将鲁棒极点配置问题转化为优化问题, 并计算出反馈增益矩阵, 但是这些方法均通过离线计算来实现鲁棒极点配置的相关问题.

近年来, 不断有利用神经网络的并行计算能力实现在线鲁棒极点配置的相关研究成果出现, 文献[4]设计了多层递归神经网络, 其收敛到的最优解为

期望的闭环系统的极点, 但其收敛速度较慢. [5-6]利用模拟退火神经网络实现鲁棒极点配置, 其收敛性受参数的影响较大, 必须根据具体的对象凭经验设计参数, 因此限制了其实际应用. [7]通过递归神经网络求解 Sylvester 方程, 以达到极点配置的目的, 但很难实现闭环系统的鲁棒性要求.

在研究线性时变系统时, 将系统系数的时间变量视为一个参数^[8]. 如果系统的冻结时间特征值位于复平面上的左侧, 并且系统矩阵的时间变化率足够小, 则 Dosoer 证明了线性时变系统是一致渐近稳定的^[9], 同时给出了时间变化率的确切界限.

本文利用线性系统的鲁棒性分析结果和输出反馈特征结构配置方法, 将一类时变线性系统的鲁

收稿日期: 2009-10-15; 修回日期: 2010-04-12.

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究基金项目(11544036).

作者简介: 于志刚(1972-), 男, 讲师, 从事非线性控制、智能控制的研究; 沈永良(1964-), 男, 教授, 从事非线性自适应、预测控制等研究.

棒控制问题转换为其对应的线性定常系统的鲁棒极点配置问题, 并通过在线实时地求解相对应的优化问题, 进而通过设计计算量很小的(避免求解矩阵的逆)在线迭代学习算法, 实时计算最优反馈增益矩阵, 实现闭环系统极点的动态配置. 该方法在线优化反馈控制系统的性能, 使得闭环控制系统具有最大的稳定鲁棒性.

2 问题描述

考虑如下线性系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Delta a(x, t). \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $u \in \mathbf{R}^m$ ($m \leq n$) 分别为系统的状态向量和输入向量; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 分别为已知参数矩阵; $\Delta a(x, t)$ 为系统扰动, 满足关系式

$$\|\Delta a(x, t)\| \leq \delta_1 \|x\|, \quad (2)$$

这里 δ_1 为非负标量. 要解决的问题是对于给定的受扰系统, 设计适当的定常输出反馈律

$$u = Ky, \quad (3)$$

使得闭环系统渐近稳定. 鲁棒输出反馈镇定问题具体描述如下.

问题 1 给定: 1) 复平面左半平面中的一个区域 Ω ; 2) 矩阵 B 和 C 满秩, 且 (A, B) 能控, (A, C) 能观; 3) 非负标量 δ_1 , 寻求一个实矩阵 $K \in \mathbf{R}^{m \times r}$, 使得下述两个条件成立: 矩阵 $A_c = A + BKC$ 的全部特征值位于区域 Ω 中; 对于一切满足式 (2) 的扰动, 系统 (1) 和 (3) 大范围一致渐近稳定.

上述问题中的极点区域反映了对于系统稳定性和动态响应特性的要求. 闭环系统 (1) 和 (3) 一致渐近稳定的充分条件^[10]为

$$\|\Delta a(x, t)\| < \frac{1}{\|R\| \|P\| \|R^{-1}\|} \|x\|, \quad (4)$$

其中 P 为满足 Lyapunov 矩阵方程

$$\tilde{A}_c^T P + P \tilde{A}_c = -2I$$

的正定对称矩阵. 矩阵 \tilde{A}_c 定义为 $\tilde{A}_c = R^{-1} A_c R$, R 为任何一个 n 阶可逆矩阵. 如果选取 $R = V$, 其中 $A + BKC = V^{-T} F V$, $F = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$, 则有 $FP + PF = -2I$, 该方程的唯一解为

$$P = \text{diag}\left(-\frac{1}{s_1}, -\frac{1}{s_2}, \dots, -\frac{1}{s_n}\right),$$

$$\|P\| = \max \frac{1}{\{|s_i|, i = 1, 2, \dots, n\}}.$$

式 (4) 可表示为

$$\|\Delta a(x, t)\| < \frac{\min\{|s_i|, i = 1, 2, \dots, n\}}{\|V\| \|V^{-1}\|}. \quad (5)$$

结合式 (2), 若有

$$\delta_1 < \frac{\min\{|s_i|, i = 1, 2, \dots, n\}}{\|V\| \|V^{-1}\|}$$

成立, 且令鲁棒性能指标

$$J_1 = \frac{\delta_1 \|V\| \|V^{-1}\|}{\min\{|s_i|, i = 1, 2, \dots, n\}},$$

则系统 (1) 和 (3) 大范围已知渐近稳定的充分条件等价于 $J < 1$. 矩阵 K 也为矩阵 V 的函数, 因此可将上述问题转化为寻找矩阵 V , 使得 J 最小化, 等价于 $J_2 = \delta_1 \|V\| \|V^{-1}\|$ 最小化. 若 $\phi(V) = \|V\|^2 + \|V^{-1}\|^2$, 则有 $1 \leq \|V\|^2 \|V^{-1}\|^2 \leq \phi(V)$. 因此考虑 $J_3 = \|V\|_F^2 + \|V^{-1}\|_F^2$, 其中 $\|\cdot\|_F$ 表示 Forbenius 范数. 根据文献 [11], J_3 有全局极小点, 且 J_3 的全局(局部)极小点为 J_2 的全局(局部)极小点. 因此, 基于以上讨论, 鲁棒极点配置问题可转化为求解如下的优化问题:

$$\min \|V\|_F^2 + \|Z\|_F^2; \quad (6)$$

$$\text{s.t. } AV + BW - VF = 0, VZ = I,$$

$$V \in \mathbf{R}^{n \times n}, W \in \mathbf{R}^{m \times n}. \quad (7)$$

其中: $I \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为单位阵, 引入新的矩阵变量 Z 的目的是使得优化问题的可行解 V 非奇异. 一旦得到矩阵 W 和 Z , 即可得到反馈律增益矩阵 $K = WZ$. 传统的极点配置方法需要进行离线计算. 下面通过构造梯度流算法在线求解式 (6) 和 (7) 描述的二次优化问题.

3 梯度流算法模型及其收敛性分析

首先, 关于值函数 $V(t)$, $W(t)$ 和 $Z(t)$ 的矩阵分别定义如下:

$$J(V(t)) = \|V(t)\|_F^2 + \|Z(V(t))\|_F^2, \quad (8)$$

$$\xi(W(t)) = BW(t) + AV(t) - V(t)F, \quad (9)$$

$$\zeta(Z(t)) = V(t)Z(t) - I. \quad (10)$$

若取各变量对于时间的导数为相应定义函数的负梯度下降方向, 则 $J(V(t))$, $\xi(W(t))$ 和 $\zeta(Z(t))$ 分别成指数形式收敛, 有(为了简洁起见, 以下将符号中的时间变量 t 适当省略)

$$\dot{v}_{ij} = -\mu_V \frac{\partial J(V)}{\partial v_{ij}}.$$

于是, 关于矩阵的 V 梯度流算法的动态方程描述为

$$\dot{v}_{ij} = -\mu_V (\text{tr}(V^T \Gamma) - \text{tr}(Z \Gamma Z Z^{-T})), \quad (11)$$

其中 v_{ij} 是矩阵为 V 的第 (i, j) 个元素. 设计参数 $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mu_V > 0$. 对于式 (9) 和 (10), 令

$$\dot{\xi}(W) = -\mu_W \xi(W), \quad (12)$$

$$\dot{\zeta}(Z) = -\mu_Z \zeta(Z). \quad (13)$$

其中: $\mu_W > 0$, $\mu_Z > 0$. 由式 (12) 和 (13) 得到矩阵 W 和 Z 的梯度流算法的动态方程为

$$B\dot{W} = -\mu_W (BW + AV - VF), \quad (14)$$

$$V\dot{Z} = -\mu_Z (VZ + I). \quad (15)$$

该鲁棒极点配置梯度流动态网络模型由式 (11), (14) 和 (15)(相互关联的 3 组微分方程) 组成, 网络模型的输出为 Z 和 W , 反馈律增益矩阵可由 $K = WZ$ 得

到. 其结构框图如图 1 所示.

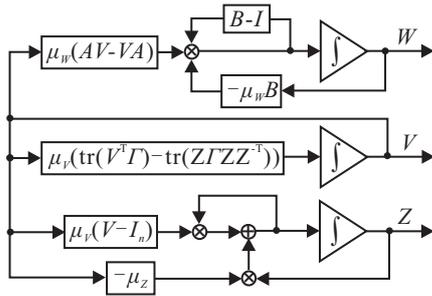


图 1 算法的结构框图

设动态方程(7)~(9)的平衡点集合 $(\bar{V}, \bar{W}, \bar{Z}) \in \Omega$, 满足约束条件(5)的可行解集合为 Ω^* , $\lambda_j(A)$ 表示矩阵 A 的第 j 个特征值.

定理 1 若 (A, B) 能控, 给定矩阵 $F = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$, 则 $s_i < 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 为期望的闭环极点; 若 $s_i \neq \lambda_j(A), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, 则网络的动态方程(7)~(9)所有状态变量 (V, W, Z) 全局渐近稳定, 且平衡点 $(\bar{V}, \bar{W}, \bar{Z}) \in \Omega^*$.

证明 定义如下能量函数:

$$E_W(W, t) = \|BW + AV - VF\|_F^2,$$

$$E_Z(Z, t) = \|VZ - I\|_F^2.$$

若令 $\tilde{W} = W - W^*, \tilde{W} = B\tilde{W}$, 其中 W^* 满足 $AV + BW^* - VF = 0$, 则 $E_W(\tilde{W}, t) = \|B\tilde{W}\|_F^2 = \text{trace}\{\tilde{W}^T \tilde{W}\}$. 又因 $B\dot{\tilde{W}} = -\mu(AV - VF - BW)$, 则 $B\dot{\tilde{W}} = -\mu B\tilde{W} = -\mu\tilde{W}$, 于是有

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\tilde{W}}(\tilde{W}, t) &= \text{trace}\{2\tilde{W}^T \dot{\tilde{W}}\} = \\ &= -2\mu \text{trace}\{\tilde{W}^T \tilde{W}\} = -2\mu E_{\tilde{W}}(\tilde{W}, t) \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

若令 \tilde{Z}^* 满足等式 $VZ^* = I, \tilde{Z} = Z - Z^*$, 根据式(15), 有

$$V\dot{\tilde{Z}} = -\mu V\tilde{Z} + \mu I = -\mu\tilde{Z}, \tilde{Z} = V\tilde{Z} - I,$$

则 $E_Z(\tilde{Z}, t) = \|V\tilde{Z} - I\|_F^2 = \text{trace}\{\tilde{Z}^T \tilde{Z}\}$, 于是有

$$\begin{aligned} \dot{E}_Z(\tilde{Z}, t) &= \text{trace}\{2\tilde{Z}^T \dot{\tilde{Z}}\} = \\ &= -2\mu \text{trace}\{\tilde{Z}^T \tilde{Z}\} = -2\mu E_Z(\tilde{Z}, t) \leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

定义总能量函数为

$$E(T, \tilde{V}, \tilde{Z}) = E_W(T) + E_W(\tilde{W}, t) + E_Z(\tilde{Z}, t),$$

其对于时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{E}(T, \tilde{W}, \tilde{Z}) &= \\ &= \text{trace}\left\{\left(\frac{\partial E_W(T)}{\partial T}\right)^T \dot{T}\right\} + \dot{E}_{\tilde{W}}(\tilde{W}, t) + \dot{E}_Z(\tilde{Z}, t) = \\ &= -\text{trace}\left\{\left(\frac{\partial E_W(W)}{\partial W}\right)^T \frac{\partial E_W(W)}{\partial W}\right\} + \\ &= \dot{E}_{\tilde{W}}(\tilde{W}, t) + \dot{E}_Z(\tilde{Z}, t). \end{aligned} \quad (18)$$

根据式(17)和(18)得到 $\dot{E}(T, \tilde{W}, \tilde{Z}) \leq 0$. 因此, 式(11), (14)和(15)所有状态变量 (V, W, Z) 全局渐近稳定,

又根据式(17)和(18), 有平衡点 $(\bar{V}, \bar{W}, \bar{Z}) \in \Omega^*$. \square

定理 2 对于反馈控制系统(1)和(9), 给定任意的初始状态 $(V, W, Z) \notin \Omega$, 若动态方程(7)~(9)的平衡点为 $(\bar{V}, \bar{W}, \bar{Z}) \in \Omega^*$, 取反馈控制律

$$u(t) = K(t)x(t) = W(t)Z(t)x(t), \quad (19)$$

则 $x(t) (t \geq 0)$ 有界, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$.

证明 对矩阵 $A + BK$ 进行 Jordan 分解, 有

$$A + BK = PJP^{-1}.$$

其中: J 为矩阵 $A + BK$ 的 Jordan 标准型, $P \in C^{n \times n}$, P 可逆. 由指数函数的性质有 $e^{(A+BK)t} = Pe^{Jt}P^{-1}$, 从而有

$$\|e^{(A+BK)t}\| \leq \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|e^{Jt}\|. \quad (20)$$

e^{Jt} 的元素由下述形式构成:

$$ct^k e^{(\alpha + \beta j)t}, \quad 0 \leq k \leq p - 1.$$

其中: c 为常数; $\alpha + \beta j$ 为矩阵的特征值; p 为特征值所在的与该项元素对应的 Jordan 块的阶数. e^{Jt} 有界的充要条件是矩阵 J 的特征值(即矩阵 $A + BK$ 的特征值)具有非正实部. 根据定理 1, 易知 $e^{Jt} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. 利用式(20), $\|e^{(A+BK)t}\|$ 有界, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{(A+BK)t}\| = 0$, 进而有 $x(t) (t \geq 0)$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$. \square

4 时变线性系统梯度流算法

考虑如下的时变系统:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \Delta a(x, t). \quad (21)$$

在研究线性时变系统的稳定性时, 如果系统的冻结时间特征值位于复平面的左侧, 且系统矩阵的时间变化率足够小, 则时变系统稳定. 因为任何一个定常线性系统的渐近稳定性均具有一定程度的鲁棒性, 即系统矩阵围绕某一常值矩阵波动的时变系统, 只要波动量足够小, 便可由其定常化系统决定其稳定性. 其次, 对于慢时变线性系统, 若其系统矩阵元素的变化率足够小或具有某种形式的 Lipushitz 条件, 则该系统的渐近稳定性可根据系统矩阵特征值是否在所有时间上具有负实部来判定.

对于时变系统(21), 根据系数“冻结法”, 可将其鲁棒输出反馈镇定问题转化为相应的定常线性系统的鲁棒控制问题, 则对应的矩阵 W 和 Z 的梯度流算法动态方程分别为如下形式:

$$\begin{aligned} B(t)\dot{W}(t) &= -\mu_W[(B(t) + \dot{B}(t))W(t) - \\ &= V(t)F + (A(t) + \dot{A}(t))V(t) + \\ &= \dot{V}(t)(A(t) - F)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$V(t)\dot{Z}(t) = -\mu_Z[V(t)(Z(t) + \dot{Z}(t)) + I]. \quad (23)$$

因此时变线性系统的梯度流网络模型由式(11), (22)和(23)组成, 网络模型的输出为 $Z(t)$ 和 $W(t)$.

5 仿真研究

下面考虑倒立摆系统的在线鲁棒控制问题. 倒立摆系统是一个具有非最小相位的非线性系统, 其运动方程可描述为

$$(M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + b\dot{x} = u,$$

$$m(\ddot{x} \cos \theta + l\ddot{\theta} - \sin \theta) = 0.$$

其中: M 为小车的质量, m 为倒立摆顶端重物的质量, l 为摆杆长度, g 为重力加速度, b 为小车运动的摩擦力, θ 为摆的角度, x 为小车的位移, u 为作用力. 定义 $\xi = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$, 则倒立摆系统的状态空间描述为 $\dot{\xi} = f(\xi, u)$, 其中

$$\xi = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T, \quad f(\xi, u) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4],$$

$$f_1 = x_2(t), \quad f_3 = x_4(t),$$

$$f_2 = \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} (u + m(lx_4 - g \cos x_3) \sin x_3 - bx_2),$$

$$f_4 = ((M+m)g \sin x_3 + (bx_2 - u - mlx_4^2 \sin x_3) \cos x_3) / l(M+m \sin^2 x_3).$$

系统参数 $M = 1.378 \text{ kg}$, $m = 0.051 \text{ kg}$, $l = 0.325 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ kg/s}$, $b = 9.81 \text{ m/s}^2$.

根据文献[12], 给定某一初始状态, 伺服控制系统满足在一定意义下的零-误差轨迹是局部指数稳定的, 因此可以考虑线性化后的系统的稳定性问题. 根据文献[13]中的结果, 若 $(\partial f(\xi, u)/\partial \xi \ \partial f(\xi, u)/\partial u)$ 可控, 则存在控制律 $u = Kx$ 使得 $\partial f(\xi, u)/\partial \xi$ 的特征值具有负实部. 对于倒立摆运动方程, 有

$$A(x) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{M+m \sin^2 x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{2mlx_4 \sin x_3}{M+m \sin^2 x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-b \cos x_3}{(M+m \sin^2 x_3)l} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{mlx_4 \sin 2x_3}{(M+m \sin^2 x_3)l} \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} & 0 & \frac{-\cos x_3}{(M+m \sin^2 x_3)l} \end{bmatrix}^T.$$

为了实时稳定雅可比线性化对 $(A(x) \ B(x))$, 考虑如下的时变 Sylvester 方程:

$$A(x)V(x) - V(x)\Lambda = -B(x)W(x),$$

$$K(x)V(x) = W(x).$$

其中: $\Lambda = [-2 \ -3 \ -4 \ -5]$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.3$, $\dot{\theta}(0) = 0$. 在式(2)中非负标量 $\delta_1 = 0.3$, 收敛因子决定极点配置的收敛速度. 在仿真中 $\mu_W = \mu_Z = \mu_V = 100$ 已满足需要. 对于快变系统收敛因子可以取更大的值. 在优化过程中, 为了使 $V(x)$ 非奇异, 应保证 $\lambda(A) \cap \lambda(\Lambda) = \emptyset$. 仿真结果如图2~图4所示.

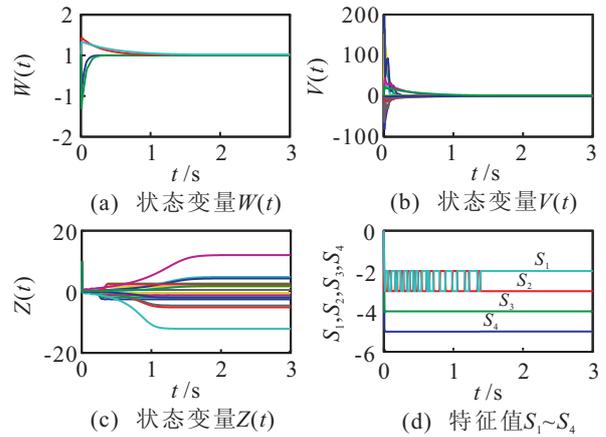


图2 梯度流算法的状态

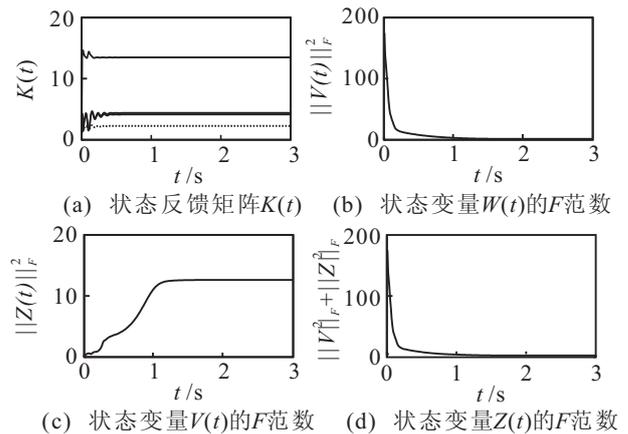


图3 状态反馈矩阵和梯度流算法状态的Forbenius范数

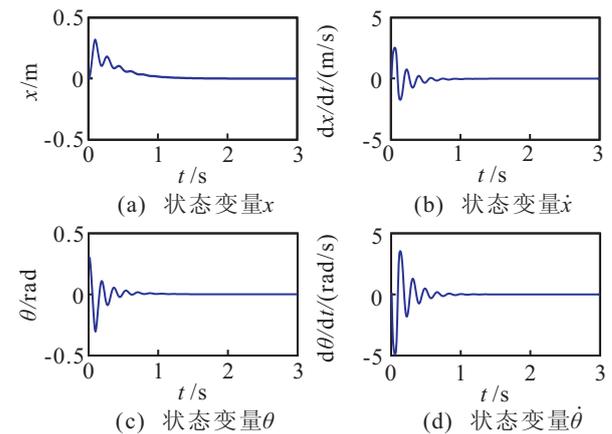


图4 倒立摆系统的状态

仿真结果验证了利用极点配置算法系统闭环极点可迅速收敛到期望的极点, 并且闭环控制系统具有一定的鲁棒性.

6 结论

关于 Sylvester 方程的鲁棒极点配置梯度流优化算法模型由3个微分方程组成. 通过构造控制系统梯度流算法, 在线求解相应的二次优化问题, 实现了在线计算状态反馈增益矩阵, 使得闭环控制系统具有希望的闭环极点. 对于一切满足条件的扰动, 系统大范围一致渐近稳定, 且对扰动和不确定性具有最小灵

敏度. 该方法适用于定常线性系统和慢时变线性系统的在线鲁棒控制器设计, 但对于快时变的线性系统而言, 应该从其稳定性条件入手来分析、解决在线鲁棒性设计问题.

参考文献(References)

- [1] Kautsky J, Nichols N, Van Dooren P. Robust pole assignment in linear state feedback[J]. *Int J of Control*, 1985, 41(5): 1129-1155.
- [2] Duan G R. Robust pole assignment in high-order descriptor linear systems via proportional plus derivative state feedback[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2008, 2(4): 277-287.
- [3] Nurges Ulo. Robust pole assignment via reflection coefficients of polynomials[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1223-1230.
- [4] Hu S Q, Wang J. Multilayer recurrent neural networks for online robust pole assignment[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 2003, 50(11): 1488-1494.
- [5] Hu S Q, Wang J. A gradient flow approach to on-line robust pole assignment for synthesizing output feedback control systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(11): 1959-1968.
- [6] Wang Jun, Wu Guang. A multilayer recurrent neural network for on-line synthesis of minimum-norm linear feedback control systems via pole assignment[J]. *Automatica*, 1996, 32(3): 435-442.
- [7] Zhang Y N, Jiang D C. A recurrent neural network for solving Sylvester equation with time-varying coefficients[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(4): 1053-1063.
- [8] Kamen E W, Khargonekar P P, Tannenbaum A. Control of slowly varying linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(9): 1283-1285.
- [9] Desoer C A. Slowly varying system $x = A(t)x$ [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1969, 14(6): 780-781.
- [10] 段广仁, 吴广玉, 黄文虎. 线性系统极点配置控制器的鲁棒稳定性分析[J]. *控制理论与应用*, 1988, 5(4): 103-108. (Duan G R, Wu G Y, Huang W H. Robust stability analysis of pole assignment controllers for linear systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1988, 5(4): 103-108.)
- [11] Lam J, Yan W Y, Hu T S. Pole assignment with eigenvalue and stability robustness[J]. *Int J of Control*, 1999, 72(10): 1165-1174.
- [12] Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(2): 131-140.
- [13] Huang J, Rugh W J. Stabilization on zero-error manifolds and the nonlinear servomechanism problem[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(7): 1009-1013.
- [2] Xia C Y, Hsu W, Lee M L, et al. Border: Efficient computation of boundary point[J]. *IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering*, 2006, 18(3): 289-303.
- [3] Ester M, Kriegel H P, Sander J. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise[C]. *Proc of the 2nd Int Conf on Knowledge Discovery and Data Mining*. Portland: AAAI Press, 1996: 226-231.
- [4] 邱保志, 沈钧毅. 基于扩展和网格的多密度聚类算法[J]. *控制与决策*, 2006, 21(9): 1011-1014. (Qiu B Z, Shen J Y. Grid-based and extend-based clustering algorithm for multi-density[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(9): 1011-1014.)
- [5] Qiu B Z, Yue F, Shen J Y. BRIM: An efficient boundary points detecting algorithm[C]. *Proc of Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*. Heidelberg: Springer, 2007: 761-768.
- [6] 邱保志, 余田. 基于网格梯度的边界点检测算法的研究[J]. *微电子学与计算机*, 2008, 25(3): 77-80. (Qiu B Z, Yu T. Boundary points detecting based gradient of grid[J]. *Microelectronics and Computer*, 2008, 25(3): 77-80.)
- [7] 李亦农, 李梅. 信息论基础教程[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2005: 8-17. (Li Y N, Li M. Information theory-based course[M]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications Press, 2005: 8-17.)
- [8] 邱保志, 张西芝. 基于网格的参数自动化聚类算法[J]. *郑州大学学报: 工学版*, 2006, 27(2): 91-93. (Qiu B Z, Zhang X Z. Grid-based clustering algorithm with the parameter automatization[J]. *J of Zhengzhou University: Engineering Science*, 2006, 27(2): 91-93.)
- [9] Karypis G, Han E H, Kumar V. Chameleon: A hierarchical clustering algorithm using dynamic modeling[J]. *IEEE Computer*, 1999, 32(8): 68-75.
- [10] Hsu C M, Chen M S. Subspace clustering of high dimensional spatial data with noises[C]. *Proc of Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*. Heidelberg: Springer, 2004: 31-40.

(上接第74页)